
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01214222 0







VORLESUNGEN

ÜBER

RIEMANN'S THEORIE

DER

ABEL'SCHEN INTEGRALE.

VON

DR. C. NEUMANN,

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ZU LEIPZIG.

ZWEITE

VOLLSTÄNDIG UMGEARBEITETE UND WESENTLICH VERMEHRTE AUFLAGE.

MIT EINER LITHOGRAPHIRTEN TAFEL UND IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1884.

11460
5/1/91
6
QA
345
N48
1884

Vorwort zur ersten Auflage.

In der vor vierzehn Jahren von *Riemann* veröffentlichten Schrift: „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse“*) finden sich zwei Gedanken ausgesprochen, die von fundamentaler Bedeutung sind.

Während man bis dahin bei Behandlung solcher Functionen ausging von einem *Ausdruck* der Function, durch welchen ihr Werth für jeden Werth des Arguments definirt wird, erkannte *Riemann*, dass es für viele Untersuchungen zweckmässiger und natürlicher ist, die Functionen zu definiren durch gewisse *Merkmale ihrer Stetigkeit oder Unstetigkeit.* Wenn dieser Gedanke auch nicht vollständig neu ist, sondern in seinen Anfängen weiter zurückreicht, so hat doch *Riemann* zuerst sein volles Gewicht erkannt, und zuerst denselben, entkleidet von aller fremdartiger Beimischung, in allgemeiner und zugleich bestimmter Weise ausgesprochen.

Vollständig neu ist der zweite Gedanke. Die von *Gauss* angegebene Methode, die Werthe einer von einem complexen Argument abhängenden Function auf einer Fläche auszubreiten, war nur anwendbar auf *ein*werthige Functionen. *Riemann* zeigte, dass die *mehr*werthigen Functionen einer ganz ähnlichen Behandlung fähig sind, sobald man Flächen in Anwendung bringt, die aus mehreren über einander liegenden, an einzelnen Stellen mit einander verwachsenen Blättern bestehen, und die, was ihre nähere Beschaffenheit anbelangt, abhängig sind von der individuellen Natur der gerade betrachteten Function.

Es scheinen diese Gedanken zu Anfang wenig beachtet zu sein. Welcher Wirkung dieselben aber fähig sind, zeigte sich bald und in überraschender Weise, als *Riemann* dieselben in Anwendung brachte auf die elliptischen und Abel'schen Integrale, und als es

*) Doctor-Dissertation. Göttingen 1851.

ihm glückte, in diesen Regionen zu einer Theorie*) zu gelangen, die über die früher inne gehaltenen Grenzen weit hinausreichte, Vieles aufklärte, was bis dahin dunkel war, und Manches vereinigte, was früher getrennt erschien.

In *einem* Punkte scheint die Theorie allerdings mangelhaft zu sein. Sie zeigt, wie die Umkehrung der Abel'schen Integrale, sobald die Thetafunction *einmal bekannt ist,* mit Hülfe dieser Function bewerkstelligt werden kann; sie giebt hingegen keinen Aufschluss über die innere Nothwendigkeit, welche von den Abel'schen Integralen *zur Bildung* jener Thetafunction hinleitet. Doch wird dieser Uebelstand ohne Zweifel von selber verschwinden, sobald die Riemann'schen Gedanken und die durch sie begründete neue Anschauungsweise erst in weiterem Umfange zur Herrschaft gelangt sein werden.

Wie gewaltig nämlich die Erfolge auch sein mögen, welche im Gebiet der elliptischen und Abel'schen Integrale durch die neue Anschauungsweise errungen wurden, so sind sie doch nur als ein erstes Beispiel zu betrachten. Es giebt andere Theile der mathematischen Wissenschaft, auf welche jene Anschauungsweise wahrscheinlich von nicht minder kraftvoller Wirkung sein wird.

Dass bisher wenig geschehen, was solche Erwartungen rechtfertigt, hat seinen Grund darin, dass die neuen *Gedanken*, und dass namentlich die mit diesen zusammenhängenden neuen *Methoden* sich noch nicht hinreichend Bahn gebrochen haben.

Um mich deutlicher ausdrücken zu können, erinnere ich an die Differential- und Integral-Rechnung. Die dieser Disciplin zu Grunde liegenden Gedanken sind ihrem Wesen nach einfach, an Zahl geringe. Um aber diese Gedanken benutzen zu können, bedarf es nicht allein ihrer Kenntniss, sondern auch eines sorgfältigen und mühsamen Studiums der aus ihnen entspringenden Methoden. Ebenso verhält es sich mit der durch *Riemann* begründeten neuen Disciplin. Auch hier liegt eine weite Kluft zwischen der Kenntniss der einfachen Grundgedanken und zwischen der Kenntniss der sich anschliessenden Methoden.

Allerdings sind diese Methoden von *Riemann* entwickelt, entwickelt in ansehnlichem Umfange. Wer sie aber aus diesen Entwickelungen kennen lernen will, hat einen beschwerlichen und steil ansteigenden Weg vor sich, von vielfach wechselnder Richtung.

*) *Riemann's* Theorie der Abel'schen Functionen, und drei andere dazu gehörige Aufsätze in Borchardt's Journal. Band 54.

Eine Vorlesung, die ich im Sommersemester 1863 an der Universität *Halle* über diesen Gegenstand hielt, veranlasste mich, nach einem Wege zu suchen, der ein möglicht bequemes und stetiges Ansteigen gestattet und der zugleich in mässigen Intervallen auf Ruhepunkte führt, von denen aus die jedesmal zurückgelegte Wegstrecke deutlich übersehen werden kann. Zugleich schien es, falls der gewählte Weg die aufzuwendende Mühe lohnen sollte, nothwendig, von Anfang an ein festes Ziel ins Auge zu fassen, und Alles, was zu weit ausser der so bestimmten Richtung lag, vorläufig unbeachtet zu lassen. Es darf daher nicht befremden, wenn in dem vorliegenden Lehrbuch, welches im Wesentlichen den Inhalt der damals gehaltenen Vorlesung ausmacht, Manches fehlt, was an und für sich wichtig ist, z. B. fast Alles, was auf die Convergenz der Reihen Bezug hat.

Während ich übrigens in jener Vorlesung nur bis zur Umkehrung der elliptischen Integrale vorzudringen für angemessen fand, bin ich gegenwärtig weiter gegangen, nämlich bis zur Umkehrung der hyperelliptischen Integrale. Ausserdem ist in der Zwischenzeit auch Manches geändert, was damals nicht anschaulich genug hervortrat, oder nicht hinreichend strenge zu sein schien.

Meine Darstellung fusst ausschliesslich auf dem Studium der schon genannten Riemann'schen Abhandlungen. Erwähnen muss ich dabei jedoch eines Gedankens, der mir aus Riemann's *Vorlesungen* durch mündliche Ueberlieferung zu Ohren kam, und der auf meine Darstellung von nicht geringem Einfluss wurde. Dieser Gedanke besteht in der Projection der auf der *Horizontalebene* ausgebreiteten Functionswerthe nach einer *Kugelfläche* hin. Ich habe dieser (wie ich glaube nur beiläufig) von Riemann angegebenen Projection noch eine zweite (die Projection von der *Kugelfläche* auf die *Antipodenebene*) hinzugefügt; und glaube, dass diese geometrischen Vorstellungen, obwohl für die Wissenschaft selber unwesentlich, für die erste Einführung in die von Riemann begründete neue Disciplin von grossem Vortheil sein werden.

Was im Lauf der letzten Jahre (in directer oder indirecter Weise) durch die Schriften von Roch und Prym über Riemann's *Vorlesungen* bekannt wurde, konnte nicht mehr von Einfluss werden auf das vorliegende Lehrbuch, welches damals in Plan und Anordnung bereits eine ihm eigenthümliche und feste Gestaltung gewonnen hatte.

Als meine Arbeit fast völlig zum Abschluss gebracht war, erschien das schätzbare Werk von *Durège.* In demselben zeigte sich

Manches behandelt, was ich ebenfalls bearbeitet hatte, Manches auch in helles Licht gestellt, was in meiner Arbeit nur schwach angedeutet war oder wohl ganz fehlte. Im Ganzen erschienen Ziel und Anordnung des Werkes von Durège von denen des meinigen so wesentlich verschieden, dass ich die Veröffentlichung meiner Arbeit keinen Augenblick beanstandet habe.

Ich glaube, dass die Schwierigkeiten, welche dem Verständniss der *Riemann*'schen Abhandlungen entgegenstehen, durch das vorliegende Lehrbuch beseitigt sein werden. Ausgenommen bleibt dabei allerdings ein wesentlicher Punkt, welcher in meine Darstellung ihrem ganzen Gange nach nicht hineinpasste, nämlich die Darlegung und Anwendung des *Dirichlet'schen Princips*. Das Wesentliche hierüber gedenke ich bei späterer Gelegenheit kurz zusammenzustellen.

Solches ist inzwischen geschehen durch eine kleine Schrift, die gegenwärtig (October 1865) im Druck begriffen ist, und die den Titel führt: *Das Dirichlet'sche Princip in seiner Anwendung auf die Riemann'schen Flächen.*

Basel, Januar 1865.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Während die erste Auflage nur die Theorie der *elliptischen* und *hyperelliptischen* Integrale enthält, umfasst die gegenwärtige zweite Auflage auch noch die Theorie der *allgemeinen Abel'schen Integrale.* Namentlich enthält sie das diesen Integralen zugehörige *Abel'sche Theorem*, und das denselben entsprechende *Jacobi'sche Umkehrproblem.*

Bei dieser Ausdehnung des Werkes war es nothwendig, das *Dirichlet'sche* Princip oder vielmehr die aus diesem Princip von *Riemann* deducirten *Existenztheoreme* mit in den Kreis der Betrachtung hineinzuziehen. Da nun das Dirichlet'sche Princip der erforderlichen Strenge entbehrt, und vorläufig auch keine Hoffnung vorhanden ist, dasselbe [etwa durch irgend welche Modification] dieser Strenge theilhaftig zu machen, so entstand die Aufgabe, jene Riemann'schen Existenztheoreme, unter *Vermeidung* des Dirichlet'schen Princips, auf irgend welchem *andern* Wege zu beweisen, — etwa durch die *Methode des arithmetischen Mittels,* unter Zuhülfenahme bekannter *combinatorischer Methoden.*

Obwohl die Ausführbarkeit eines solchen Unternehmens kaum zweifelhaft sein konnte, so war es doch zu Anfang meine Absicht, derartig difficile Dinge ganz bei Seite zu lassen und jene [für die Theorie der Abel'schen Integrale unentbehrlichen] Riemann'schen Existenztheoreme im vorliegenden Werk, ohne weitere Begründung, nur *rein historisch* mitzutheilen, — was in der That, etwa in der Mitte des Werkes [pg. 238, 239] auch geschehen ist. — Inzwischen ist es mir nun aber gelungen, den Beweis jener Theoreme wirklich zu finden. Und demgemäss habe ich diesen Beweis dem vorliegen- Werke nachträglich noch beigefügt in den drei letzten Capiteln.

Der Beweis beruht der Hauptsache nach auf den bereits genannten Methoden. Trotzdem erforderte die wirkliche Ausführung des Beweises vielfache Arbeit und Anstrengung. So z. B. zeigte sich, dass jene Methoden, mit Rücksicht auf den vorliegenden Zweck, theils einer *beträchtlichen Vereinfachung fähig*, theils aber auch einer *strengeren Fassung bedürftig* waren. Das Eine wie das Andere ist von mir dadurch erreicht worden, dass ich die Betrachtung einer mehrblättrigen Riemann'schen Kugelfläche auf die Betrachtung von lauter *Kreisflächen* reducirt habe.

Demgemäss war also im vorliegenden Werk die Darlegung der *Methode des arithmetischen Mittels* nur für den Fall der *Kreisfläche* erforderlich. Auch führt das auf diesem Wege erhaltene Theorem (pg. 410) sofort zu zwei weiteren die Kreisfläche betreffenden Sätzen (pg. 417 und pg. 423), die alsdann ihrerseits eine bequeme und sichere Grundlage bilden für die weiterhin in Anwendung kommenden *combinatorischen Methoden*. Dabei sei bemerkt, dass diese letztern von mir in zwei Kategorien gesondert sind, nämlich in *disjunctive* und *adjunctive* Methoden.

Ich habe ferner noch Einiges zu bemerken über die *Strenge* der in meinem Werk gegebenen Expositionen. Der von *Riemann* in seinen „Grundlagen" [Gesammelte Werke pg. 12] angegebene Satz:

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dT = -\int(X \cos \xi + Y \cos \eta)\, ds$$

ist von mir *ungeändert beibehalten*, nämlich auf pg. 7 dieses Werkes von Neuem reproducirt worden, — *obwohl* dieser Satz der erforderlichen Strenge entbehrt. Soll nämlich der Satz wirklich correct sein, so ist nicht allein die Stetigkeit der betreffenden Functionen *selber* (welche von Riemann mit X, Y, von mir mit W bezeichnet sind), sondern überdies auch noch die Stetigkeit *ihrer ersten Ableitungen nach* x, y vorauszusetzen. So z. B. wird in meinem Werk die letzte Formel auf pg. 6 nur dann unanfechtbar sein, wenn sowohl W selber, *wie auch* $\frac{\partial W}{\partial y}$ längs der Linie $\alpha\alpha$ stetig sind.

Diese Ungenauigkeit überträgt sich auf viele Theile des vorliegenden Werkes. So z. B. scheint das *Cauchy'sche Theorem* (pg. 19):

$$\int_{\mathfrak{A}} f(z)\,dz = 0$$

nur dann ein absolut strenges zu sein, wenn auf der Fläche $\mathfrak{A}$, ausser der Stetigkeit von $f(z)$, auch noch die von $f'(z)$ vorausgesetzt wird.

Absichtlich habe ich indessen in dieser Beziehung die Theorie in derjenigen Form, in welcher sie von *Cauchy* und *Riemann* gegeben ist, zu *conserviren* gesucht. Denn dem Anfänger wird hierdurch das Verständniss meines Werkes erleichtert werden. Und andererseits wird der weiter Vorgeschrittene und an absolute Strenge Gewöhnte, die in Rede stehenden Ungenauigkeiten leicht abzustreifen und die betreffenden Sätze in ihre wirklich correcte Gestalt zu versetzen im Stande sein.

Ueberhaupt dürfte es ja bei der Darlegung einer mathematischen Theorie weniger auf eine durchweg strenge Darstellung, als vielmehr darauf ankommen, *dass die angegebenen Methoden die zur strengen Darstellung erforderlichen Mittel gewähren.* In dieser Beziehung aber glaube ich die Theorie durch mein Werk einigermassen vervollständigt und vervollkommnet zu haben, nicht nur durch die schon besprochene Beweisführung der Riemann'schen Existenztheoreme, sondern namentlich auch durch meine Betrachtungen über die Stetigkeit mehrdeutiger Functionen (im sechsten Capitel), sowie durch meine Darlegungen über das Verschwinden der Thetafunctionen (im dreizehnten Capitel pg. 333—353).

Schliesslich erlaube ich mir, den Leser, hinsichtlich meiner Ausdrucksweise, auf die letzte Seite dieses Werkes aufmerksam zu machen. Dabei möchte ich bitten, die wenigen von mir neu eingeführten Worte nicht als wirkliche Neuerungen, sondern nur als vorübergehende, dem augenblicklichen Zweck entsprechende *Abbreviaturen* anzusehen.

Leipzig, im August 1884.

Neumann.

Inhalts-Register.

Erstes Capitel.

Die allgemeinen Grundlagen der Cauchy'schen Functionentheorie.

Zweites Capitel.

Entwicklung einer Function nach den Potenzen ihres Argumentes.

Drittes Capitel.

Functionen in ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche.

Viertes Capitel.

Einführung der Riemann'schen ebenen Flächen und der Riemann'schen Kugelflächen.

Fünftes Capitel.

Ueber Functionen, die auf einer Riemann'schen Kugelfläche ausgebreitet sind. Definition der regulären Functionen.

Sechstes Capitel.

Ueber die Stetigkeit mehrdeutiger Functionen.

Siebentes Capitel.

Geometrische Betrachtungen.

Seite

Achtes Capitel.

Ueber Integrale mit veränderlicher Integrationscurve.

Neuntes Capitel.

Die allgemeinen Eigenschaften der Abel'schen Integrale.

Zehntes Capitel.

Anwendung der Riemann'schen Existenztheoreme zur Untersuchung der Abel'schen Integrale.

Seite

Eilftes Capitel.

Das Abel'sche Theorem.

Zwölftes Capitel.

Einführung der Thetafunctionen.

Dreizehntes Capitel.

Anwendung der Thetafunctionen auf die Theorie der Abel'schen Integrale.

Vierzehntes Capitel.

Die Umkehrung der hyperelliptischen Integrale erster Gattung.

Fünfzehntes Capitel.

Die Umkehrung der Abel'schen Integrale erster Gattung.

Verbesserungen.

pg. 10. In der 14. Zeile des § 5 lies „Grössen" statt „Grösse".
pg. 12, Zeile 5, lies „nach" statt „noch".
pg. 23, Zeile 13, lies „*Fläche* $\mathfrak{A}$" statt „*Fläche*".
pg. 60, Zeile 6, lies „rationale Function" statt „rationale".
pg. 73, Zeile 11 v. u., lies „$m \cdot 360$" statt „360".

Erstes Capitel.

Die allgemeinen Grundlagen der Cauchy'schen Functionentheorie.

§ 1.

Ueber die Anwendung geometrischer Vorstellungen im Bereiche der Functionentheorie.

Dass die Functionentheorie als solche von geometrischen Vorstellungen *unabhängig* ist, bedarf keiner Erläuterung. Wenn aber *Gauss, Cauchy* und *Riemann* geometrische Bilder und Vorstellungen im Gebiet der Functionentheorie nicht nur zur Darstellung bekannter, sondern auch zur Auffindung neuer Sätze mit Erfolg in Anwendung gebracht haben; so dürfte es wohl für uns gerathen sein, diesem Beispiel Folge zu leisten, und die Beihülfe, welche die Geometrie der Functionentheorie gewährt, wenn sie im Grunde genommen auch nur eine äusserliche sein mag, nicht zu verschmähen.

Jene von *Gauss, Cauchy* und *Riemann* eingeführten geometrischen Vorstellungen gehören theils der *Ebene*, theils aber auch dem *Raume* an (wie z. B. die Riemann'schen mehrblättrigen Flächen, namentlich aber die von Riemann eingeführten Kugelflächen), und verlangen daher zu ihrer Basis die Festsetzung irgend eines rechtwinkligen Axensystems (x, y, z); wobei man die Wahl hat zwischen zwei zu einander *incongruenten* Systemen (x', y', z') und (x'', y'', z''), von denen das eine angesehen werden kann als das Spiegelbild des andern.

Hierbei tritt die Unannehmlichkeit ein, dass man *rein geometrisch* diese beiden incongruenten Systeme (x', y', z') und (x'', y'', z'') wohl von einander zu *unterscheiden*, nicht aber das eine, gegenüber dem andern, durch bestimmte Merkmale *kenntlich* zu machen im Stande ist. Zur Vermeidung, respective Beseitigung dieses Uebelstandes bieten sich zwei Methoden dar.

Die *eine* Methode besteht darin, dass man ein *unbestimmtes* aber *unveränderliches* Axensystem (x, y, z) anwendet, also ganz dahin gestellt sein lässt, welches der beiden Systeme (x', y', z') und

(x'', y'', z'') darunter verstanden werden soll. Ist z. B. im Raume eine Linie L von bestimmter Richtung gegeben, und soll zwischen den beiden einander entgegengesetzten Rotationen um diese Linie (als Axe) unterschieden werden, so wird man als *positive* Rotation diejenige festsetzen können, welche zur Richtung L ebenso liegt, wie bei jenem der Betrachtung zu Grunde gelegten Axensystem (x, y, z) die xy-Rotation zur z-Axe. Dabei ist unter der xy-Rotation diejenige Bewegung zu verstehen, welche die x-Axe auszuführen haben würde, um durch eine Drehung von 90^0 in die Lage der y-Axe zu gelangen.

Die *andere* Methode besteht darin, dass man wirklich ein *bestimmtes* unter jenen beiden Systemen $(x', y' z')$ und (x'', y'', z'') erwählt, was allerdings (wie schon bemerkt) nicht *rein geometrisch*, wohl aber *durch Anwendung empirisch gegebener Objecte* ausführbar ist. So z. B. kann man die Finger der linken Hand in solcher Weise ausstrecken, dass der kleine Finger, der Zeigefinger und der Daumen nahezu aufeinander senkrecht stehen. Und man kann alsdann festsetzen, dass zum Axensystem (x, y, z) dasjenige genommen werden soll, bei welchem die x-Axe zur y-Axe zur z-Axe ebenso liegt, wie bei jener *linken* Hand der kleine Finger zum Zeigefinger zum Daumen.

Die zuletzt angedeutete Methode ist diejenige, welche heut zu Tage bei der Mehrzahl der Mathematiker üblich geworden ist, und zugleich auch diejenige, von welcher ich im vorliegenden Werke Gebrauch machen werde, wenn auch in etwas anderer Einkleidung. Da nämlich im Folgenden stets nur von *Flächen* die Rede sein wird, so erscheint es zweckmässig nur *zwei*, und zwar in der gegebenen Fläche liegenden Axen x und y einzuführen, daneben aber, als Surrogat für die positive z-Axe, eine bestimmte Seite dieser Fläche als die *obere* festzusetzen.

§ 2.

Ueber die positive Umlaufung einer Fläche, deren obere Seite in bestimmter Weise festgesetzt ist.

Auf der Horizontalebene sei irgend ein Gebiet $\mathfrak{A}$ (z. B. ein Kreis oder eine Ellipse oder ein Quadrat u. s. w.) abgegrenzt. Ein Mensch, welcher auf der Horizontalebene fortschreitet, hat, wenn er diese Fläche $\mathfrak{A}$ längs ihres Randes umwandern will, die Wahl zwischen zwei einander entgegengesetzten Richtungen. Je nachdem er sich für die eine oder die andere entscheidet, wird er während

seiner Wanderung die Fläche $\mathfrak{A}$ entweder beständig zur Linken oder beständig zur Rechten haben. Wir setzen Folgendes fest:

(1.) *Diejenige Richtung, in welcher man am Rande und auf der oberen Seite einer gegebenen Fläche fortgehen muss, falls man die Fläche selber beständig zur Linken haben will, soll die positive Richtung ihres Randes, und die Wanderung, welche man alsdann ausführt, eine positive Umlaufung der Fläche genannt werden.*

Diese Definition ist unmittelbar auch auf den Fall anwendbar, dass die Fläche *mehrere* Randcurven besitzt. Sind z. B. in der Horizontalebene zwei concentrische Kreisflächen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ gegeben, und zwar $\mathfrak{C}$ grösser als $\mathfrak{C}'$, und bezeichnet man die zwischen den beiden Kreisperipherien liegende *ringförmige* Fläche mit $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C} - \mathfrak{C}',$$



so ist die *positive* Umlaufung der Fläche $\mathfrak{C}$ durch den Pfeil s, ebenso die *positive* Umlaufung der Fläche $\mathfrak{C}'$ durch den Pfeil s' dargestellt. Hingegen wird die *positive* Umlaufung der ringförmigen Fläche $\mathfrak{A}$ nicht durch s und s', sondern durch s und σ dargestellt sein. Denn in der That sind s und σ diejenigen Richtungen, in denen man die beiden Randcurven von $\mathfrak{A}$ zu durchwandern hat, falls man dabei das angrenzende Gebiet dieser Fläche $\mathfrak{A}$ stets zur *Linken* haben will.

Will man also den ganzen Rand der ringförmigen Fläche $\mathfrak{A}$ *positiv* durchlaufen, so hat man zuerst den Rand der grössern Kreisfläche $\mathfrak{C}$ *positiv* (d. i. in der Richtung s) sodann aber den Rand der kleinern Kreisfläche $\mathfrak{C}'$ *negativ* (d. i. in der zu s' entgegengesetzten Richtung σ) zu durchwandern.

Ein auf der Horizontalebene markirter Punkt kann als eine unendlich kleine Kreisfläche angesehen werden. Demgemäss soll unter der *positiven Umlaufung des Punktes* diejenige verstanden werden, bei welcher jene kleine Kreisfläche in positiver Richtung umlaufen wird.

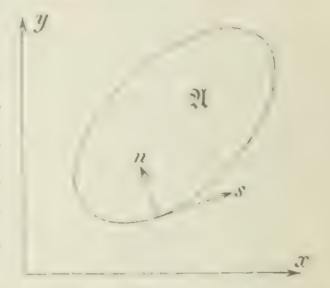
Lässt man eine gerade Linie um ihren *festen Ausgangspunkt* in solcher Weise rotiren, dass sie dabei beständig in der Horizontalebene bleibt, so soll diese Rotationsbewegung eine *positive* genannt werden, sobald die einzelnen Punkte der Linie um jenen festen Punkt in positiver Richtung herumlaufen. Hieran schliesst sich unmittelbar eine gewisse Festsetzung, die wir in Betreff des auf der Hori-

zontalebene anzunehmenden Coordinatensystems machen; es ist folgende:

Das Coordinatensystem soll stets der Art beschaffen gedacht werden,
(2.) *dass die x-Axe einen Winkel von 90^0 zu beschreiben hat, falls sie durch eine* positive *Rotation um den Anfangspunkt in die Lage der y-Axe gelangen will.*

Man kann übrigens nachträglich diese Festsetzung auch so einkleiden: *Die beiden Axen des Coordinatensystems sollen stets so zu einander*
(3.) *liegen, dass der im Anfangspunkt auf der oberen Seite der Fläche Stehende und in der Richtung der x-Axe Fortsehende die y-Axe mit ausgestreckter* Linken *markirt* *).

Ganz analog ist diejenige Beziehung, welche [nach (1.)] bei einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ zwischen der positiven Randrichtung s und der auf diesem Rande errichteten innern Normale n stattfindet. Denn der auf der obern Seite der Fläche Stehende und in der positiven Richtung s ihres Randes Fortsehende hat ja ebenfalls die Fläche selber, mithin auch die auf dem Rande errichtete innere Normale n zur Linken. Also der Satz:



Versteht man bei irgend einer Fläche unter s die positive Richtung
(4.) *des Randes, ferner unter n die auf dem Rande errichtete innere Normale, so liegt jederzeit s zu n wie x zu y, d. i. wie die x-Axe zur y-Axe.*

Die meisten der hier angestellten Betrachtungen und Festsetzungen sind unmittelbar übertragbar auf den Fall *krummer Flächen*, wobei jedesmal vorauszusetzen ist, dass eine bestimmte Seite der gegebenen krummen Fläche als *obere Seite* bezeichnet wird. Nimmt man z. B. (wie später stets geschehen wird) bei der Kugelfläche die Aussenseite zur *obern Seite*, so wird unter der *positiven* Umlaufung einer gegebenen Kugelcalotte diejenige zu verstehen sein, in welcher man auf dieser äussern oder obern Seite den Rand der

*) Fügt man schliesslich zu diesen beiden Axen x und y als dritte Axe, nämlich als z Axe, noch das im Anfangspunkt auf der *oberen* Seite der Fläche errichtete Perpendikel hinzu, so erhält man dasjenige Axensystem (x, y, z), welches zu Ende des vorhergehenden Paragraphen mittelst der linken Hand definirt worden ist.

Calotte zu durchwandern hat, falls man dabei die Calotte beständig zur *Linken* haben will.

§ 3.

Über gewisse Curven- resp. Rand-Integrale.

Auf der Horizontalebene sei ein bestimmtes Coordinatensystem x, y festgesetzt. Ferner seien $V = V(x, y)$ und $W = W(x, y)$ beliebig gegebene Functionen. Denkt man sich nun auf der Horizontalebene irgend eine Curve AB gezeichnet, so ist unter dem über diese Curve erstreckten Integral

$$\int_A^B W dV \tag{1.}$$

bekanntlich der Ausdruck zu verstehen:

$$W_{12}(V_2 - V_1) + W_{23}(V_3 - V_2) + \cdots\cdots + W_{\alpha\beta}(V_\beta - V_\alpha) + \cdots\cdots \tag{2.}$$

Dabei bezeichnen 1, 2, 3, 4 $\cdots\cdots$ α, β, $\cdots\cdots$ die auf einander folgenden Punkte der Curve. Was ferner die V_1, V_2, $\cdots\cdots$ und W_{12}, W_{23}, $\cdots\cdots$ betrifft, so ist unter V_p der Werth von V im Punkt p, andererseits unter W_{pq} der Werth von W in irgend einem Punkte *zwischen* p und q zu verstehen.

Bemerkung. Sind $V = V(x, y)$ und $W = W(x, y)$ längs der gegebenen Curve AB *eindeutig und stetig*, so hat das durch (1.) respective (2.) definirte Integral einen *bestimmten endlichen* Werth; wie man solches nach bekannten Methoden zu beweisen im Stande ist. Den Beweis dieses Satzes und ähnlicher Sätze hier wirklich mittheilen zu wollen liegt *ausserhalb* der Grenzen, welche der Verfasser im vorliegenden Werke sich gesteckt hat.

Man kann das Integral von WdV über die gegebene Curve nach Belieben entweder von A nach B, oder von B nach A erstrecken. Bezeichnet nun $\alpha\beta$ [vgl. die vorstehende Figur] ein beliebiges Element der Curve AB, so werden die allgemeinen Glieder dieser Integrale

$$\int_A^B W dV \quad \text{und} \quad \int_B^A W dV$$

respective lauten:

$$W_{\alpha\beta}(V_\beta - V_\alpha) \quad \text{und} \quad W_{\alpha\beta}(V_\alpha - V_\beta),$$

mithin *entgegengesetzte* Werthe haben. Hieraus folgt, dafs die beiden Integrale selber ebenfalls *entgegengesetzte* Werthe besitzen. Es ist also:

$$(3.) \qquad \int\limits_A^B W\,dV + \int\limits_B^A W\,dV = 0.$$

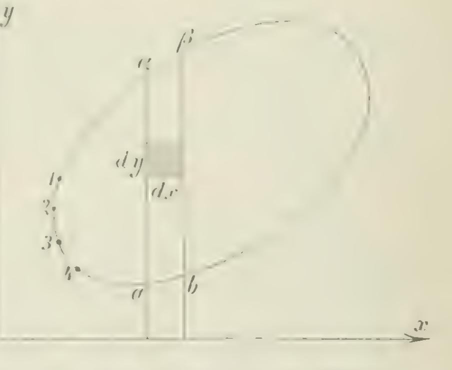
Wir wollen jetzt das Integral (1.) für den Fall einer näheren Untersuchung unterwerfen, dass die gegebene Integrationscurve AB eine in sich zurücklaufende ist. Und zwar werden wir hierbei zu Anfang voraussetzen, dass V identisch mit x oder y sei, nämlich mit folgender Aufgabe beginnen.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine auf der Horizontalebene beliebig gegebene Fläche, und $W = W(x, y)$ eine Function, die auf $\mathfrak{A}$ überall eindeutig und stetig ist. Es soll das über den Rand von $\mathfrak{A}$ in positiver Richtung hinerstreckte Integral

$$(4.) \qquad \int_{\mathfrak{A}} W\,dx = W_{12}(x_2 - x_1) + W_{23}(x_3 - x_2) + \cdots$$

untersucht werden.

Es seien a, α und b, β diejenigen Punkte, in denen der Rand der Fläche $\mathfrak{A}$ von irgend zwei zur y-Axe parallelen, und einander unendlich nahen Linien geschnitten wird. Der den beiden Elementen ab und $\beta\alpha$ entsprechende *Theil* des Integrales (4.) lautet alsdann:



$$(a.) \qquad T = W_{ab}(x_b - x_a) + W_{\alpha\beta}(x_\alpha - x_\beta).$$

Bezeichnet man nun den *positiven* Abstand der beiden Parallelen $a\alpha$ und $b\beta$ von einander mit dx, so ist offenbar $x_b - x_a = dx$, und ebenso $x_\beta - x_\alpha = dx$; so dass man erhält:

$$(b.) \qquad T = (W_{ab} - W_{\alpha\beta})\,dx.$$

W_{ab} ist der Werth von W in einem *beliebigen* Punkte zwischen a und b, und kann daher z. B. durch W_a ersetzt werden; ebenso $W_{\alpha\beta}$ durch W_α. Somit folgt:

$$(c.) \qquad T = (W_a - W_\alpha)\,dx, \text{ d. i. } = -(W_\alpha - W_a)\,dx.$$

Nun kann aber die Differenz $W_\alpha - W_a$, weil W auf $\mathfrak{A}$, mithin auch längs der Linie $a\alpha$ eindeutig und stetig ist, in folgender Weise dargestellt werden:

$$W_\alpha - W_a = \int\limits_a^\alpha \frac{\partial W}{\partial y}\,dy.$$

die Integration hinerstreckt über alle Elemente dy der Linie $a\alpha$. Somit folgt aus der Formel (c.):

$$(d.)\qquad T = -\int_a^\alpha \frac{\partial W}{\partial y}\, dx dy,$$

die Integration erstreckt über alle Flächenelemente $dxdy$ des zwischen $a\alpha$ und $b\beta$ gelegenen *Flächenstreifens*.

Denkt man sich in dieser Weise *sämmtliche* Theile T des Integrals (4.) berechnet, und all' diese Theile zusammenaddirt, so erhält man schliesslich für jenes Integral den Werth

$$(5.)\qquad \int_{\mathfrak{A}} W dx = -\iint_{\mathfrak{A}} \frac{\partial W}{\partial y}\, dx dy,$$

wo die Integration rechter Hand sich ausdehnt über alle *zur Fläche* $\mathfrak{A}$ gehörigen Flächenelemente $dxdy$.

Stillschweigend haben wir bei Ableitung dieser Formel (5.) vorausgesetzt, die Fläche $\mathfrak{A}$ besitze nur *eine* Randcurve, überdies auch noch vorausgesetzt, dass diese eine Randcurve von jedweder zur y-Axe parallelen Linie immer nur in *zwei* Punkten getroffen werde. Wie nun aber die Fläche $\mathfrak{A}$ auch beschaffen sein mag, stets wird man sie durch irgend welche Linien σ in kleinere Stücke zerlegen können, deren jedes jenen Voraussetzungen entspricht. Demgemäss wird also die Formel (5.) correct sein für jedes dieser einzelnen Flächenstücke. Addirt man aber alle so sich ergebenden Formeln zusammen, so wird man, weil [zufolge (3.)] die den Curven σ zugehörigen Integraltheile sich gegenseitig zerstören, wiederum zu einer Formel gelangen von der in (5.) angegebenen Gestalt. Also der Satz:

Ist die Function $W = W(x,y)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig, so gilt die Formel:

$$(6.)\qquad \int_{\mathfrak{A}} W dx = -\iint_{\mathfrak{A}} \frac{\partial W}{\partial y}\, dx dy,$$

wo die Integration links über sämmtliche Randcurven von $\mathfrak{A}$ und zwar über jede in ihrer positiven Richtung erstreckt ist, während die Integration rechts über sämmtliche Flächenelemente $dxdy$ der Fläche $\mathfrak{A}$ sich ausdehnt.

In ganz analoger Weise ergiebt sich nun andererseits auch folgende Formel:

$$(7.)\qquad \int_{\mathfrak{A}} W dy = +\iint_{\mathfrak{A}} \frac{\partial W}{\partial x}\, dx dy,$$

wobei über die Integrale links und rechts dasselbe zu bemerken ist, wie bei (6.).

Bemerkung. Das Integral linker Hand in der *vorletzten* Formel (6.) lautet:

$$J = \int_{\mathfrak{A}} W dx.$$

Dasselbe ist *positiv* hinerstreckt zu denken über den *ganzen* Rand der gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$, und wird also eine Summe von n Integralen sein, falls $\mathfrak{A}$ im Ganzen n Randcurven besitzt. Versteht man z. B. unter $\mathfrak{A}$ die schon früher besprochene ringförmige Fläche, welche in beistehender Figur von Neuem dargestellt ist, so wird jenes J eine Summe *zweier* Integrale sein, deren eines über die äussere Randcurve in der Richtung s, und deren anderes über die innere Randcurve in der zu s' entgegengesetzten Richtung σ hinläuft.

Genau dasselbe gilt von dem Integral linker Hand in der *letzten* Formel (7.).

Genügen $U = U(x, y)$ und $V = V(x, y)$ den an W gestellten Anforderungen, so ist nach (6.) und (7.):

$$\int_{\mathfrak{A}} U dx = -\iint_{\mathfrak{A}} \frac{\partial U}{\partial y} dx dy,$$

$$\int_{\mathfrak{A}} V dy = +\iint_{\mathfrak{A}} \frac{\partial V}{\partial x} dx dy,$$

und folglich

$$\int_{\mathfrak{A}} (U dx + V dy) = -\iint_{\mathfrak{A}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) dx dy.$$

Demgemäss erhalten wir folgenden Zusatz:

Sind die Functionen $U = U(x, y)$ und $V = V(x, y)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig, und setzt man überdies voraus, dass der Ausdruck

$$(8.) \qquad U dx + V dy$$

ein vollständiges Differential sei, dass mithin U und V der Bedingung $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}$ entsprechen, so wird das über sämmtliche Randcurven von $\mathfrak{A}$ in positiver Richtung erstreckte Integral

$$(9.) \qquad \int_{\mathfrak{A}} (U dx + V dy) \text{ stets } = 0 \text{ sein.}$$

Wir wollen jetzt annehmen $U = U(x, y)$ und $V = V(x, y)$ wären von solcher Beschaffenheit, dass nicht nur U, V selber, son-

dern auch $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial y}$ auf $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig sind. Alsdann können wir die Formel (6.) z. B. anwenden auf $W = U\frac{\partial V}{\partial x}$, ebenso (7.) auf $W = U\frac{\partial V}{\partial y}$, und erhalten hierdurch:

$$\int_{\mathfrak{A}} U\frac{\partial V}{\partial x}\,dx = -\iint_{\mathfrak{A}} \left(\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x} + U\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right) dx\,dy,$$

$$\int_{\mathfrak{A}} U\frac{\partial V}{\partial y}\,dy = +\iint_{\mathfrak{A}} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} + U\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right) dx\,dy,$$

mithin durch Addition:

$$\int_{\mathfrak{A}} U\,dV = \iint_{\mathfrak{A}} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right) dx\,dy.$$

Also der Satz:

Sind die Functionen $U = U(x, y)$ und $V = V(x, y)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig, und gilt Gleiches auf $\mathfrak{A}$ auch von $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial y}$, so findet die Formel statt:

$$\int_{\mathfrak{A}} U\,dV = \iint_{\mathfrak{A}} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right) dx\,dy, \tag{10.}$$

wobei über die Integrationen links und rechts dasselbe zu wiederholen ist, wie bei (6.).

§ 4.

Die complexen Grössen.

Sind x, y *reelle* Grössen und ist $i = \sqrt{-1}$, so heisst $(x + iy)$ eine *complexe* Grösse. Gleichzeitig heissen alsdann x und y die beiden Componenten dieser complexen Grösse. Die complexen Grössen begreifen als specielle Fälle in sich sowohl die *reellen*, wie die *rein imaginären* Grössen. In der That reducirt sich der Ausdruck $(x + iy)$ für $y = 0$ auf das *reelle* x, und für $x = 0$ auf das *rein imaginäre* iy.

Sind irgend zwei complexe Grössen $(x + iy)$ und $(x_1 + iy_1)$ einander gleich, so folgt daraus, dass ihre Componenten *einzeln* einander gleich sind. Denn aus

$$x + iy = x_1 + iy_1$$

ergiebt sich: $(x - x_1) = i(y_1 - y)$, oder, falls man zum Quadrat erhebt:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = 0.$$

Und hieraus folgt, weil x, y, x_1, y_1 *reell* sein sollen, sofort:

$$x = x_1 \text{ und } y = y_1. \quad Q.\ e.\ d.$$

Zwei complexe Grössen können also nur dann einander gleich sein, wenn ihre Componenten einzeln einander gleich sind. Mit andern Worten: *Ist der Werth einer complexen Grösse $z = (x + iy)$ gegeben, so sind hierdurch die Werthe ihrer beiden Componenten x und y bereits mitbestimmt.* Umgekehrt wird, wenn x und y gegeben sind, hierdurch auch der Werth von $z = (x + iy)$ bestimmt sein. Demgemäfs kann man jede complexe Grösse $z = (x + iy)$ geometrisch durch einen Punkt darstellen, dessen Coordinaten x und y sind.

§ 5.

Functionen eines complexen Argumentes.

Ist irgend eine Function zweier Argumente:

$$F = F(x, y)$$

gegeben, so kann dieselbe stets als Function *eines einzigen* Argumentes angesehen werden. Setzt man nämlich

$$z = x + iy, \text{ wo } i = \sqrt{-1},$$

so werden durch Angabe des Werthes von z die Werthe von x und y, und folglich auch der Werth von F bereits *mitbestimmt* sein; sodass also F lediglich von z abhängt.

Dabei ist indessen stillschweigend vorausgesetzt, x und y seien *reelle* Variablen. Denn denkt man sich x und y als *complexe* Grössen, so sind offenbar durch Angabe des Werthes von $z = x + iy$ die Werthe von x und y noch *keineswegs* mitbestimmt.

Wir wollen nun in der That für x und y irgendwelche *complexe* Grösse $\xi = x + ix_1$ und $\eta = y + iy_1$ substituiren und folgende Frage uns vorlegen: *Welche Beschaffenheit muss die Function*

$$F = F(\xi, \eta) = F(x + ix_1, y + iy_1)$$

besitzen, wenn dieselbe nur von dem einen Argument $(\xi + i\eta)$ *abhängen soll?*

Giebt man den complexen Variablen ξ, η irgend welche Zuwüchse $d\xi$, $d\eta$, so lautet der correspondirende Zuwachs von F:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta,$$

oder, ein wenig anders geschrieben:

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} + i\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)\frac{d\xi - i d\eta}{2} + \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} - i\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)\frac{d\xi + i d\eta}{2}.$$

Soll nun F nur von dem Binom $(\xi + i\eta)$ abhängen, so muss dF stets $= 0$ sein, so lange dieses Binom ungeändert bleibt, also stets $= 0$ sein, so lange $(d\xi + i d\eta) = 0$ bleibt. Dieser Anforderung

aber wird offenbar, wie die vorstehende Formel zeigt, nur dann entsprochen werden, wenn F der Bedingung Genüge leistet:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} + i\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0.$$

Somit gelangen wir zu folgendem Resultat:

Theorem. — *Sind ξ und η complexe Variable, so wird eine Function von der Form:*

$$F = F(\xi, \eta) \tag{1.}$$

stets und nur dann eine Function von $(\xi + i\eta)$ sein, wenn sie der Bedingung entspricht:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} + i\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0.$$

Solches constatirt, gehen wir jetzt erst zu dem Fall zweier *reellen* Argumente x, y über, indem wir dabei folgende, durch ihre Einfachheit sich empfehlende Definition an die Spitze stellen:

Definition. — *Sind x und y zwei reelle Variable, so soll jede Function von der Form*

$$F = F(x, y) \tag{2.}$$

eine Function von $(x + iy)$ genannt werden, sobald ihre Beschaffenheit von solcher Art ist, dass sie diesen Namen verdient bei unumschränkter, d. i. complexer Variabilität von x und y.

Uebrigens kann man dieser Definition, auf Grund des Theorems (1.), auch folgende Fassung geben:

Dieselbe Definition in etwas anderer Form. — *Sind x und y zwei reelle Variable, so soll eine Function von der Form*

$$F = F(x, y) \tag{3.}$$

stets und nur dann eine Funktion von $(x + iy)$ genannt werden, wenn sie der Bedingung Genüge leistet:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Etwas stärker accentuirt als diese Riemann'sche Ausdrucksweise ist die Cauchy'sche, von der hin und wieder ebenfalls Gebrauch gemacht werden soll. Cauchy bezeichnet nämlich Functionen von $(x + iy)$, genau in demselben Sinne wie sie hier definirt sind, als monogene Functionen von $(x + iy)$.

Beispiele. — Dass Ausdrücke, wie

$$\sin(x + iy), \quad \cos(x + iy), \quad e^{x+iy}, \quad \log(x + iy) \text{ etc. etc.}$$

als Functionen von $(x + iy)$, oder nach Cauchy als *monogene* Functionen von $(x + iy)$ zu bezeichnen sind, unterliegt nach diesen Definitionen [vgl. namentlich (2.)] keinem Zweifel.

Hingegen wird ein Ausdruck von der Form

$$F = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

wo A, B, C Constante sind, im Allgemeinen *keine* monogene Function von $(x + iy)$ sein. Soll der Ausdruck auf diesen Namen Anspruch erhalten, so muss noch (3.) die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

d. i. die Bedingung:

$$(Ax + By) + i(Bx + Cy) = 0,$$

d. h. es mufs

$$A + iB = 0 \quad \text{und} \quad B + iC = 0,$$

mithin

$$B = iA \quad \text{und} \quad C = iB = -A$$

sein. Alsdann aber nimmt F die Gestalt an:

$$F = A(x^2 + 2ixy - y^2), \text{ d. i. } = A(x + iy)^2,$$

also in der That die Gestalt einer *monogenen* Function.

Es sei F irgend eine gegebene *Function von* $(x + iy)$, oder, nach der Cauchy'schen Nomenclatur, eine *monogene Function von* $(x + iy)$; so dass also [vgl. (3.)] die Gleichung stattfindet:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{4.}$$

Wir wollen nun annehmen, es sei gelungen, diese Function in die Form zu versetzen:

$$F = U + iV, \tag{5.}$$

wo $U = U(x, y)$ und $V = V(x, y)$ irgend welche reelle Functionen der reellen Variablen x, y vorstellen. Substituirt man diesen Werth (5.) in (4), so folgt:

$$\frac{\partial(U + iV)}{\partial x} + i\frac{\partial(U + iV)}{\partial y} = 0, \tag{6.}$$

oder, was dasselbe ist:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0. \tag{7.}$$

Und hieraus folgt weiter

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \tag{8.}$$

Also der Satz: *Gelingt es, eine von* $(x + iy)$ *abhängende Function* F, *oder, schärfer ausgedrückt, eine monogene Function* F *von* $(x + iy)$ *in die Form zu versetzen:*

$$F = U + iV, \tag{9.}$$

wo $U = U(x, y)$ *und* $V = V(x, y)$ *irgend welche reelle Functionen der reellen Variablen* x, y *vorstellen, so werden diese* U, V *stets den*

beiden Differentialgleichungen Genüge leisten:

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad und \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \tag{9.a}$$

Beispiele. — Setzt man:

$$F = (x + iy)^2, \text{ d. i. } = [x^2 - y^2] + i\,[2xy], \tag{A.}$$

so ist offenbar $U = x^2 - y^2$ und $V = 2xy$. Und diese beiden Functionen entsprechen in der That den beiden Gleichungen (9.a).

Setzt man ferner, indem man unter a und b irgend zwei reelle Constanten versteht:

$$F = (a + ib)\,(x + iy)^2, \text{ d. i. } (a + ib)\,([x^2 - y^2] + i\,[2xy]), \tag{B.}$$

oder, was dasselbe ist:

$$F = [a(x^2 - y^2) - b\,(2xy)] + i\,[b(x^2 - y^2) + a\,(2xy)],$$

so ist offenbar:

$$U = a\,(x^2 - y^2) - 2bxy,$$
$$V = b\,(x^2 - y^2) + 2axy.$$

Und man überzeugt sich leicht davon, dass diese Ausdrücke U, V den Gleichungen (9.a) entsprechen.

Setzt man ferner

$$F = \sin\,(x + iy), \tag{C.}$$

so erhält man:

$$U = \tfrac{1}{2}\left(e^{y} + e^{-y}\right)\sin x,$$
$$V = \tfrac{1}{2}\left(e^{y} - e^{-y}\right)\cos x,$$

d. i. Ausdrücke, die wiederum den Gleichungen (9.) entsprecheu.

Man kann den letzten Satz auch *umkehren*. Entsprechen nämlich irgend zwei Functionen $U = U(x,y)$ und $V = V(x,y)$ den beiden Gleichungen (8.), so folgt hieraus, indem man rückwärts von (8.) zu (7.) zu (6.) geht:

$$\frac{\partial\,(U + iV)}{\partial x} + i\,\frac{\partial\,(U + iV)}{\partial y} = 0,$$

also, falls man $(U + iV)$ mit F bezeichnet:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + i\,\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Zufolge der Definition (3.) ist daher dieses F eine *Function von* $(x + iy)$. Also der Satz:

Sind $U = U(x,y)$ und $V = V(x,y)$ irgend welche reelle Functionen der reellen Variablen x, y, und weiss man, dass diese Functionen den beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad und \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{10.}$$

Genüge leisten, so wird das Binom

$$F = U + iV$$

eine Function von $(x + iy)$, *oder, schärfer ausgedrückt, eine monogene Function von* $(x + iy)$ *sein.*

Nachträgliches. — Abweichend von der in (2.), (3.) adoptirten Bezeichnungsweise, könnte man, falls x, y *reelle* Variable sind, *jedwede* Function derselben

$$F = F(x, y) \tag{11.}$$

als eine allein von $(x + iy)$ abhängende Function auffassen, wie solches sich ergiebt auf Grund der zu Anfang dieses Paragraphs angestellten einfachen Ueberlegung.

Und dies ist in der That die *Cauchy*'sche Auffassungsweise. *Cauchy nennt nämlich jedwede Function* $F(x, y)$, *von welcher Beschaffenheit sie auch sein mag, eine Function von* $(x + iy)$, *und unterscheidet dabei, je nachdem dieselbe der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{12.}$$

Genüge leistet oder nicht, *zwei Fälle. Im erstern Falle nennt er die Function, wie bei* (3.) *schon bemerkt wurde,* monogen, *im letztern* nichtmonogen.

Um auf die betreffenden Cauchy'schen Betrachtungen näher einzugehen, markiren wir auf der Horizontalebene den Punkt z und irgend einen Nachbarpunkt $z + dz$, d. i. diejenigen Punkte

$$z = x + iy \quad \text{und} \quad z + dz = (x + dx) + i(y + dy),$$

deren Coordinaten x, y und $(x + dx)$, $(y + dy)$ sind, und bilden sodann den Differentialquotienten

$$\frac{dF}{dz}.$$

Der Zähler dF dieses Quotienten repräsentirt den Unterschied derjenigen beiden Werthe F und $F + dF$, welche die betrachtete Function $F(x, y)$ in jenen beiden Punkten z und $z + dz$ besitzt, und drückt sich also aus durch die Formel:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy,$$

oder, was dasselbe ist, durch die Formel:

$$dF = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right)(dx + idy) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right)(dx - idy).$$

Hieraus folgt, falls man durch $dz = (dx + idy)$ dividirt:

$$\frac{dF}{dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right)\left[\frac{dx - idy}{dx + idy}\right].$$

Der hier in der eckigen Klammer enthaltene Bruch hat aber eine einfache geometrische Bedeutung. Bezeichnet man nämlich die Polarcoordinaten des Punktes $z + dz$ in Bezug auf den Punkt z mit ϱ und ϑ, so ist

$$\begin{cases} dx = \varrho \cos \vartheta, \\ dy = \varrho \sin \vartheta, \end{cases}$$

mithin

$$\begin{cases} dx + idy = \varrho e^{i\vartheta}, \\ dx - idy = \varrho e^{-i\vartheta}, \end{cases}$$

sodafs also jener Bruch $= e^{-2i\vartheta}$ wird. Somit erhält man:

$$\frac{dF}{dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right)e^{-2i\vartheta}. \tag{13.}$$

Der Differentialquotient $\frac{dF}{dz}$ dependirt also nicht nur von dem eigentlich betrachteten Punkte $z = (x + iy)$, sondern hängt überdies auch von dem *Azimuth* ϑ des bei seiner Bildung benutzten *Nachbarpunktes* ab, und wird daher, je nach der zufälligen Wahl dieses Nachbarpunktes, jedesmal einen andern, im Ganzen also *unendlich viele* Werthe besitzen; es sei denn, dass der in (13.) im letzten Gliede enthaltene Ausdruck

$$\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}$$

$= 0$ wäre. Denn in diesem Falle reducirt sich der Ausdruck (13.) auf

$$\frac{dF}{dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right), \tag{14.}$$

d. i. auf einen von ϑ *unabhängigen* Ausdruck. Man gelangt daher, mit Rücksicht auf die in (12.) gegebene Definition, zu folgendem Satz:

Ist die vorgelegte Function

$$F = F(x, y)$$

eine monogene Function von $(x + iy)$ *und setzt man* $(x + iy) = z$, *so wird der Differentialquotient*

$$\frac{dF}{dz} \tag{15.}$$

*unabhängig sein von der Wahl des bei seiner Bildung angewandten Nachbarpunktes $z + dz$**).

Ist hingegen jene Function eine n i c h t m o n o g e n e *Function von* $(x + iy)$ *oder* z, *so wird der genannte Differentialquotient wesentlich abhängen von dem* A z i m u t h *des Nachbarpunktes* $z + dz$, *also von derselben unendlichen Vieldeutigkeit sein, wie dieses Azimuth.*

Man kann also, falls man will, die Eintheilung der Functionen $F = F(x, y)$ in *monogene* und *nichtmonogene* basiren auf das Verhalten des Differentialquotienten $\frac{dF}{dz}$. Und thut man dies, so erhält man die *eigentliche Cauchy'sche Definition* dieser Begriffe.

§ 6.

Ueber Curven-Integrale solcher Functionen, die von einem complexen Argument abhängen.

Unter dem über eine gegebene Curve AB erstreckten Integral

$$\int_A^B W dV$$

haben wir [pg. 5] den Ausdruck verstanden:

$$W_{12}(V_2 - V_1) + W_{23}(V_3 - V_2) \ldots$$
$$+ W_{\alpha\beta}(V_\beta - V_\alpha) + \ldots.$$

Demgemäss wird, falls irgend zwei von

$$z = (x + iy)$$

abhängende Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ gegeben sind, unter dem über die Curve AB erstreckten Integral

$$\int_A^B f(z)\, d\varphi(z) \tag{1.}$$

folgender Ausdruck zu verstehen sein:

$$f_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + f_{23}(\varphi_3 - \varphi_2) \ldots + f_{\alpha\beta}(\varphi_\beta - \varphi_\alpha) + \ldots, \tag{2.}$$

wo die Indices dieselbe Bedeutung haben sollen wie früher [p. 5].

*) Es würde nicht correct sein, zu sagen, dass $\frac{dF}{dz}$ (in diesem Falle der *monogenen* Function) in jedwedem Punkte z immer nur *einen* Werth habe. Denn es kann z. B.

$$F = \sqrt{x + iy} = \sqrt{z}$$

sein. Und dann wird $\frac{dF}{dz}$, ebenso wie F selber, in jedem Punkte z *zwei* Werthe besitzen.

Für ein solches Integral gilt wiederum [vgl. (3.) p. 6] die Formel:

$$\int_A^B f(z)\,d\varphi(z) + \int_B^A f(z)\,d\varphi(z) = 0. \tag{3.}$$

D. h. das Integral besitzt entgegengesetzte Werthe, wenn man dasselbe über eine gegebene Curve AB das eine Mal von A nach B, das andere Mal umgekehrt von B nach A erstreckt.

Man kann sich die Aufgabe stellen, ein solches Integral, falls die Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ nebst der Curve gegeben sind, wirklich zu berechnen. Und hierbei wird es angemessen sein, mit folgendem einfachen Beispiele zu beginnen.

In der Horizontalebene sei eine Kreisfläche $\mathfrak{C}$ gegeben vom Radius R und mit dem Mittelpunkt $c = (a + ib)$. Die peripherischen Punkte derselben mögen mit $z = (x + iy)$ bezeichnet werden. Es soll das in positiver Richtung über den Rand dieser Kreisfläche erstreckte Integral

$$J = \int_{\mathfrak{C}} (z - c)^n dz \tag{4.}$$

berechnet werden. Und zwar sei n eine gegebene *positive oder negative ganze Zahl.*

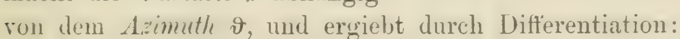
Bezeichnet man die Polarcoordinaten des Punktes $z = (x + iy)$ in Bezug auf den Mittelpunkt $c = (a + ib)$ mit R, ϑ [wo R den Radius der Kreisfläche vorstellt], so ist offenbar:

$$x - a = R \cos \vartheta,$$

$$y - b = R \sin \vartheta,$$

folglich:

$$z - c = Re^{i\vartheta}. \tag{5.}$$



Diese Formel (5.), in welcher c, R gegebene *Constanten* sind, macht die *Variable* z abhängig von dem *Azimuth* ϑ, und ergiebt durch Differentiation:

$$dz = iRe^{i\vartheta} d\vartheta. \tag{5a.}$$

Substituirt man jetzt die Werthe (5.), (5a.) in (4.), so erhält man:

$$J = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{(n+1)i\vartheta} d\vartheta. \tag{6.}$$

Denn es sollte die Integration positiv erstreckt werden über den gan-

zen Rand der Kreisfläche; so dass also die dem Azimuth ϑ entsprechenden Integrationsgrenzen in der That $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 2\pi$ sind.

Durch wirkliche Ausführung der Integration ergiebt sich nun:

$$J = R^{n+1} \frac{e^{(n+1)2\pi i} - 1}{n+1}. \tag{7.}$$

Hieraus folgt sofort, dass $J = 0$ ist, *ausser* für $n = -1$. Denn für $n = -1$ nimmt der Ausdruck (7.) die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an.

Am einfachsten erledigt sich dieser Ausnahmefall mittelst der früheren Formel (6.). Diese nämlich giebt für $n = -1$:

$$J = i\int_0^{2\pi} d\vartheta, \quad \text{d. i.} \quad J = 2\pi i. \tag{7a.}$$

Also der Satz: *Beschreibt man um einen Punkt c eine Kreisfläche* $\mathfrak{C}$ *von beliebigem Radius, bezeichnet man ferner die peripherischen Punkte dieser Fläche mit z, und versteht man endlich unter n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, so wird das über den Rand der Kreisfläche in positiver Richtung erstreckte Integral*

$$\int_{\mathfrak{C}} (z - c)^n dz \quad \textit{stets} \quad = 0 \tag{8.}$$

sein, ausser wenn $n = -1$ ist. Für diesen Ausnahmefall ergiebt sich die Formel:

$$\int_{\mathfrak{C}} (z - c)^{-1} dz = 2\pi i, \quad \textit{d. i.} \quad \int_{\mathfrak{C}} \frac{dz}{z - c} = 2\pi i. \tag{8a.}$$

Uebrigens repräsentiren diese Formeln nur specielle Fälle von viel allgemeineren Formeln, die man *Cauchy* verdankt und zu deren Ableitung wir im folgenden Paragraph uns hinwenden wollen.

§ 7.

Die Cauchy'schen Theoreme.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine in der Horizontalebene beliebig gegebene Fläche, die also z. B. beliebig viele Randcurven besitzen kann. Ferner sei $f = f(z)$ eine monogene Function von $z = (x + iy)$, welche auf $\mathfrak{A}$ allenthalben *eindeutig und stetig* ist. Denkt man sich also diese Function durch Sonderung des Reellen und Imaginären in die Form versetzt:

$$f = f(z) = U + iV,$$

so werden $U = U(x, y)$ und $V = V(x, y)$ Functionen sein, die ebenfalls auf $\mathfrak{A}$ *eindeutig und stetig* sind. Ueberdies werden dieselben [Satz p. 12] den Gleichungen Genüge leisten:

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

so dass also die Ausdrücke

$$Udy + Vdx \quad \text{und} \quad Udx - Vdy$$

vollständige Differentiale sind. Demgemäss sind [Satz p. 8] die über sämmtliche Randcurven von $\mathfrak{A}$ in positiver Richtung erstreckten Integrale

$$\int_{\mathfrak{A}} (Udy + Vdx) \quad \text{und} \quad \int_{\mathfrak{A}} (Udx - Vdy)$$

beide $= 0$. Nun ist aber:

$$f(z)dz = (U + iV)(dx + idy) = (Udx - Vdy) + i(Udy + Vdx),$$

mithin

$$\int_{\mathfrak{A}} f(z)dz = \int_{\mathfrak{A}} (Udx - Vdy) + i\int_{\mathfrak{A}} (Udy + Vdx);$$

und die hier auf der rechten Seite befindlichen Integrale sind diejenigen, von denen soeben nachgewiesen wurde, dass sie $= 0$ sind. Somit folgt:

$$\int_{\mathfrak{A}} f(z)dz = 0.$$

Also der Satz: *Ist eine monogene Function $f(z)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig, so wird das über sämmtliche Randcurven von $\mathfrak{A}$ in positiver Richtung erstreckte Integral*

$$\int_{\mathfrak{A}} f(z)dz \quad \textit{stets} \quad = 0 \tag{9.}$$

sein. Aus diesem Satz ergiebt sich z. B. als ganz specieller Fall die frühere Formel (8.), vorausgesetzt, dass man dem dortigen n einen der Werthe 0, 1, 2, 3 . . . beilegt.

Hält man fest an den über $\mathfrak{A}$ und $f(z)$ gemachten Voraussetzungen und versteht man überdies unter $c = (a + ib)$ irgend einen festen Punkt *innerhalb* $\mathfrak{A}$, so wird der Satz auf die Function

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - c} \tag{1.}$$

nicht mehr anwendbar sein. Denn diese Function ist im Punkte c unendlich gross, also *unstetig*. Beschreibt man aber um c eine kleine, völlig innerhalb $\mathfrak{A}$ liegende Kreisfläche $\mathfrak{C}$, und bezeichnet man das von $\mathfrak{A}$, nach Absonderung dieser Kreisfläche $\mathfrak{C}$, noch übrig bleibende Stück mit $\mathfrak{A}'$:

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - \mathfrak{C},$$

so wird $\varphi(z)$ auf dieser *neuen* Fläche $\mathfrak{A}'$ *allenthalben eindeutig und*

stetig sein. Auf diese *neue* Fläche $\mathfrak{A}'$ und die Function $\varphi(z)$ ist daher der vorhergehende Satz sofort anwendbar, wodurch sich ergiebt:

$$\int_{\mathfrak{A}'} \varphi(z)\,dz = 0, \tag{2.}$$

die Integration positiv erstreckt über sämmtliche Randcurven von $\mathfrak{A}'$. Diese Curven bestehen aber aus den Randcurven der ursprünglichen Fläche $\mathfrak{A}$ und überdies aus dem Rande von $\mathfrak{C}$. Und zwar wird man bei einer *positiven* Umlaufung von $\mathfrak{A}'$ die Randcurven von $\mathfrak{A}$ in ihren *positiven* Richtungen, hingegen die Randcurve der Kreisfläche $\mathfrak{C}$ in ihrer *negativen* Richtung zu durchwandern haben. Demgemäfs nimmt die Formel (2.) die Gestalt an:

$$\int_{\mathfrak{A}} \varphi(z)\,dz - \int_{\mathfrak{C}} \varphi(z)\,dz = 0, \tag{3.}$$

das eine Integral positiv erstreckt gedacht über den Rand von $\mathfrak{A}$, das andere ebenfalls positiv über den von $\mathfrak{C}$. Dabei ist Gebrauch gemacht von dem Satz (3.) p. 17.

Substituirt man in (3.) für $\varphi(z)$ seine eigentliche Bedeutung (1.), so erhält man:

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)\,dz}{z-c} = \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(z)\,dz}{z-c}, \tag{4.}$$

oder, falls man den Werth von $f(z)$, wie er bei Sonderung des Reellen und Imaginären sich herausstellt, mit

$$f(z) = U + iV \tag{5.}$$

bezeichnet:

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)\,dz}{z-c} = \int_{\mathfrak{C}} \frac{U\,dz}{z-c} + i\int_{\mathfrak{C}} \frac{V\,dz}{z-c}, \tag{6.}$$

oder, falls man für die Punkte z der Kreisperipherie [ebenso wie früher pg. 17] $z - c = Re^{i\vartheta}$, mithin $dz = iRe^{i\vartheta}d\vartheta$ setzt:

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)\,dz}{z-c} = i\left\{\int_0^{2\pi} U\,d\vartheta + i\int_0^{2\pi} V\,d\vartheta\right\}. \tag{7.}$$

Diese Formel bleibt richtig, wie klein man den Radius R der um c beschriebenen Kreisfläche $\mathfrak{C}$ auch wählen mag. Lässt man aber diesen Radius zu Null herabsinken, so verwandeln sich die beiden Integrale rechter Hand respective in $2\pi U_c$ und $2\pi V_c$, wo U_c und V_c die Werthe von U und V im Punkte c vorstellen. Somit erhält man also:

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)\,dz}{z-c} = 2\pi i\,(U_c + iV_c). \tag{8.}$$

oder mit Rüaksicht auf (5.):

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)dz}{z-c} = 2\pi i f(c). \tag{9.}$$

Erläuterung. — Das in (7.) enthaltene Integral

$$\int_0^{2\pi} U d\vartheta$$

erstreckt sich über den Rand der Kreisfläche $\mathfrak{C}$ und entspricht also, falls man den *kleinsten* und *grössten* Werth von U längs dieses Randes respective mit U' und U'' bezeichnet, der Formel:

$$U' \int_0^{2\pi} d\vartheta < \int_0^{2\pi} U d\vartheta < U'' \int_0^{2\pi} d\vartheta,$$

d. i. der Formel:

$$2\pi U' < \int_0^{2\pi} U d\vartheta < 2\pi U''.$$

Lässt man aber den Kreisradius R gegen 0 convergiren, so convergiren $2\pi U'$ und $2\pi U''$ beide gegen $2\pi U_c$. Gleiches gilt daher von dem *zwischen* diesen beiden Grössen liegenden Integral

$$\int_0^{2\pi} U d\vartheta.$$

Mit andern Worten: Dieses Integral nimmt, falls man R zu Null werden lässt, den Werth $2\pi U_c$ an.

In analoger Weise wird offenbar andrerseits auch das *letzte* Integral in (7.) behandelt werden können. U. s. w.

Auf Grund der Formel (9.) gelangen wir schliesslich zu folgendem Satz, der, ebenso wie der vorhergehende Satz [pg. 19], von *Cauchy* herrührt:

Ist eine monogene Function $f(z)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig, so lässt sich der Werth dieser Function in jedwedem Punkte c, der innerhalb $\mathfrak{A}$ liegt, durch folgendes Integral darstellen:

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)dz}{z-c}, \tag{10.}$$

die Integration positiv erstreckt über sämmtliche Randcurven von $\mathfrak{A}$. Dieser Satz ist also z. B. anwendbar auf $f(z) = z^n$, falls n eine positive ganze Zahl vorstellt, ebenso auf $f(z) = z^0 = 1$. Im letztern Falle ergiebt sich die Formel:

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{dz}{z-c}. \tag{11.}$$

Und diese ist identisch mit der früheren Formel (8a.), pg. 18.

Beiläufige Aufgabe. — Wir stellen uns die Aufgabe, diejenige monogene und auf $\mathfrak{A}$ eindeutige und stetige Function $f(z)$ zu ermitteln, welche längs des Randes von $\mathfrak{A}$ *constant*, etwa $= K$ ist. Zufolge des Satzes (10.) wird der Werth dieser Function in jedwedem Punkte c *innerhalb* $\mathfrak{A}$ lauten:

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}^{*} \frac{K\,dz}{z-c},$$

also nach (11.) sich so schreiben lassen:

$$f(c) = K.$$

Also der Satz: *Ist eine monogene Function $f(z)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig, und ist ihr Werth am Rande von $\mathfrak{A}$ constant, etwa $= K$, so wird sie auf der Fläche $\mathfrak{A}$ allenthalben $= K$ sein.* (12.)

Ferner ergiebt sich aus (10.), dass zwei Functionen $f(z)$ und $f_1(z)$, die auf $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig sind, und am *Rande* von $\mathfrak{A}$ *einerlei* Werthe haben, auch in jedwedem Punkte *innerhalb* $\mathfrak{A}$ *gleiche* Werthe besitzen werden.

§ 8.

Ueber die Differentialquotienten einer Function mit complexem Argument.

Durch Vertauschung der Buchstaben z und c geht die Formel (10.) über in:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}^{*} \frac{f(c)\,dc}{c-z}. \tag{13.}$$

Ist mithin $f(z)$ auf der Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig, so wird diese Formel (13.) gültig sein für jedweden Punkt z innerhalb $\mathfrak{A}$; und hierbei ist die Integration ausgedehnt zu denken über sämmtliche Randpunkte c der Fläche $\mathfrak{A}$.

Differenzirt man nun die Formel (13.) zu wiederholten Malen nach z, so folgt:

$$\frac{1}{1}f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}^{*} \frac{f(c)\,dc}{(c-z)^2},$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}f''(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}^{*} \frac{f(c)\,dc}{(c-z)^3}, \tag{14.}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}^{*} \frac{f(c)\,dc}{(c-z)^4},$$

etc. etc. etc.

Diese Formeln (14.) zeigen, dass $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$, etc. innerhalb $\mathfrak{A}$ *eindeutig und stetig* sind.

Also der Satz: *Ist eine Function $f(z)$ auf einer gegebenen Fläche*
(15.) *$\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig, so gilt Gleiches auf $\mathfrak{A}$ auch von ihren sämmtlichen Ableitungen $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$, etc. etc.*

Sind also $f(z)$ und $\varphi(z)$ auf $\mathfrak{A}$ *eindeutig und stetig*, so gilt [zufolge des soeben ausgesprochenen Satzes] Gleiches auch von $\varphi'(z)$, mithin z. B. auch von dem Product:

$$f(z)\varphi'(z).$$

Demgemäss ergiebt sich [Satz p. 19]:

$$\int_{\mathfrak{A}} f(z)\varphi'(z)dz = 0, \quad \text{d. i.} \quad \int_{\mathfrak{A}} f(z)d\varphi(z) = 0.$$

Also der Satz: *Sind $f = f(z)$ und $\varphi = \varphi(z)$ auf einer gegebenen Fläche eindeutig und stetig, so ist das über sämmtliche Randcurven von $\mathfrak{A}$ in positiver Richtung erstreckte Integral:*

(16.) $$\int_{\mathfrak{A}} f d\varphi \quad \textit{stets} \quad = 0.$$

Dieser Satz kann angesehen werden als eine Verallgemeinerung des früheren Satzes pg. 19.

§ 9.

Weitere Anwendung der Cauchy'schen Sätze.

Wir stellen uns folgende Aufgabe: Eine Function $f(z)$ sei auf der *unendlichen Ebene* allenthalben *eindeutig* und *stetig*. Auch sei bekannt, dass ihr Modul auf der unendlichen Ebene nirgends grösser als M ist, wo M eine *gegebene endliche* (positive) *Constante* vorstellt; was angedeutet sein mag durch die Formel:

(1.) $$\text{mod}\, f(z) \leq M.$$

Ausserdem sei *irgendwo* auf der unendlichen Ebene ein Punkt c markirt. Es soll der Werth der Function im Punkte c näher untersucht werden.

Wir beschreiben um den Anfangspunkt $z = 0$ eine Kreisfläche $\mathfrak{A}$, deren Radius R *beliebig gross* sein mag, mindestens aber so gross ist, dass der gegebene Punkt c innerhalb $\mathfrak{A}$ liegt. Da nun unsere Function $f(z)$ auf der ganzen unendlichen Ebene, mithin auch auf $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig sein soll, so wird sich ihr Werth im Punkte c, zufolge des Cauchy'schen Satzes [(10.) pg. 21], darstellen lassen durch die Formel:

$$(2.)\qquad f(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)\,dz}{z-c},$$

die Integration über den Rand von $\mathfrak{A}$ in positiver Richtung hinerstreckt gedacht. In gleicher Weise ergiebt sich mittelst jenes Satzes für den Werth der Function im Anfangspunkte $z = 0$, d. i. im Mittelpunkte der Kreisfläche $\mathfrak{A}$ die Formel:

$$(3.)\qquad f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)\,dz}{z}.$$

Durch Subtraction der beiden Formeln (2.), (3.) ergiebt sich weiter:

$$(4.)\qquad f(c) - f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{c\,f(z)\,dz}{z(z-c)}.$$

Hieraus aber folgt (mittelst des bekannten Satzes, dass der Modul einer Summe kleiner als die Summe der Moduln ist):

$$(5.)\qquad \text{mod}\,[f(c) - f(0)] < \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{A}} \frac{\text{mod}\,c\cdot\text{mod}\,f(z)\cdot\text{mod}\,dz}{\text{mod}\,z\cdot\text{mod}\,(z-c)}.$$

Nun ist:

$$(\alpha.)\qquad \begin{aligned} &\text{mod}\,c = r,\\ &\text{mod}\,z = R,\\ &\text{mod}\,(z-c) = \varrho,\\ &\text{mod}\,(dz) = ds, \end{aligned}$$

wo r, R, ϱ die in der nebenstehenden Figur angegebenen *Entfernungen* vorstellen, und wo ferner ds die *gegenseitige Entfernung* der beiden Randpunkte z und $z + dz$ vorstellt; so dass also dieses ds ein Element der Kreisperipherie bezeichnet. Ausserdem ist zufolge (1.)

$$(\beta.)\qquad \text{mod}\,f(z) < M.$$

Mittelst dieser Relationen $(\alpha.)$, $(\beta.)$ geht die Formel (5.) über in

$$(6.)\qquad \text{mod}\,[f(c) - f(0)] < \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{A}} \frac{r\,M\,ds}{R\varrho}.$$

Nach der geometrischen Anschauung [vgl. die Figur] ist aber:

$$r + \varrho \geqq R,$$

d. i.

$$\varrho \geqq R - r;$$

und hieraus folgt, weil sowohl ϱ als auch $(R - r)$ stets positiv sind, sofort:

$$\frac{1}{\varrho} \leqq \frac{1}{R-r}.$$

Dieser letzten Relation entsprechend, kann die Formel (6.) auch so geschrieben werden:

$$\text{mod}\,[f(c) - f(0)] < \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{A}} \frac{rM\,ds}{R(R-r)}, \tag{7.}$$

oder, weil r, R, M bei Ausführung der Integration *constant* bleiben, auch so:

$$\text{mod}\,[f(c) - f(0)] < \frac{rM}{2\pi R(R-r)} \cdot \int_{\mathfrak{A}} ds. \tag{8.}$$

Das hier auftretende Integral repräsentirt aber die Länge der Kreisperipherie, und ist also $= 2\pi R$. Somit folgt:

$$\text{mod}\,[f(c) - f(0)] < \frac{rM}{R-r}. \tag{9.}$$

Bei der hier angestellten Betrachtung konnte der Kreisradius R *beliebig gross* gewählt werden. Die Formel (9.) wird somit gültig bleiben, wenn wir das R weiter und weiter, ins Unendliche hin wachsen lassen. Demgemäss ergiebt sich:

$$\text{mod}\,[f(c) - f(0)] = 0, \tag{10.}$$

und folglich: $f(c) - f(0) = 0$, d. i.:

$$f(c) = f(0). \tag{11.}$$

Nun repräsentirt aber c einen zu Anfang unserer Betrachtung auf der Ebene *ganz beliebig* markirten Punkt. Demgemäss wird die Formel (11.) gültig sein, welche Lage wir diesem Punkte c in der Ebene auch zuertheilen mögen: und wir gelangen somit zu folgendem Satz:

Ist eine Function $f(z)$ auf der unendlichen Ebene überall eindeutig und stetig, und ist ausserdem bekannt, dass ihr Modul eine bestimmte endliche Grösse M nirgends übersteigt, so wird die Function eine Constante sein.

§ 10.

Aufstellung eines gewissen später erforderlichen Hülfssatzes.

Die Function $f(z)$ sei auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ *eindeutig und stetig*; so dass also [Satz pg. 23] Gleiches auch gilt von ihren Ableitungen: $f'(z)$, $f''(z)$, etc. Setzt man nun

$$f(z) = U + iV,$$

und beachtet zugleich die aus dieser Formel durch Differentiation nach x und y entspringenden Formeln:

$$f'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$i f'(z) = \frac{\partial U}{\partial y} + i\frac{\partial V}{\partial y},$$

so folgt aus jener *Eindeutigkeit und Stetigkeit* von $f(z)$ und $f'(z)$ sofort, dass diese beiden Eigenschaften den Functionen

$$U,\ V,\ \frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial V}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial V}{\partial y}$$

ebenfalls anhaften, und zwar in allen Punkten der gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$.

Zufolge des Satzes pg. 9 ist daher:

$$\int_{\mathfrak{A}} U dV = \iint_{\mathfrak{A}} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right) dx dy.$$

Beachtet man schliesslich die bekannten Relationen

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad [\text{Satz, pg. 12}],$$

und benutzt man dieselben, um im Integrale rechter Hand das V zu eliminiren, so gelangt man zu folgendem Satz:

Versteht man unter $f(z)$ eine Function, die auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig ist, und bezeichnet man den Werth dieser Function, wie er bei Sonderung des Reellen und Imaginären sich herausstellt, mit

$$f(z) = U + iV,$$

so ist jederzeit

$$\iint_{\mathfrak{A}} \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\} dx dy = \int_{\mathfrak{A}} U dV,$$

wo die Integration links über die Fläche, und die Integration rechts in positiver Richtung über den Rand von $\mathfrak{A}$ hinerstreckt ist.

Aus diesem Satz folgt sofort, dass der Werth des Integrals

$$\int_{\mathfrak{A}} U dV$$

niemals negativ sein kann, dass derselbe nämlich jederzeit entweder *positiv* oder *Null* ist.

Wir wollen annehmen, es trete der letztere Fall ein, es wäre also

$$\int_{\mathfrak{A}} U dV = 0, \tag{1.}$$

und es wäre demgemäss auch

$$\iint_{\mathfrak{A}} \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\} dx dy = 0. \tag{2.}$$

Dieses letztere Integral ist, weil die Werthe von $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ reell sind, eine aus unendlich vielen, und zwar aus lauter *positiven* Gliedern

zusammengesetzte Summe, und kann daher nur dann verschwinden, wenn alle diese Glieder *einzeln* genommen Null sind. Somit ergiebt sich aus der Gleichung (2.), dass

$$\frac{\partial U}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial U}{\partial y} \tag{3.}$$

auf der Fläche $\mathfrak{A}$ allenthalben gleich *Null* sein müssen. Und hieraus folgt mit Rücksicht auf die bekannten Relationen:

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \text{ und } \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

dass die Grössen

$$\frac{\partial V}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial V}{\partial y} \tag{4.}$$

auf der Fläche $\mathfrak{A}$ ebenfalls überall *Null* sein müssen. Aus dem Verschwinden der Grössen (3.) und (4.) ergiebt sich sodann aber augenblicklich, dass U und V auf der Fläche $\mathfrak{A}$ allenthalben *constant* sind. Somit gelangen wir zu folgendem Satz:

Ist die Function $f(z)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig, und bezeichnet man den Werth dieser Function, wie er bei Sonderung des Reellen und Imaginären sich herausstellt, mit

$$f(z) = U + iV,$$

so ist das in positiver Richtung um den Rand von $\mathfrak{A}$ herumerstreckte Integral

$$\int_{\mathfrak{A}} U dV \tag{5.}$$

jederzeit positiv oder Null.

Der letztere Fall, dass nämlich dieses Integral gleich Null ist, kann nur dann eintreten, wenn der Werth von $f(z)$ auf der Fläche $\mathfrak{A}$ allenthalben constant ist.

Zweites Capitel.

Entwicklung einer Function nach den Potenzen ihres Argumentes.

§ 1.

Entwicklung einer Function $f(z)$ nach Potenzen von z.

Die *Maclaurin*'sche und *Taylor*'sche Entwicklung sind, wie *Cauchy* gezeigt hat, unter gewissen Bedingungen und innerhalb gewisser Grenzen anwendbar auf Functionen eines *complexen* Argumentes. Die bewundernswerth einfachen und Epoche machenden Sätze, zu denen *Cauchy* in dieser Beziehung gelangt ist, sollen im gegenwärtigen und folgenden Paragraph näher dargelegt werden.

Die Cauchy-Maclaurin'sche Reihe. — Die Function $f(z)$ sei *eindeutig* und *stetig* auf einer um den Anfangspunkt $z = 0$ beschriebenen Kreisfläche $\mathfrak{C}$. Nach den früheren Sätzen [pg. 22] gelten alsdann für jedweden Punkt z innerhalb $\mathfrak{C}$ die Formeln:

$$(1.)\quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(c)\,dc}{c - z},$$

$$(2.)\quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(c)\,dc}{(c - z)^{n+1}}, \quad \text{wo } n = 1, 2, 3, \cdots$$

Und hieraus ergeben sich z. B. für den Mittelpunkt der Fläche, d. i. für den Punkt $z = 0$, folgende Formeln:

$$(1\text{a.})\quad f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(c)\,dc}{c},$$

$$(2\text{a.})\quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} f^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(c)\,dc}{c^{n+1}}, \quad \text{wo } n = 1, 2, 3, \cdots$$

In all diesen Formeln ist die Integration über den Rand der Kreisfläche $\mathfrak{C}$ in *positiver* Richtung zu erstrecken, also im Sinne des in

der Figur angegebenen Pfeiles. Ferner sind daselbst z und c Abbreviaturen für die Binome:

$$z = x + iy, \quad c = a + ib,$$

wo x, y und a, b die *rechtwinkligen Coordinaten* der betreffenden beiden Punkte vorstellen.

Führt man, statt dieser rechtwinkligen Coordinaten, die *Polarcoordinaten* ein, setzt man also:

$$x = r \cos \vartheta, \quad a = R \cos \Theta,$$
$$y = r \sin \vartheta, \quad b = R \sin \Theta,$$

so wird:

$$z = re^{i\vartheta}, \quad c = Re^{i\Theta}. \tag{3.}$$

Nun ist nach dem Binomischen Satz:

$$\frac{1}{R - r} = \frac{1}{R}\left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^3 + \cdots\right], \tag{4.}$$

und ebenso:

$$\frac{1}{Re^{i\Theta} - re^{i\vartheta}} = \frac{1}{Re^{i\Theta}}\left[1 + \left(\frac{re^{i\vartheta}}{Re^{i\Theta}}\right)^1 + \left(\frac{re^{i\vartheta}}{Re^{i\Theta}}\right)^2 + \cdots\right]. \tag{5.}$$

also mit Rücksicht auf (3.):

$$\frac{1}{c - z} = \frac{1}{c}\left[1 + \left(\frac{z}{c}\right)^1 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^3 + \cdots\right]. \tag{6.}$$

Und zwar werden diese Entwicklungen (4.), (5.), (6.) convergent und gültig sein, so lange $r < R$ bleibt, d. i. so lange der innere Punkt z *nicht hart an den Rand* der Fläche $\mathfrak{C}$ heranrückt. Substituirt man aber in (1.) für den Quotienten $\frac{1}{z - c}$ die Entwicklung (6.), so ergiebt sich:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}}\left[1 + \frac{z}{c} + \left(\frac{z}{c}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^3 + \cdots\right]\frac{f(c)dc}{c}. \tag{7.}$$

oder, was dasselbe ist:

$$f(z) = \mathsf{A}_0 + \mathsf{A}_1 z + \mathsf{A}_2 z^2 + \mathsf{A}_3 z^3 + \cdots. \tag{8.}$$

wo die A folgende Werthe haben:

$$\mathsf{A}_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}}\frac{f(c)dc}{c},$$
$$\mathsf{A}_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}}\frac{f(c)dc}{c^2}, \tag{8a.}$$
$$\mathsf{A}_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}}\frac{f(c)dc}{c^3},$$

etc. etc.

Diese Werthe lassen sich nach (1a.), (2a.) auch so darstellen:

$$\mathsf{A}_0 = f(0),$$

$$(8.b) \qquad \mathsf{A}_1 = \frac{1}{1} f'(0),$$

$$\mathsf{A}_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} f''(0),$$

etc. etc.

Also der Satz: *Ist die Function $f(z)$ auf einer um den Anfangspunkt $z = 0$ beschriebenen Kreisfläche $\mathfrak{C}$ eindeutig und stetig, so wird ihr Werth in jedem Punkte z innerhalb $\mathfrak{C}$ darstellbar sein durch eine nach steigenden Potenzen von z fortschreitende Reihe:*

$$(9.) \qquad f(z) = \mathsf{A}_0 + \mathsf{A}_1 z + \mathsf{A}_2 z^2 + \mathsf{A}_3 z^3 + \cdots$$

Die Werthe der hier auftretenden Coefficienten lassen sich in doppelter Weise ausdrücken, nämlich einerseits durch die Integrale (8.a), *andererseits durch die Differentialquotienten* (8.b). *Demgemäss kann also z. B. die Reihe auch so geschrieben werden:*

$$(10.) \qquad f(z) = f(0) + \frac{z}{1} f'(0) + \frac{z^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) + \cdots$$

oder auch so:

$$(11.) \qquad f(z) = [f(z)]_{z=0} + \frac{z}{1} \left[\frac{df(z)}{dz}\right]_{z=0} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} \left[\frac{d^2 f(z)}{dz^2}\right]_{z=0} + \cdots$$

Ob diese Formeln (9.), (10.), (11.) *auch noch gültig sind für solche Punkte z, die nicht innerhalb $\mathfrak{C}$, sondern hart am Rande von $\mathfrak{C}$ liegen, bleibt zweifelhaft.*

Bemerkung. — Die Integrale (8.a) bleiben in ihren Werthen *ungeändert*, wenn man sie nicht über den Rand von $\mathfrak{C}$, sondern über den Rand irgend einer Fläche $\mathfrak{F}$ erstreckt, die den Punkt $z = 0$ enthält, und vollständig innerhalb $\mathfrak{C}$ liegt. Bezeichnet man nämlich das von $\mathfrak{C}$, nach Absonderung dieser Fläche $\mathfrak{F}$, noch übrig bleibende *ringförmige Flächenstück* mit $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{C} - \mathfrak{F},$$

so ist die Function

$$\frac{f(z)}{z^n}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

auf $\mathfrak{R}$ überall *eindeutig* und *stetig*, und folglich [Satz p. 19]:

$$\int_{\mathfrak{R}} \frac{f(z)\,dz}{z^n} = 0,$$

die Integration positiv erstreckt über den Rand von $\mathfrak{R}$. Will man aber den Rand von $\mathfrak{R}$ positiv umlaufen, so hat man erstens den Rand von $\mathfrak{C}$ ebenfalls positiv, sodann aber den Rand von $\mathfrak{F}$ negativ zu durchwandern. Somit geht die letzte Formel über in:

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(z)\,dz}{z^n} - \int_{\mathfrak{F}} \frac{f(z)\,dz}{z^n} = 0. \quad Q. e. d.$$

Auch das *Restglied* der Reihe (9.) lässt sich auf dem hier eingeschlagenen Wege leicht finden, in folgender Weise: Für jede ganze Zahl n ist bekanntlich:

$$\frac{c^n - z^n}{c - z} = c^{n-1} + c^{n-2}z + c^{n-3}z^2 + \cdots + cz^{n-2} + z^{n-1},$$

oder, falls man durch c^n dividirt:

$$\frac{1 - \left(\frac{z}{c}\right)^n}{c - z} = \frac{1}{c} + \frac{z}{c^2} + \frac{z^2}{c^3} + \cdots + \frac{z^{n-2}}{c^{n-1}} + \frac{z^{n-1}}{c^n}.$$

oder, ein wenig anders geordnet:

$$\frac{1}{c - z} = \left(\frac{1}{c} + \frac{z}{c^2} + \frac{z^2}{c^3} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{c^n}\right) + \frac{\left(\frac{z}{c}\right)^n}{c - z}.$$

Substituirt man diesen Werth des Quotienten $\frac{1}{c - z}$ im Integral (1.), so nimmt jene Formel (1.) folgende Gestalt an:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \left[\left(\frac{1}{c} + \frac{z}{c^2} + \frac{z^2}{c^3} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{c^n}\right) + \frac{z^n}{(c - z)\, c^n}\right] f(c)dc,$$

oder, mit Rücksicht auf (8.a), folgende Gestalt:

$$f(z) = (\mathsf{A}_0 + \mathsf{A}_1 z + \mathsf{A}_2 z^2 + \cdots + \mathsf{A}_{n-1} z^{n-1}) + \Omega_n, \tag{12.}$$

wo Ω_n die Bedeutung hat:

$$\Omega_n = \frac{z^n}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(c)\,dc}{(c - z)\, c^n}. \tag{13.}$$

Und dieses Ω_n repräsentirt also das aufzustellende *Restglied*.

Die Laurent'sche Betrachtung. — Es seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ zwei concentrische, um $z = 0$ beschriebene Kreisflächen, und $\mathfrak{C}$ grösser als $\mathfrak{C}'$; ferner sei $\mathfrak{R}$ die zwischen den beiden Kreisperipherien liegende *ringförmige* Fläche:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{C} - \mathfrak{C}'.$$

Versteht man nun unter $f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ *eindeutige und stetige* Function, so wird nach dem Cauchy'schen Satz [pg. 22] der Werth dieser Function für jedweden auf $\mathfrak{R}$ liegenden Punkt z darstellbar sein durch die Formel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}} \frac{f(c)\,dc}{c - z}, \tag{14.}$$

die Integration positiv erstreckt über alle Randpunkte c der Fläche $\mathfrak{R}$. Will man aber den Rand von $\mathfrak{R}$ positiv durchlaufen, so hat man zuerst den Rand von $\mathfrak{C}$ ebenfalls positiv, sodann aber den

Rand von $\mathfrak{C}'$ negativ zu durchwandern. Die Formel (1.) kann daher so geschrieben werden:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int^{\circ}_{\mathfrak{C}} \frac{f(c)\,dc}{c - z} - \frac{1}{2\pi i}\int^{\circ}_{\mathfrak{C}'} \frac{f(c')\,dc'}{c' - z}, \tag{15.}$$

das eine Integral positiv erstreckt über die Randpunkte c der Fläche $\mathfrak{C}$, und ebenso das andere positiv erstreckt über die Randpunkte c' der Fläche $\mathfrak{C}'$.

Sind nun r, R, R' die Abstände der Punkte z, c, c' vom Mittelpunkte $z = 0$ der beiden Kreise (mithin R und R' die Radien der Kreise), so ist offenbar $R' < r < R$. Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich [vergl. (4.), (5.), (6.)]:

$$\frac{1}{c - z} = \frac{1}{c}\left[1 + \left(\frac{z}{c}\right)^1 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^3 + \cdots\right],$$

und andererseits:

$$\frac{1}{z - c'} = \frac{1}{z}\left[1 + \left(\frac{c'}{z}\right)^1 + \left(\frac{c'}{z}\right)^2 + \left(\frac{c'}{z}\right)^3 + \cdots\right].$$

Dies in (15.) substituirt, erhält man:

$$\begin{aligned} f(z) = {} & [\mathsf{A}_0 + \mathsf{A}_1 z + \mathsf{A}_2 z^2 + \mathsf{A}_3 z^3 + \cdots] \\ & + [\mathsf{A}'_0 z^{-1} + \mathsf{A}'_1 z^{-2} + \mathsf{A}'_2 z^{-3} + \mathsf{A}'_3 z^{-4} + \cdots], \end{aligned} \tag{16.}$$

wo die A, A' die Bedeutungen haben:

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_0 &= \frac{1}{2\pi i}\int^{\circ}_{\mathfrak{C}} \frac{f(c)\,dc}{c}, & \mathsf{A}'_0 &= \frac{1}{2\pi i}\int^{\circ}_{\mathfrak{C}'} f(c')\,dc', \\ \mathsf{A}_1 &= \frac{1}{2\pi i}\int^{\circ}_{\mathfrak{C}} \frac{f(c)\,dc}{c^2}, & \mathsf{A}'_1 &= \frac{1}{2\pi i}\int^{\circ}_{\mathfrak{C}'} f(c')\,c'\,dc', \\ \mathsf{A}_2 &= \frac{1}{2\pi i}\int^{\circ}_{\mathfrak{C}} \frac{f(c)\,dc}{c^3}, & \mathsf{A}'_2 &= \frac{1}{2\pi i}\int^{\circ}_{\mathfrak{C}'} f(c')\,c'^2\,dc', \\ & \text{etc. etc.} & & \text{etc. etc.} \end{aligned} \tag{17.}$$

Also der Satz: *Ist die Function $f(z)$ eindeutig und stetig auf einer ringförmigen Fläche $\mathfrak{R}$, die von zwei um den Anfangspunkt $z = 0$ beschriebenen Kreisperipherien begrenzt ist, so wird ihr Werth in jedem zwischen diesen beiden Peripherien liegenden Punkte z darstellbar sein durch die Reihe:*

$$\begin{aligned} f(z) = {} & [\mathsf{A}_0 + \mathsf{A}_1 z + \mathsf{A}_2 z^2 + \mathsf{A}_3 z^3 + \cdots] \\ & + [\mathsf{A}'_0 z^{-1} + \mathsf{A}'_1 z^{-2} + \mathsf{A}'_2 z^{-3} + \mathsf{A}'_3 z^{-4} + \cdots]. \end{aligned} \tag{18.}$$

Und zwar sind die Coefficienten A, A' dargestellt durch die Integrale (17.). *Von diesen Integralen laufen die einen positiv herum um die von der grösseren Peripherie begrenzte Kreisfläche $\mathfrak{C}$, und die andern ebenfalls positiv um die von der kleineren Peripherie begrenzte Kreisfläche $\mathfrak{C}'$.*

Ob die Entwicklung (18.) noch gültig ist für solche Punkte z, die nicht zwischen den beiden Peripherien, sondern unmittelbar auf einer derselben sich befinden, bleibt zweifelhaft.

Bemerkung. — Jene Integrale (17.) bleiben übrigens, ihren Werthen nach, ungeändert, wenn man sie nicht über den Rand von $\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{C}'$, sondern statt dessen über irgend eine zwischen diesen beiden Rändern sich hinziehende geschlossene Curve hinerstreckt. Der Beweis hierfür ergiebt sich in ähnlicher Art, wie der Beweis für die Bemerkung pg. 30.

§ 2.

Entwicklung einer Function $f(z)$ nach Potenzen von $(z - c)$.

Die Cauchy-Taylor'sche Reihe. — Die Function $f(z)$ sei *eindeutig und stetig* auf einer um den Punkt $c = a + ib$ beschriebenen Kreisfläche $\mathfrak{C}$. Wir führen ein neues mit x, y paralleles Coordinatensystem ξ, η ein, dessen Anfangspunkt in c liegt, und bezeichnen jeden beliebigen Punkt in Bezug auf das eine und andere Coordinatensystem respective mit $z = x + iy$ und $\zeta = \xi + i\eta$. Alsdann ist:

$$x = a + \xi,$$

$$y = b + \eta,$$

mithin:

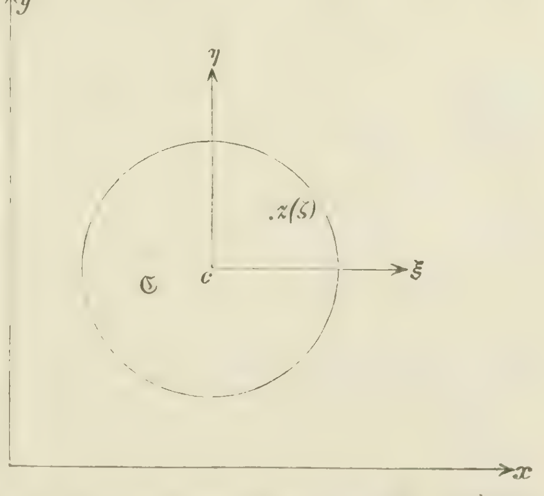
$$(x + iy) = (a + ib) + (\xi + i\eta),$$

d. i.

$$z = c + \zeta, \tag{19.}$$

und folglich:

$$f(z) = f(c + \zeta). \tag{20.}$$



Die *linke* Seite dieser Formel ist nach unserer Voraussetzung eindeutig und stetig für alle Punkte z der um c beschriebenen Kreisfläche $\mathfrak{C}$. Gleiches gilt daher von ihrer *rechten* Seite. D. h. *die Function $f(c + \zeta)$ ist eindeutig und stetig für alle Punkte ζ innerhalb der um $\zeta = 0$ beschriebenen Kreisfläche $\mathfrak{C}$.* Somit folgt aus dem Satze (11.) sofort:

$$f(c + \zeta) = [f(c + \zeta)]_{\zeta = 0} + \frac{\zeta}{1}\left[\frac{df(c + \zeta)}{d\zeta}\right]_{\zeta = 0} + \frac{\zeta^2}{1 \cdot 2}\left[\frac{d^2 f(c + \zeta)}{d\zeta^2}\right]_{\zeta = 0} + \cdots$$

d. i.

$$f(c + \zeta) = f(c) + \frac{\zeta}{1} f'(c) + \frac{\zeta^2}{1 \cdot 2} f''(c) + \cdots$$

oder, falls man für ζ [vgl. (19.)] seinen Werth $(z-c)$ einsetzt:

$$f(z) = f(c) + \frac{z-c}{1} f'(c) + \frac{(z-c)^2}{1 \cdot 2} f''(c) + \cdots$$

Also der Satz: *Ist die Function $f(z)$ eindeutig und stetig auf einer um den Punkt c beschriebenen Kreisfläche $\mathfrak{C}$, so wird ihr Werth in jedem innerhalb $\mathfrak{C}$ liegenden Punkte z darstellbar sein durch die Reihe:*

$$f(z) = f(c) + \frac{z-c}{1} f'(c) + \frac{(z-c)^2}{1 \cdot 2} f''(c) + \frac{(z-c)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(c) + \cdots \tag{21.}$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass z wirklich innerhalb $\mathfrak{C}$, nicht etwa hart am Rande von $\mathfrak{C}$ sich befindet.

Erweiterung der Laurent'schen Betrachtung. — Ebenso wie hier aus der *Maclaurin*'schen Reihe (11.) die *Taylor*'sche Reihe (21.) abgeleitet worden ist mittelst einer parallelen Verschiebung des Coordinatensystems, in analoger Weise wird sich auch aus der *Laurent*schen Reihe (18.) eine gewisse *allgemeinere* Reihe ableiten lassen. Man gelangt dabei, wie leicht zu übersehen, zu folgendem Satz:

Ist $f(z)$ eindeutig und stetig auf einer ringförmigen Fläche $\mathfrak{R}$, die von zwei um den Punkt c beschriebenen Kreislinien begrenzt ist, so gilt für jeden zwischen diesen beiden Kreislinien befindlichen Punkt z folgende Entwicklung:

$$\begin{aligned} f(z) = & [\mathsf{A}_0 + \mathsf{A}_1(z-c) + \mathsf{A}_2(z-c)^2 + \cdots] \\ & + [\mathsf{A}'_0(z-c)^{-1} + \mathsf{A}'_1(z-c)^{-2} + \mathsf{A}'_2(z-c)^{-3} + \cdots], \end{aligned} \tag{22.}$$

wo die A, A' Constanten bezeichnen.

§ 3.

Ueber die Constanz einer Function $f(z)$ auf einem kleinen Linien- oder Flächenelement.

Von einer Function $f(z)$ sei bekannt, dass sie auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ *eindeutig und stetig* ist. Auch befinde sich innerhalb $\mathfrak{A}$ ein kleines *Linien- oder Flächenelement* λ, auf welchem $f(z)$ *constant*, $= K$ ist. Es soll die Beschaffenheit dieser Function näher untersucht werden.

Sind c und c_1 irgend zwei Punkte des Elementes λ, so ist $f(c) = f(c_1) = K$, mithin:

$$\frac{f(c_1) - f(c)}{c_1 - c} = 0.$$

Hieraus folgt, falls man c_1 auf λ unendlich nahe an c heranrücken lässt:

$$f'(c) = 0.$$

Aus der gemachten Voraussetzung, dass f in allen Punkten c des Elementes λ *constant*, $= K$ ist, hat sich also ergeben, dass der Differentialquotient f' in all diesen Punkten $= 0$ ist. Hieraus aber ergiebt sich nun in gleicher Weise, dass der zweite Differentialquotient f'' in all diesen Punkten ebenfalls $= 0$ ist. U. s. f. Demgemäss gelten für jedweden Punkt c des Elementes λ die Formeln:

$$f(c) = K, \text{ und } f'(c) = f''(c) = f'''(c) = \cdots = 0. \tag{23.}$$

Beschreibt man jetzt um c eine innerhalb $\mathfrak{A}$ liegende Kreisfläche $\mathfrak{C}$, so ist $f(z)$ auf $\mathfrak{C}$ (ebenso wie auf $\mathfrak{A}$) eindeutig und stetig, mithin in jedwedem Punkte z dieser Fläche $\mathfrak{C}$ darstellbar durch die Reihe (21.):

$$f(z) = f(c) + \frac{z-c}{1} f'(c) + \frac{(z-c)^2}{1 \cdot 2} f''(c) + \frac{(z-c)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(c) + \cdots, \tag{24.}$$

woraus mit Rücksicht auf (23.) folgt:

$$f(z) = K. \tag{25.}$$

Aus der zu Anfang gemachten Voraussetzung, dass die Function $f(z)$ auf λ *constant*, $= K$ sei, hat sich also ergeben, dass sie diesen constanten Werth K auch besitzen muss auf jeder um irgend einen Punkt c des Elementes λ beschriebenen Kreisfläche $\mathfrak{C}$, falls nur diese letztere vollständig innerhalb $\mathfrak{A}$ liegt. In gleicher Weise weitergehend, wird man jetzt zeigen können, dass sie diesen constanten Werth K auch besitzen muss auf einer um irgend welchen Punkt c_1 der Fläche $\mathfrak{C}$ beschriebenen Kreisfläche $\mathfrak{C}_1$, falls nur diese letztere wiederum vollständig innerhalb $\mathfrak{A}$ liegt. U. s. f.

Mittelst einer solchen Kette von Kreisen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2, \ldots$, deren jeder sein Centrum im Innern des vorhergehenden hat, und die sämmtlich innerhalb $\mathfrak{A}$ liegen, kann man aber *jedweden* innerhalb $\mathfrak{A}$ gelegenen Punkt erreichen, also nachweisen, dass $f(z)$ in jedem solchen Punkte $= K$ ist.

Also der Satz: *Ist die Function $f(z)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig, und ist überdies bekannt, dass sie auf einem innerhalb $\mathfrak{A}$ befindlichen Linien- oder Flächenelement λ einen constanten Werth hat, so wird sie diesen selben constanten Werth auch besitzen in sämmtlichen Punkten der Fläche $\mathfrak{A}$.* (26.)

Mit andern Worten: *Ist die Function $f(z)$ auf einer Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig, so kann innerhalb $\mathfrak{A}$ kein auch noch so kleines Linien- oder Flächenelement λ vorhanden sein, auf welchem die Function constant wäre; — es sei denn, dass sie innerhalb $\mathfrak{A}$ allenthalben constant ist.* (27.)

§ 4.

Darstellung einer Function $f(z)$ im Bereich, d. i. in der Umgebung eines einzelnen Punktes.

Die Function $f(z)$ sei auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ *eindeutig und stetig.* Ferner sei c irgend ein Punkt innerhalb $\mathfrak{A}$, und $\mathfrak{C}$ eine um c beschriebene Kreisfläche, die ebenfalls innerhalb $\mathfrak{A}$ liegt. Alsdann ist $f(z)$ in jedem Punkte z der Fläche $\mathfrak{C}$ darstellbar durch die *Cauchy-Taylor*'sche Reihe (21.):

$$f(z) = \mathsf{A}_0 + \mathsf{A}_1(z-c) + \mathsf{A}_2(z-c)^2 + \cdots\cdots, \quad \text{(auf } \mathfrak{C}\text{)}. \tag{28.}$$

Möglicherweise ist A_0 gleich Null, vielleicht auch A_0 und A_1, vielleicht auch A_0, A_1 und A_2, u. s. f. Ein Nullsein *sämmtlicher* A's *in infinitum* ist aber offenbar nicht denkbar; — denn sonst würde $f(z)$, nach (28.), auf $\mathfrak{C}$; also, nach (26.), auch auf $\mathfrak{A}$ *allenthalben Null* sein.

Schliesst man diesen singulären Fall also aus, so wird die Entwicklung (28.) stets die Form haben:

$$f(z) = (z-c)^n\,[\mathsf{A}_n + \mathsf{A}_{n+1}(z-c) + \mathsf{A}_{n+2}(z-c)^2 + \cdots\cdots], \quad \text{(auf } \mathfrak{C}\text{)}, \tag{29.}$$

wo A_n eine *von Null verschiedene* Constante, und n eine *endliche* ganze Zahl vorstellt.

Die durch die Reihe

$$\mathsf{A}_n + \mathsf{A}_{n+1}(z-c) + \mathsf{A}_{n+2}(z-c)^2 + \cdots\cdots$$

dargestellte Function ist, ebenso wie ihre einzelnen Glieder, auf der Fläche $\mathfrak{C}$ *eindeutig und stetig.* Sie besitzt im Centrum c dieser Fläche den *von Null verschiedenen* Werth A_n, und wird daher in unmittelbarer Nähe des Centrums c ebenfalls *von Null verschieden* sein. Man wird also die um c beschriebene Kreisfläche $\mathfrak{C}$ so weit zu verkleinern im Stande sein, dass jene Function auf $\mathfrak{C}$ *nirgends verschwindet.*

Also der Satz: *Ist $f(z)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig, und markirt man innerhalb $\mathfrak{A}$ irgend einen Punkt c, so werden die Werthe, welche $f(z)$ auf einer um c beschriebenen hinreichend kleinen Kreisfläche $\mathfrak{C}$ besitzt, in folgender Weise darstellbar sein:*

$$f(z) = (z-c)^n\,E(z). \tag{30.}$$

Dabei bezeichnet n eine endliche Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots$ und $E(z)$ eine Function, die auf $\mathfrak{C}$ eindeutig, stetig und nichtverschwindend ist.

Man hat hinzuzufügen: *Dieser Satz gilt unter allen Umständen, ausser wenn $f(z)$ auf $\mathfrak{A}$ allenthalben $= 0$ ist.*

Bemerkung. — Functionen, die *eindeutig, stetig* und *nichtverschwindend* sind, werde ich stets mit E oder E oder H, oder auch wohl mit den entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnen; wobei bemerkt sein mag, dass derartige Functionen ihren Charakter behalten, wenn man sie mit einander multiplicirt oder dividirt. Sind z. B.

$$E(z),\quad E_1(z),\quad E_2(z),\quad E_3(z),\quad E_4(z)$$

Functionen, die auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ *eindeutig, stetig* und *nichtverschwindend* sind, so gilt Gleiches auf $\mathfrak{A}$ auch von der Function

$$\frac{1}{E(z)},$$

ebenso von dem Product:

$$E(z)\,E_1(z)\,E_2(z),$$

und ebenso von dem Quotienten

$$\frac{E(z)\,E_1(z)\,E_2(z)}{E_3(z)\,E_4(z)}.$$

§ 5.

Die Pole oder polaren Unstetigkeiten einer Function.

Gegeben sei im Raume irgend welche Fläche, gleichgültig, ob *eben* oder *krumm*; und auf dieser Fläche irgend ein Punkt c. Um c herum denke man sich auf jener Fläche ein kleines Flächenstück abgegrenzt; c selber mag gewissermassen als der *Mittelpunkt* dieses Flächenstückes angesehen werden; und demgemäss mögen die von c nach dem Rande des Flächenstücks hinlaufenden kürzesten Linien als die *Radii vectores* des Flächenstücks betrachtet werden.

(1.) **Definition:** *Ein solches um den gegebenen Punkt c herum abgegrenztes Flächenstück soll in Zukunft für den Fall, dass seine Radii vectores hinreichend klein, dabei aber sämmtlich von Null verschieden sind, mit einem besonderen Namen bezeichnet, nämlich das **Bereich des Punktes c** genannt werden.*

Was dabei in jedem einzelnen Fall unter hinreichend klein zu verstehen ist, wird abhängen von jedesmaligen näheren Umständen.

Liegt der Punkt c auf der Horizontalebene, so wird sein Bereich dargestellt sein durch eine kleine ebene Fläche von beliebiger Gestalt, die z. B. kreisförmig, ellipsenförmig, quadratförmig, trapezförmig u. s. w. sein kann.

Denkt man sich nun ferner auf der gegebenen ebenen oder krummen Fläche die Werthe irgend welcher Function f ausgebreitet, so mag folgende Bezeichnungsweise eintreten:

Definition: *Ist die Function f in irgend einem Punkte c unstetig, jedoch der Art unstetig, dass ihr reciproker Werth $\frac{1}{f}$ im Bereich*
(2.) *des Punktes stetig bleibt, so soll der Punkt c ein Pol der Function f, und die Unstetigkeit, mit welcher die Function in diesem Punkte behaftet ist, eine **polare Unstetigkeit** genannt werden.*

Es sind sehr verschiedene Arten von Unstetigkeitspunkten denkbar. Wie nun aber die Unstetigkeit, welche eine Function f in einem Punkte c besitzt, auch immer beschaffen sein möge, jederzeit wird dieselbe *entweder* darin ihren Grund haben, dass der Werth von f bei c einen *endlichen* Sprung macht, *oder* darin, dass jener Werth bei c ins *Unendliche* aufspringt. Gehört die bei c vorhandene Unstetigkeit zur *ersten* Kategorie, so wird sie nicht nur bei der Function *selber*, sondern, wie man augenblicklich übersieht, auch bei ihrem *reciproken Werth* bemerkbar, folglich *keine polare* Unstetigkeit sein. Innerhalb der *ersten* Kategorie kann sich demnach kein polarer Unstetigkeitspunkt befinden. Daraus folgt mit Nothwendigkeit, dass sämmtliche polare Unstetigkeitspunkte zur *zweiten* Kategorie gehören, d. h. in einem Aufspringen des Functionswerthes ins Unendliche ihren Grund haben. Somit ergiebt sich folgender Satz:

Ist der Punkt c ein Pol der Function f, so wird der Werth von
(3.) *f in c jederzeit **unendlich gross** sein.*

*Oder mit andern Worten: Ist der Punkt c ein Pol für die Function f, so wird er jederzeit ein **Nullpunkt** für die Function $\frac{1}{f}$ sein.*

Es sei $\mathfrak{A}$ eine in der Horizontalebene abgegrenzte Fläche, ferner $f = f(z)$ eine Function, die auf $\mathfrak{A}$ *eindeutig, und, mit Ausnahme einzelner Pole $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, stetig ist.* Ueberdiess existire innerhalb $\mathfrak{A}$ ein kleines Linien- oder Flächenelement λ, auf welchem f *constant*, $= K$ ist. Wir stellen uns die Aufgabe, die Beschaffenheit dieser Function näher zu untersuchen.

Um die Pole $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ lassen sich [vgl. (2.)] Kreisflächen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$ von solcher Kleinheit beschreiben, dass $\frac{1}{f}$ auf denselben *eindeutig und stetig* ist. Gleichzeitig wird alsdann f selber *eindeutig und stetig* sein auf der Fläche

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{A} - (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \cdots),$$

d. i. auf demjenigen Flächenstück $\mathfrak{S}$, welches von $\mathfrak{A}$, nach Absonderung der Kreise $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots$, noch übrig bleibt. Auch kann man jene Kreise so klein sich vorstellen, dass das Element λ oder wenig-

stens ein Theil desselben auf $\mathfrak{S}$ liegt. Alsdann aber ergiebt sich sofort [Satz pg. 35], dass f auf $\mathfrak{S}$ *allenthalben* $= K$ ist, also z. B. auch am Rande von $\mathfrak{C}_j$, wo $\mathfrak{C}_j$ irgend eine der Kreisflächen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$ ... vorstellt.

Die auf der Kreisfläche $\mathfrak{C}_j$ eindeutige und stetige Function $\frac{1}{f}$ hat daher am Rande von $\mathfrak{C}_j$ den constanten Werth $\frac{1}{K}$. Hieraus folgt [Satz pg. 22], dass sie diesen constanten Werth $\frac{1}{K}$ auch *innerhalb* $\mathfrak{C}_j$ besitzt, dass mithin f selber innerhalb $\mathfrak{C}_j$ überall $= K$ ist.

Alles zusammengefasst ergiebt sich also, dass die Function f einerseits auf $\mathfrak{S}$ und andererseits auch auf $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, ... allenthalben $= K$ ist. Also der Satz:

(4.) *Ist die Function $f(z)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig, und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig, so kann auf $\mathfrak{A}$ kein auch noch so kleines Curven- oder Flächenelement existiren, auf welchem die Function constant wäre; — es sei denn, dass sie auf $\mathfrak{A}$ allenthalben constant ist.*

Die Punkte, in denen eine solche Function $f(z)$ einen gegebenen Werth K hat, können also nur *vereinzelt* vorkommen, ebenso z. B. auch diejenigen Punkte, in denen sie Null wird. Also der Satz:

(5.) *Ist die Function $f(z)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig, ferner mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole α_1, α_2, ... daselbst stetig, und bezeichnet man ihre Nullpunkte auf der Fläche $\mathfrak{A}$ mit β_1, β_2, ..., so werden alle diese Punkte*

$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \beta_1, \beta_2, \ldots$$

vereinzelt liegen. D. h.: Je zwei derselben werden stets durch irgend welchen (wenn auch noch so kleinen) Zwischenraum von einander getrennt sein.

Erläuterung. — Dass die Pole α discret liegen, wird *vorausgesetzt* [vgl. den Wortlaut des vorstehenden Satzes]. Dass alsdann aber die Nullpunkte β ebenfalls discret liegen, ist soeben *bewiesen* worden. Und dass endlich auch je zwei Punkte α und β durch irgend welchen Zwischenraum getrennt sein werden, ist leicht zu übersehen. Um jeden Pol α kann man nämlich eine Kreisfläche c von solcher Kleinheit beschreiben, dass $\frac{1}{f(z)}$ innerhalb c eindeutig und *stetig* ist. Alsdann wird innerhalb dieser Fläche c die Function $f(z)$ nirgends verschwinden können, so dass also innerhalb c keiner der Punkte β anzutreffen ist. *Q. e. d.*

§ 6.

Die Ordnungszahlen einer Function $f(z)$.

Die Function $f(z)$ sei auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und mit *etwaiger* Ausnahme einzelner *Pole* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ daselbst auch überall stetig. Ihre *Nullpunkte* auf $\mathfrak{A}$ mögen bezeichnet sein mit $\beta_1, \beta_2 \ldots$ Endlich mag jedweder Punkt dieser Fläche, welcher *weder* zu den α's *noch* zu den β's gehört, mit γ benannt werden. — Wir wollen die Function im Bereich eines jeden solchen Punktes α, β oder γ näher untersuchen.

Zufolge (2.) ist die Function $\frac{1}{f(z)}$ eindeutig und stetig im Bereich des Poles α, also [Satz pg. 36] auf einer um α mit hinreichend kleinem Radius beschriebenen Kreisfläche $\mathfrak{C}_\alpha$, darstellbar durch die Formel:

$$\frac{1}{f(z)} = (z - \alpha)^p E(z), \quad (\text{auf } \mathfrak{C}_\alpha),$$

wo p eine *endliche* Zahl aus der Reihe 0, 1, 2, 3, ... vorstellt.

Hieraus folgt sofort:

$$f(z) = (z - \alpha)^{-p} \mathsf{E}(z), \quad (\text{ebenfalls auf } \mathfrak{C}_\alpha), \tag{6.}$$

wo $\mathsf{E}(z) = \frac{1}{E(z)}$ eine Function vorstellt, die, ebenso wie $E(z)$ selber, auf der Kreisfläche $\mathfrak{C}_\alpha$ eindeutig, stetig und nichtverschwindend ist. Aus dieser Formel (6.) folgt übrigens sofort, dass p *nicht* $= 0$ sein kann. Denn *wäre* $p = 0$, so würde $f(z)$, zufolge (6.), auf $\mathfrak{C}_\alpha$ *stetig sein*. Dies aber ist nicht möglich, weil der Mittelpunkt α der Fläche $\mathfrak{C}_\alpha$ nach unserer Voraussetzung ein Pol, d. i. ein polarer *Unstetigkeitspunkt* der Function $f(z)$ sein soll.

Die Function $f(z)$ ist also im Bereich $\mathfrak{C}_\alpha$ eines Poles α stets durch eine Formel (6.) darstellbar, in welcher p eine endliche Zahl aus der Reihe

$$1, 2, 3, 4, \ldots \tag{6a.}$$

vorstellt. *Und hieraus folgt, dafs $f(z)$ im Pole α nothwendiger Weise unendlich wird;* was in Einklang steht mit dem Satze (3.)

Weiter: Der Punkt β ist [vgl. (5.)] von allen Punkten α durch irgend welche Entfernungen getrennt. Die Function $f(z)$ ist daher im Bereich des Punktes β eindeutig und stetig, also [Satz pg. 36] auf einer um β mit hinreichend kleinem Radius beschriebenen Kreisfläche $\mathfrak{C}_\beta$ darstellbar durch die Formel:

$$f(z) = (z - \beta)^q \mathsf{E}(z), \quad (\text{auf } \mathfrak{C}_\beta). \tag{7.}$$

wo q eine endliche Zahl aus der Reihe 0, 1, 2, 3, ... vorstellt. Nun kann aber q nicht $= 0$ sein. Denn sonst würde die Formel

(7.) übergehen in $f(z) = \mathsf{E}(z)$, mithin*) $f(z)$ im Punkte β *nicht* verschwinden; — was der Definition von β widerspricht. Es repräsentirt somit q eine endliche Zahl der Reihe

$$1, 2, 3, 4, \ldots \tag{7a.}$$

Weiter: Unter γ sollte irgend ein von den α's und β's *verschiedener* Punkt verstanden sein, also ein Punkt, der von sämmtlichen α's und β's durch irgend welche Entfernungen getrennt ist. Demgemäss wird sich um γ als Mittelpunkt eine Kreisfläche $\mathfrak{C}_\gamma$ beschreiben lassen von solcher Kleinheit, dass alle α und alle β *ausserhalb* $\mathfrak{C}_\gamma$ liegen. Auf dieser Fläche $\mathfrak{C}_\gamma$ ist daher die Function $f(z)$ *eindeutig, stetig* und *nicht verschwindend;* was angedeutet werden kann durch die Formel:

$$f(z) = \mathsf{E}(z), \quad (\text{auf } \mathfrak{C}_\gamma). \tag{8.}$$

Wir können schliesslich die Formeln (6.), (7), (8.) zu einer einzigen Formel zusammenfassen und gelangen alsdann mit Rücksicht auf (6a.) und (7a.) zu folgendem Resultat:

Ist $f(z)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole stetig, und markirt man irgendwo auf der Fläche $\mathfrak{A}$ einen Punkt c, so wird die Function $f(z)$ auf einer um c beschriebenen hinreichend kleinen Kreisfläche $\mathfrak{C}$ stets darstellbar sein durch die Formel

$$f(z) = (z - c)^\mu \mathsf{E}(z), \quad (\textit{auf } \mathfrak{C}), \tag{9.}$$

wo μ eine endliche Zahl aus der Reihe

$$\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

vorstellt, während $\mathsf{E}(z)$ eine Function bezeichnet, die auf $\mathfrak{C}$ eindeutig, stetig und nichtverschwindend ist.

Jene Zahl μ, die sogenannte Ordnungszahl der Function $f(z)$ im Punkte c, ist negativ, positiv oder Null, jenachdem c ein Punkt α, β oder γ ist. Dabei sind unter den α die Pole, unter den β die Nullpunkte der Function $f(z)$, und unter den γ alle übrigen Punkte zu verstehen.

Auf Grund dieser Definition der Ordnungszahlen lassen sich dieselben für *rationale* Functionen von z sofort angeben. Sind z. B. A, B, C beliebig gegebene complexe Constanten (jedoch von einander verschieden), so wird die Function

$$f(z) = \frac{(z - A)^3 (z - B)^4}{(z - C)^{10}}$$

---

*) Es ist beständig im Auge zu behalten, dass mit $E(z)$, $\mathsf{E}(z)$ oder $\mathsf{H}(z)$ Functionen bezeichnet werden, die *eindeutig, stetig* und *nichtverschwindend* sind. Vgl. die Bemerkung auf pg. 37.

in den Punkten A, B und C resp. die Ordnungszahlen 3, 4 und (− 10), in allen *übrigen* Punkten aber die Ordnungszahl 0 besitzen. Auch übersieht man sofort, dass diese Function $f(z)$ auf der Horizontalebene überall eindeutig und mit Ausnahme eines einzigen, in C liegenden *Poles* daselbst auch überall stetig ist.

Aus der auf $\mathfrak{C}$ gültigen Formel (9.) folgt durch logarithmische Differentiation:

$$\frac{df(z)}{f(z)} = \frac{\mu dz}{z-c} + \frac{d\mathsf{E}(z)}{\mathsf{E}(z)},$$

oder, falls man positiv über den Rand von $\mathfrak{C}$ integrirt:

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{df(z)}{f(z)} = \mu \int_{\mathfrak{C}} \frac{dz}{z-c} + \int_{\mathfrak{C}} \mathsf{H}(z) d\mathsf{E}(z),$$

wo $\mathsf{H}(z) = \frac{1}{\mathsf{E}(z)}$, ebenso wie $\mathsf{E}(z)$ selber [vgl. die Bemerkung pg. 37] auf der Kreisfläche $\mathfrak{C}$ *eindeutig, stetig* und *nichtverschwindend* ist. Demgemäss ist [Satz pg. 23] das *letzte* Integral $= 0$, während das *vorletzte* [nach (8a.) pg. 18] $= 2\pi i$ ist. Man erhält daher:

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{df(z)}{f(z)} = \mu \cdot 2\pi i. \tag{10.}$$

Bezeichnet man also die *Pole und Nullpunkte* der Function $f(z)$ auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ *promiscue* mit $c_1, c_2, \ldots c_g$, und denkt man sich um diese Punkte hinreichend kleine Kreisflächen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots \mathfrak{C}_g$ beschrieben, so wird für jede solche Fläche $\mathfrak{C}_\varkappa$ die Formel gelten:

$$\int_{\mathfrak{C}_\varkappa} \frac{df(z)}{f(z)} = \mu_\varkappa \cdot 2\pi i, \tag{11.}$$

wo $\mu_\varkappa$ die Ordnungszahl von $f(z)$ im Punkte $c_\varkappa$ vorstellt.

Repräsentirt nun $\mathfrak{S}$ dasjenige Flächenstück, welches von der gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$, nach Absonderung der kleinen Kreisflächen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots \mathfrak{C}_g$, noch übrig bleibt:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{A} - (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \ldots + \mathfrak{C}_g),$$

so werden auf $\mathfrak{S}$ weder Pole noch Nullpunkte von $f(z)$ vorhanden sein. Folglich ist $f(z)$ auf $\mathfrak{S}$ *eindeutig, stetig* und *nichtverschwindend*. Gleiches gilt daher auf $\mathfrak{S}$ [vgl. Bemerkung pg. 37] auch von $\frac{1}{f(z)}$. Somit folgt [Satz pg. 23]:

$$\int_{\mathfrak{S}} \frac{df(z)}{f(z)} = 0, \tag{12.}$$

die Integration positiv erstreckt über den ganzen Rand von $\mathfrak{S}$. Will man aber den ganzen Rand von $\mathfrak{S}$ *positiv* durchwandern, so hat man zuerst die Randcurven der ursprünglichen Fläche $\mathfrak{A}$ *positiv*, so-

dann aber die Randcurven der Flächen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots \mathfrak{C}_g$ *negativ* zu durchlaufen. Die Formel (12.) kann daher so geschrieben werden:

$$(13.)\qquad \int_{\mathfrak{A}} \frac{df(z)}{f(z)} - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=g} \int_{\mathfrak{C}_\varkappa} \frac{df(z)}{f(z)} = 0;$$

oder mit Rücksicht auf (11.) auch so:

$$(14.)\qquad \int_{\mathfrak{A}} \frac{df(z)}{f(z)} - (\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_g)\, 2\pi i = 0.$$

Also der Satz: *Ist die Function $f(z)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, und bezeichnet man ihre auf $\mathfrak{A}$ vorhandenen Pole und Nullpunkte promiscue mit $c_1, c_2, \ldots c_g$, ferner ihre in diesen Punkten vorhandenen Ordnungszahlen mit $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_g$, so ist stets:*

$$(15.)\qquad \mu_1 + \mu_2 \ldots + \mu_g = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{df(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} d\log f(z),$$

die Integration positiv erstreckt über sämmtliche Randcurven der Fläche $\mathfrak{A}$.

Da übrigens unter $c_1, c_2, \ldots c_g$ *sämmtliche* Pole und Nullpunkte der Function $f(z)$ verstanden sind, so wird sie in *jedwedem andern* auf $\mathfrak{A}$ befindlichen Punkte die Ordnungszahl 0 haben [Satz (9.)]; so dass also die linke Seite der Formel (15.) die Summe sämmtlicher Ordnungszahlen repräsentirt, welche $f(z)$ auf $\mathfrak{A}$ überhaupt besitzt. Man kann daher den vorstehenden Satz auch so ausdrücken:

Ist die Function $f(z)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so wird die Summe M ihrer sämmtlichen auf $\mathfrak{A}$ vorhandenen Ordnungszahlen den Werth besitzen:

$$(16.)\qquad \mathsf{M} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} d\log f(z),$$

die Integration positiv erstreckt über den Rand von $\mathfrak{A}$.

Dieser allgemeinen Formel (16.) subsumiren sich, beiläufig bemerkt, die früheren Formeln (10.), (11.) als specielle Fälle.

§ 7.

Ueber Ausdrücke, die aus mehreren Functionen $f(z)$ auf rationale Weise zusammengesetzt sind.

Es seien $f = f(z)$ und $f_1 = f_1(z)$ irgend zwei Functionen, die auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ *eindeutig* und *bis auf einzelne Pole stetig sind.* Es sollen die aus f und f_1 zusammengesetzten Functionen

$$Kf + K_1 f_1 \quad \text{und} \quad f f_1 \quad \text{und} \quad \frac{f}{f_1}$$

näher untersucht werden, wo K, K_1 beliebige *Constanten* vorstellen.

Zunächst ist klar, dass diese drei neuen Functionen, ebenso wie f und f_1 selber, auf der Fläche $\mathfrak{A}$ überall *eindeutig* sein werden. Ferner ist zu bemerken, dass die *beiden ersten* nur in denjenigen Punkten unstetig sein können, wo f und f_1 unstetig sind, und dass andererseits die *dritte* nur in denjenigen Punkten unstetig sein kann, wo f und $\frac{1}{f_1}$ unstetig sind; dass also all' jene drei Functionen, ebenso wie f und f_1 selber, auf der Fläche $\mathfrak{A}$ immer nur in *einzelnen* Punkten unstetig sein können. Zu untersuchen bleibt nun aber, welcher *Art* diese Unstetigkeiten sind, ob dieselben *polarer*, oder ob sie irgend welcher *anderer* Natur sind.

Markirt man innerhalb $\mathfrak{A}$ einen beliebigen Punkt c, so sind f und f_1 [Satz (9.)] auf einer um c beschriebenen hinreichend kleinen Kreisfläche $\mathfrak{C}$ darstellbar durch:

$$(18.) \qquad \begin{aligned} f &= (z-c)^{\mu} E, \\ f_1 &= (z-c)^{\mu_1} E_1, \end{aligned} \quad (\text{auf } \mathfrak{C}),$$

wo μ und μ_1 *endliche ganze Zahlen*, die Ordnungszahlen von f und f_1 in c vorstellen, während E und E_1 Functionen bezeichnen, die auf $\mathfrak{C}$ eindeutig, stetig und nichtverschwindend sind. Demgemäss ist die Function

$$\Phi = Kf + K_1 f_1$$

auf $\mathfrak{C}$ darstellbar durch die Formel:

$$\Phi = K(z-c)^{\mu} E + K_1 (z-c)^{\mu_1} E_1, \quad (\text{auf } \mathfrak{C}),$$

woraus durch Multiplication mit $(z-c)^N$ sich ergiebt:

$$(19.) \qquad (z-c)^N \Phi = [K(z-c)^{N+\mu} E + K_1 (z-c)^{N+\mu_1} E_1], \quad (\text{auf } \mathfrak{C}).$$

Nimmt man nun für N eine positive ganze Zahl von solcher Höhe, dass $(N+\mu)$ und $(N+\mu_1)$ *beide positiv* sind, so repräsentirt der hier in der eckigen Klammer stehende Ausdruck eine Function von z, die auf $\mathfrak{C}$ *eindeutig und stetig* ist, also eine Function, die [nach Satz (9.)] innerhalb eines um c beschriebenen hinreichend kleinen Kreises $\mathfrak{c}$ darstellbar ist durch

$$(z-c)^{\sigma} \mathsf{E},$$

wo σ eine *endliche positive ganze* Zahl vorstellt, und E eine Function bezeichnet, die auf $\mathfrak{c}$ *eindeutig, stetig* und *nichtverschwindend* ist. Diese *neue* um c beschriebene Kreisfläche $\mathfrak{c}$ wird je nach Umständen bald identisch mit $\mathfrak{C}$, bald kleiner als $\mathfrak{C}$ sein.

Demgemäss nimmt die Formel (19.) für diese *neue* Fläche $\mathfrak{c}$ die Gestalt an:

$$(z-c)^N \Phi = (z-c)^\sigma \mathsf{E}, \quad \text{(gültig auf } \mathfrak{c}\text{)}.$$

Hieraus folgt sofort:

$$\Phi = (z-c)^{\sigma - N} \mathsf{E}, \quad \text{(auf } \mathfrak{c}\text{)}, \tag{20.}$$

mithin

$$\frac{1}{\Phi} = (z-c)^{N-\sigma} \mathsf{H}, \quad \text{(auf } \mathfrak{c}\text{)}, \tag{21.}$$

wo $\mathsf{H} = \frac{1}{\mathsf{E}}$, ebenso wie E selber, auf $\mathfrak{c}$ *eindeutig*, *stetig* und *nichtverschwindend* ist. Zufolge (20.), (21.) ist also auf $\mathfrak{c}$ entweder Φ oder $\frac{1}{\Phi}$ stetig, jenachdem $(\sigma - N)$ positiv oder negativ. Die Function Φ ist somit im Bereich $\mathfrak{c}$ des zu Anfang *beliebig* markirten Punktes c entweder stetig, oder doch nur der Art unstetig, dass wenigstens ihr reciproker Werth daselbst stetig bleibt. Mit andern Worten: Sie wird in c entweder stetig sein, oder daselbst doch nur mit einer *polaren* Unstetigkeit behaftet sein. Also der Satz:

Sind $f = f(z)$ und $f_1 = f_1(z)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so gilt Gleiches von der Function

$$\Phi = Kf + K_1 f_1, \tag{22.}$$

vorausgesetzt, dass man unter K und K_1 irgend welche Constanten versteht.

Was ferner die Functionen

$$P = ff_1,$$

$$Q = \frac{f}{f_1}$$

betrifft, so ergiebt sich durch Substitution der Werthe (18.):

$$\left.\begin{aligned} P &= (z-c)^{\mu+\mu_1} \mathsf{E}, \\ Q &= (z-c)^{\mu-\mu_1} \mathsf{H}, \end{aligned}\right\} \quad \text{(auf } \mathfrak{C}\text{)}, \tag{23.}$$

wo $\mathsf{E} = EE_1$ und $\mathsf{H} = \frac{E}{E_1}$ Functionen vorstellen, die, ebenso wie E und E_1 selber, auf der Fläche $\mathfrak{C}$ eindeutig, stetig und nichtverschwindend sind. Aus diesen Formeln (23.) folgt sofort, dass P und Q im Mittelpunkte c der Fläche $\mathfrak{C}$ nur mit einer *polaren* Unstetigkeit behaftet sein können. In der That wird z. B., zufolge (23.), *entweder P oder $\frac{1}{P}$* auf $\mathfrak{C}$ stetig sein, jenachdem $(\mu + \mu_1)$ positiv oder negativ ist. U. s. w.

Auch folgt aus (23.), dass die Ordnungszahlen von P und Q im Punkte c respective $= (\mu + \mu_1)$ und $= (\mu - \mu_1)$ sind. Also der Satz:

Sind $f = f(z)$ und $f_1 = f_1(z)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so gilt Gleiches auch von den Functionen

$$P = ff_1 \quad \text{und} \quad Q = \frac{f}{f_1}. \tag{24.}$$

Sind ferner μ und μ_1 die Ordnungszahlen der Functionen f und f_1 in irgend einem Punkte c der Fläche $\mathfrak{A}$, so werden die dortigen Ordnungszahlen von P und Q die Werthe $(\mu + \mu_1)$ und $(\mu - \mu_1)$ besitzen.

Haben z. B. f und f_1 auf $\mathfrak{A}$ überall *dieselben Ordnungszahlen*, so wird Q überall die Ordnungszahl 0 besitzen, mithin im Bereich eines jeden Punktes c der Fläche $\mathfrak{A}$ [Satz (9.)] darstellbar sein durch

$$Q = (z - c)^0 E(z) = E(z).$$

Mit andern Worten: Es wird alsdann Q in jedwedem Punkte c der Fläche $\mathfrak{A}$ *eindeutig, stetig* und *nichtverschwindend* sein. Also der Satz:

Sind die Functionen $f = f(z)$ und $f_1 = f_1(z)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, und besitzen überdies diese beiden Functionen auf $\mathfrak{A}$ überall dieselben Ordnungszahlen, so wird ihr Quotient

$$Q = \frac{f}{f_1} \tag{25.}$$

auf der Fläche $\mathfrak{A}$ überall eindeutig, stetig und nichtverschwindend sein.

Die Sätze (22.), (24.) lassen sich übrigens sofort verallgemeinern, und führen alsdann zu folgendem Resultat:

Sind die Functionen $f_1 = f_1(z)$, $f_2 = f_2(z)$, ... $f_n = f_n(z)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so gilt Gleiches von jedwedem Ausdrucke:

$$\Psi = \text{Ratf.}\,(f_1, f_2, \ldots. f_n), \tag{26.}$$

der aus $f_1, f_2, \ldots. f_n$ auf rationale Weise zusammengesetzt, ist, also z. B. auch von den Ausdrücken:

$$P = f_1 f_2 \ldots f_n \quad \text{und} \quad Q = \frac{f_1 f_2 \ldots f_n}{F_1 F_2 \ldots F_p}, \tag{27.}$$

falls man nur über $F_1, F_2, \ldots F_p$ dieselben Voraussetzungen macht, wie über $f_1, f_2, \ldots f_n$.

Sind ferner $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ und $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \ldots \mathsf{M}_p$ die Ordnungszahlen der Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ und $F_1, F_2, \ldots F_p$ in irgend einem Punkte c der Fläche $\mathfrak{A}$, so werden die dortigen Ordnungszahlen von P und Q lauten:

$$(\mu_1 + \mu_2 \ldots + \mu_n) \quad \text{und} \quad [(\mu_1 + \mu_2 \ldots + \mu_n) - (\mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_2 \ldots + \mathsf{M}_p)]. \tag{28.}$$

Zu den Functionen f, F, auf welche diese Sätze anwendbar sind, gehört selbstverständlich auch diejenige, deren Werth auf $\mathfrak{A}$ allenthalben $= 1$, deren Ordnungszahl also daselbst überall $= 0$ ist.

Ferner gehört zu diesen Functionen f, F, auf welche die Sätze anwendbar sind, z. B. auch diejenige, welche durch das Argument z selber dargestellt ist. Denn die Function $f(z) = z$ ist *eindeutig und stetig* auf jedweder Fläche $\mathfrak{A}$, falls nur alle Punkte derselben im Endlichen liegen. Somit ist dem Satz (26.) folgender Zusatz beizufügen:

Versteht man unter

$$\Psi = \text{Ratf.}\,(z) \tag{29.}$$

irgend eine rationale Function von z, so wird Ψ auf der Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig sein. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Fläche $\mathfrak{A}$ mit all' ihren Punkten im Endlichen liegt, — eine Voraussetzung, die wir übrigens stillschweigend bei den mit $\mathfrak{A}$ bezeichneten Flächen stets supponirt haben.

Es sei jetzt $f = f(z)$ eine beliebig gegebene Function, die auf einer Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig ist. Ihre Pole und Nullpunkte auf der Fläche $\mathfrak{A}$ seien bezeichnet mit α_1, α_2, $\ldots \alpha_a$ und β_1, β_2, $\ldots$ β_b, ferner ihre dortigen Ordnungszahlen mit $(-p_1)$, $(-p_2)$, $\ldots$ $(-p_a)$ und q_1, q_2, $\ldots$ q_b; sodass also die p und q [vgl. den Satz (9.)] lauter *positive* ganze Zahlen vorstellen.

Genau *dieselben* Eigenschaften besitzt offenbar auch die *rationale* Function:

$$\Psi(z) = \frac{(z-\beta_1)^{q_1}\,(z-\beta_2)^{q_2}\cdots(z-\beta_b)^{q_b}}{(z-\alpha_1)^{p_1}\,(z-\alpha_2)^{p_2}\cdots(z-\alpha_a)^{p_a}}. \tag{30.}$$

Nach dem Satze (29.) ist nämlich $\Psi(z)$ auf $\mathfrak{A}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig. Auch erkennt man aus der Beschaffenheit des Ausdrucks (30.) sofort, dass die Pole und Nullpunkte von $\Psi(z)$ respective in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_b$ gelegen sind. Und überdies erkennt man [mittelst des Satzes (9.)], dass die in diesen Punkten vorhandenen Ordnungszahlen der Function $\Psi(z)$ respective durch $(-p_1)$, $(-p_2)$, $\ldots$ $(-p_a)$ und q_1, q_2, $\ldots$ q_b dargestellt sind.

Da nun aber $f(z)$ und $\Psi(z)$ auf $\mathfrak{A}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, ferner überall mit *denselben* Ordnungszahlen versehen sind, so folgt aus dem Satze (25.) sofort, dass der Quotient

$$\frac{f(z)}{\Psi(z)}$$

auf $\mathfrak{A}$ *eindeutig, stetig* und *nichtverschwindend* ist. Man gelangt daher zu folgendem Resultat:

Ist die Function $f(z)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, und bezeichnet man ihre auf $\mathfrak{A}$ liegenden Pole und Nullpunkte respective mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_b$, ferner ihre dortigen Ordnungszahlen respective mit $(-p_1), (-p_2), \ldots (-p_a)$ und $q_1, q_2, \ldots q_b$, so wird sie auf der Fläche $\mathfrak{A}$ darstellbar sein durch die Formel:

$$(31.)\qquad f(z) = \frac{(z-\beta_1)^{q_1}(z-\beta_2)^{q_2}\ldots(z-\beta_b)^{q_b}}{(z-\alpha_1)^{p_1}(z-\alpha_2)^{p_2}\ldots(z-\alpha_a)^{p_a}}\,E(z),$$

wo $E(z)$ eine Function vorstellt, die auf $\mathfrak{A}$ eindeutig, stetig und nichtverschwindend ist.

Versteht man insbesondere unter $\mathfrak{A}$ eine um den *Anfangspunkt* $z=0$ beschriebene *Kreisfläche*, so wird die auf $\mathfrak{A}$ eindeutige und stetige Function

$$(z-\beta_1)^{q_1}(z-\beta_2)^{q_2}\ldots(z-\beta_b)^{q_b}E(z)$$

innerhalb $\mathfrak{A}$ entwickelbar sein [Satz pg. 30] in eine Maclaurin'sche Reihe

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots;$$

so dass man also zu folgendem Satze gelangt:

Ist die Function $f(z)$ auf einer um den Punkt $z=0$ beschriebenen Kreisfläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a$ stetig, und bezeichnet man ihre Ordnungszahlen in diesen Polen mit $(-p_1), (-p_2), \ldots (-p_a)$, so wird dieselbe innerhalb $\mathfrak{A}$ darstellbar sein durch die Formel:

$$(32.)\qquad f(z) = \frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots}{(z-\alpha_1)^{p_1}(z-\alpha_2)^{p_2}\ldots(z-\alpha_a)^{p_a}},$$

wo $A, B, C, D, \ldots$ Constanten sind, während die p's (ihrer Definition zufolge) positive ganze Zahlen vorstellen.

Besitzt insbesondere die Function $f(z)$ auf der Kreisfläche $\mathfrak{A}$ nur einen einzigen Pol, und liegt dieser im *Mittelpunkte von* $\mathfrak{A}$, d. i. in $z=0$, so nimmt der Satz die speciellere Gestalt an:

Ist die Function $f(z)$ auf einer um $z=0$ beschriebenen Kreisfläche $\mathfrak{A}$ eindeutig, und bis auf einen in $z=0$ gelegenen Pol stetig, so wird dieselbe innerhalb $\mathfrak{A}$ darstellbar sein durch die Formel:

$$(33.)\qquad f(z) = \frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots}{z^p},$$

d. i. durch die Formel:

$$(34.)\qquad f(z) = Az^{-p} + Bz^{-p+1} + Cz^{-p+2} + Dz^{-p+3} + \ldots,$$

wo $A, B, C, D, \ldots$ Constante sind, während p eine positive ganze

Zahl vorstellt. Es repräsentirt nämlich $(-p)$ *die Ordnungszahl von* $f(z)$ *in jenem Pole* $z = 0$.

§ 8.

Ueber die Differentialquotienten einer Function $f(z)$.

(1.) *Ist die Function* $f(z)$ *auf einer gegebenen Fläche* $\mathfrak{A}$ *eindeutig und stetig, so gilt Gleiches daselbst auch von ihren sämmtlichen Differentialquotienten* $\frac{df(z)}{dz}$, $\frac{d^2f(z)}{dz^2}$, *etc. etc.*

So lautet der früher [pg. 23] erhaltene Satz. Wir wollen jetzt nun aber das Verhalten der Differentialquotienten für den Fall untersuchen, dass die ursprüngliche Function mit irgend welchen *Polen* behaftet ist.

Die Function $f(z)$ sei also auf $\mathfrak{A}$ *eindeutig* und *bis auf einzelne Pole stetig.* Markirt man alsdann auf $\mathfrak{A}$ einen beliebigen Punkt c, so ist [Satz pg. 41] $f(z)$ innerhalb einer um c beschriebenen hinreichend kleinen Kreisfläche $\mathfrak{C}$ darstellbar durch die Formel:

$$f(z) = (z-c)^{\mu} E(z), \quad (\text{auf } \mathfrak{C}), \tag{2.}$$

wo μ die *Ordnungszahl* von $f(z)$ in c vorstellt, während $E(z)$ eine Function bezeichnet, die auf $\mathfrak{C}$ *eindeutig*, *stetig* und *nichtverschwindend* ist. In Folge dieser Eigenschaften ist $E(z)$ innerhalb der Kreisfläche $\mathfrak{C}$ entwickelbar in die Cauchy-Taylor'sche Reihe:

$$E(z) = A_0 + A_1(z-c) + A_2(z-c)^2 + \ldots,$$

wo A_0 *verschieden von* 0 ist. Denn andernfalls würde $E(z)$ im Centrum c der Kreisfläche $\mathfrak{C}$ verschwinden, was dem Charakter dieser Function widerspricht.

Man erhält also:

$$f(z) = (z-c)^{\mu}[A_0 + A_1(z-c) + A_2(z-c)^2 + \ldots], \quad (\text{auf } \mathfrak{C}), \tag{3.}$$

und hieraus durch Differentiation:

$$\frac{df(z)}{dz} = (z-c)^{\mu-1}[\mu A_0 + (\mu+1)A_1(z-c) + (\mu+2)A_2(z-c)^2 + \ldots], \quad (\text{auf } \mathfrak{C}). \tag{4.}$$

Ist nun μ *von* 0 *verschieden*, so hat diese Formel die Gestalt:

$$\frac{df(z)}{dz} = (z-c)^{\mu-1}[B_0 + B_1(z-c) + B_2(z-c)^2 + \ldots], \quad (\text{auf } \mathfrak{C}), \tag{5.}$$

wo B_0 (ebenso wie das frühere A_0) *von* 0 *verschieden* ist.

Ist hingegen $\mu = 0$, so verschwindet in (4.) der erste Coefficient: μA_0. Möglicherweise verschwinden aber gleichzeitig auch noch

einige der folgenden Coefficienten. Denn die A_1, A_2, A_3, ... sind unbekannte Constanten, die ebensogut Null, wie von Null verschieden sein können. Im Falle $\mu = 0$ besitzt daher die Formel (4.) die Gestalt:

$$\frac{df(z)}{dz} = (z-c)^p [C_0 + C_1(z-c) + C_2(z-c)^2 + \ldots], \quad (\text{auf } \mathfrak{C}), \tag{6.}$$

wo p eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... vorstellt, und C_0 eine *von 0 verschiedene* Constante bezeichnet.

Die in (5.) in der eckigen Klammer stehende Function ist auf $\mathfrak{C}$ *eindeutig* und *stetig*. Sie besitzt im Mittelpunkt c dieser Fläche den von 0 verschiedenen Werth B_0, folglich in unmittelbarer Nachbarschaft von c ebenfalls von 0 verschiedene Werthe. Man kann daher $\mathfrak{C}$ zu einer concentrischen Kreisfläche $\mathfrak{c}$ von solcher Kleinheit zusammenschrumpfen lassen, dass jene Function innerhalb $\mathfrak{c}$ nicht bloss *eindeutig* und *stetig*, sondern auch *nichtverschwindend* ist. Analoges gilt von der in (6.) in der eckigen Klammer stehenden Function.

Innerhalb einer um c beschriebenen, hinreichend kleinen Kreisfläche $\mathfrak{c}$ nehmen daher die für $\mu \lessgtr 0$, respective für $\mu = 0$ geltenden Formeln (5.) und (6.) folgende Gestalt an:

$$\mu \lessgtr 0: \frac{df(z)}{dz} = (z-c)^{\mu-1}\,\mathsf{E}(z), \quad (\text{auf } \mathfrak{c}), \tag{7.}$$

$$\mu = 0: \frac{df(z)}{dz} = (z-c)^p\,\mathsf{H}(z), \quad (\text{auf } \mathfrak{c}), \tag{8.}$$

wo p eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... vorstellt, während $\mathsf{E}(z)$ und $\mathsf{H}(z)$ Functionen bezeichnen, die auf $\mathfrak{c}$ eindeutig, stetig und nichtverschwindend sind.

Diese Formeln (7.), (8.) zeigen, dass die Function $\frac{df(z)}{dz}$ im Punkte c entweder *stetig* oder aber *polarunstetig* ist; sie zeigen ferner, dass die Ordnungszahl dieser Function im Punkte c entweder $= (\mu - 1)$ oder $= p$ ist. Also der Satz:

Ist die Function $f(z)$ auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so gilt Gleiches auf $\mathfrak{A}$ auch von dem Differentialquotienten

$$\frac{df(z)}{dz}.$$

Sind ferner μ und μ' die Ordnungszahlen von $f(z)$ und $\frac{df(z)}{dz}$ in irgend einem Punkte c der Fläche $\mathfrak{A}$, so ist:

$$\mu' = \mu - 1, \quad \textit{falls} \quad \mu \lessgtr 0, \tag{9.}$$

hingegen:

$$\mu' = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, \quad \textit{falls} \quad \mu = 0. \tag{10.}$$

Oder mit andern Worten: Besitzt die Ordnungszahl μ im Punkte c einen der Werthe:

$$\mu = \ldots -3,\ -2,\ -1,\ +0,\ +1,\ +2,\ +3,\ \ldots$$

so wird der zugehörige Werth von μ' respective dargestellt sein durch:

$$\mu' = \ldots -4,\ -3,\ -2,\ +p,\ +0,\ +1,\ +2,\ \ldots$$

wo das p eine unbekannte Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots$ repräsentirt.

Demgemäss hat also $\frac{df(z)}{dz}$ der Lage nach genau dieselben Pole wie die ursprüngliche Function $f(z)$; während hinsichtlich der Nullpunkte eine derartige Uebereinstimmung im Allgemeinen nicht existirt.

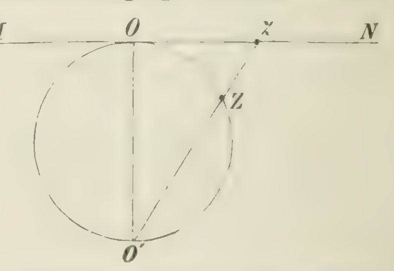
Drittes Capitel.

Functionen in ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche.

§ 1.

Die Horizontalebene und die Kugelfläche als Träger gegebener Functionswerthe.

Soll irgend eine Function $f(z)$ *in ihrem ganzen Umfange* untersucht werden, so wird man als Träger ihrer Werthe die ganze *unendliche* Horizontalebene anzuwenden haben. Die bisher gefundenen Sätze beziehen sich aber nur auf *endliche* Flächenstücke $\mathfrak{A}$. Und man wird daher mittelst dieser Sätze die Werthe der Function in den *unendlich fernen* Punkten der Horizontalebene nicht mehr zu untersuchen im Stande sein. Wie sich dieser Uebelstand beseitigen lässt, soll in diesem und dem folgenden Paragraph gezeigt werden.



Es sei O der höchstgelegene und O' der tiefstgelegene Punkt einer *Kugelfläche vom Durchmesser* 1; ferner sei MN die die Kugelfläche in O berührende *Horizontalebene*; und in dieser Ebene befinde sich (wie bisher) ein rechtwinkliges Axensystem xOy, dessen Anfangspunkt in O liegt. Die nebenstehende Zeichnung repräsentirt irgend welchen durch die Linie OO' gehenden Durchschnitt der räumlichen Figur.

Wir denken uns zuvörderst die Werthe der gegebenen Function $f(z)$ in gewöhnlicher Weise auf der Horizontalebene MN ausgebreitet, und verpflanzen sodann diese Werthe von jener Ebene nach der Kugelfläche hin, indem wir dieselben auf geradlinigen, gegen O' convergirenden Bahnen nach der Kugelfläche hingleiten lassen. In solcher Weise wird z. B. auf den Kugelflächenpunkt Z [vgl. die Figur] derjenige Werth $f(z)$ fallen, welcher ursprünglich in z sich befand.

Durch dieses Verfahren verwandelt sich die ursprüngliche Ausbreitung der Function auf der Horizontalebene in eine *Ausbreitung derselben auf der Kugelfläche.*

Beispiele. — Die Function $f = \left(\frac{1}{z}\right)^5$ ist auf der Horizontalebene *eindeutig*, und in den unendlich fernen Punkten durchweg $= 0$. Projicirt man nun die Werthe dieser Function in der angegebenen Weise auf die Kugelfläche, so fällt auf den tiefsten Punkt O' derselben von allen Seiten her *ein und derselbe* Werth, nämlich der Werth 0. Es wird daher diese Function auf der Kugelfläche im Punkte O' *eindeutig* sein, und selbstverständlich auch in jedwedem andern Punkte der Kugelfläche.

Analoges gilt von der Function $f = z^5$, welche in den unendlich fernen Punkten der Horizontalebene durchweg $= \infty$ ist. Verpflanzt man also die Werthe dieser Function nach der Kugelfläche, so wird auf den Punkt O' von allen Seiten her *ein und derselbe* Werth, nämlich der Werth ∞ fallen. Es ist mithin diese Function $f = z^5$ wiederum auf der Kugelfläche *überall eindeutig.*

Was wir bei diesen beiden Beispielen sehen, gilt aber nicht allgemein für jede Function. So ist z. B. die Function

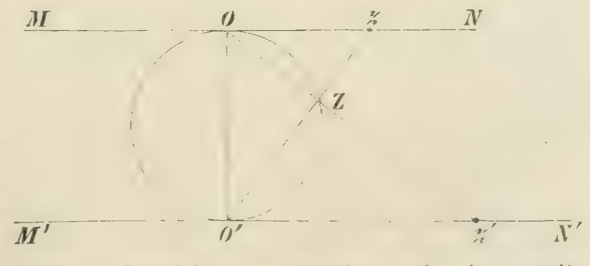
$$f = \sin z = \sin(x + iy) = \left(\sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + i\left(\cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)$$

auf der Horizontalebene überall *eindeutig.* Und trotzdem wird sie bei ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche im Punkte O' *unendlichvieldeutig* sein. Denn diese Function besitzt, wie man leicht übersieht, in den unendlich fernen Punkten der Horizontalebene oder (anschaulicher ausgedrückt) in den einzelnen Punkten einer in der Horizontalebene um O mit unendlich grossem Radius beschriebenen Kreisperipherie *verschiedene* Werthe. Und all' diese verschiedenen Werthe fallen, beim Uebergange zur Kugelfläche, auf den Punkt O'.

§ 2.

Die Antipodenebene als Träger der Functionswerthe.

Durch Ausbreitung der Werthe einer Function auf der Kugelfläche wird erreicht, dass wir alsdann all' diese Werthe im *Endlichen* vor uns haben; wobei aber der Nachtheil eintritt, dass als Träger dieser Werthe nicht mehr eine *ebene*, sondern eine *krumme* Fläche dient.

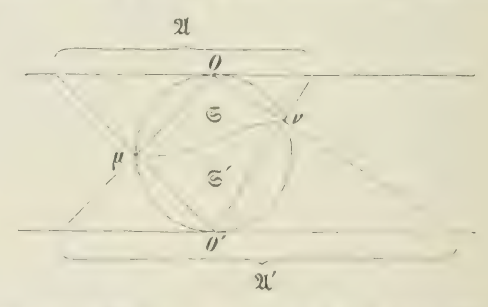


Um diesen Nachtheil zu beseitigen, construiren wir eine *zweite Horizontalebene $M'N'$*, welche die Kugel in O' berührt, und welche

zur bequemeren Unterscheidung die *Antipodenebene* heissen mag. Projicirt man nun die auf der Kugelfläche ausgebreiteten Functionswerthe auf geradlinigen, von O auslaufenden Bahnen nach der Antipodenebene, z. B. [vgl. die Figur pg. 53] von Z nach z', so sind alsdann sämmtliche Functionswerthe auf dieser Antipodenebene ausgebreitet.

Diese Antipodenebene erstreckt sich aber nach allen Seiten ins *Unendliche*, sodass wir jetzt schiesslich denselben Uebelstand haben, der mit der ursprünglichen Ausbreitung der Function auf der Horizontalebene verbunden war.

Bei jeder der drei Ausbreitungsmethoden (auf der Horizontalebene, auf der Kugelfläche und auf der Antipodenebene) ist also der störende Umstand vorhanden, dass die angewandte Fläche entweder eine *unendliche* oder aber eine *krumme* ist. Um *beide* Uebelstände zu vermeiden, zerlegen wir die Kugelfläche durch irgend eine geschlossene Curve $\mu\nu$ (z. B. durch ihren Aequator oder durch einen Parallelkreis) in zwei Teile $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$, von welchen der eine den Punkt O, der andere den Punkt O' enthält, und projiciren sodann die Functionswerthe des Theiles $\mathfrak{S}$ von O' aus nach der Horizontal-, und die des Theiles $\mathfrak{S}'$ von O aus auf die Antipodenebene. *Solches ausgeführt gedacht, sind alsdann sämmtliche Werthe der gegebenen Function ausgebreitet auf zwei ebenen endlichen Flächenstücken $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, von denen das eine in der Horizontal-, das andere in der Antipodenebene liegt.*



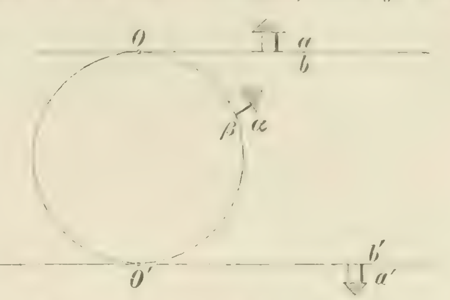
Die Werthe, welche auf der Kugelfläche längs der Curve $\mu\nu$ vorhanden waren, kommen bei dieser Ausbreitung *doppelt* vor, indem sie sowohl auf den Rand von $\mathfrak{A}$, wie auf den von $\mathfrak{A}'$ fallen; *so dass also die Randwerthe von $\mathfrak{A}$ identisch sind mit denen von $\mathfrak{A}'$.*

§ 3.

Die Horizontalebene, die Kugelfläche und die Antipodenebene sind anzusehen als verschiedene Zustände ein und derselben Fläche.

Man kann die Horizontalebene, die Kugelfläche und die Antipodenebene als verschiedene Zustände *ein und derselben* biegsamen, dehnbaren und zusammenziehbaren Fläche auffassen. Auch kann man die Uebergänge dieser Fläche aus dem ersten in den zweiten

und dritten Zustand in solcher Weise sich vorstellen, dass je drei Punkte, wie z, Z, z' [vgl. die Figur pg. 53] nichts anderes sind als drei verschiedene Lagen *ein und desselben* Flächenpunktes.



Die [in der nebenstehenden Figur] mit a, α, a' bezeichneten *Seiten* der drei Flächen sind alsdann *untereinander identisch*, und ebenso andererseits auch b, β, b'. Da man nun bei der Horizontalebene a als die *obere* und b als die *untere* Seite zu bezeichnen hat, so erscheint es notwendig, mit dem erstern Namen auch α und a', mit dem letztern β und b' zu belegen.

Bei der Antipodenebene wird also, ebenso wie bei der Horizontalebene, unter der obern Seite die der Kugelfläche abgewendete zu verstehen sein. Und andererseits wird bei der Kugelfläche selber unter der obern Seite ihre Aussenseite zu verstehen sein.

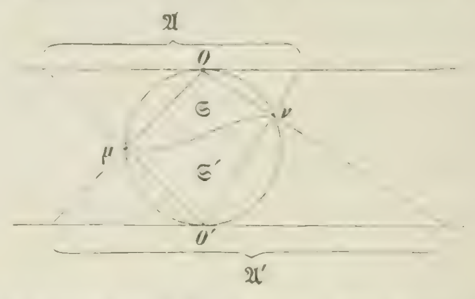
Bei der Untersuchung der auf der Horizontalebene ausgebreiteten Functionswerthe haben wir [in den vorhergehenden Capiteln] häufig die Worte *links* und *rechts* gebraucht. Und zwar haben wir bei Anwendung dieser Worte unsern Standpunkt stets auf der *obern* Seite der Horizontalebene gewählt. Demgemäss wird es für den *stetigen* Fortgang unserer Betrachtungen geboten sein, unsern Standpunkt auf dieser *obern* Seite auch dann noch beizubehalten, wenn jene Ebene im Verlauf der Untersuchung in die Kugelfläche oder in die Antipodenebene übergeht.

Nehmen wir also an, die Kugelfläche sei ein Bild unserer Erdkugel, und unser Wohnort auf der Erdkugel sei in O. Dann werden wir selber denjenigen Standpunkt haben, welcher zur Beurtheilung der auf der Horizontalebene ausgebreiteten Functionswerthe geboten ist. Und gleichzeitig werden unsere bei O′ wohnenden Antipoden einen Standpunkt haben, wie er erforderlich ist zur Beurtheilung der auf der Antipodenebene ausgebreiteten Functionswerthe. Dies ist für die Zukunft unveränderlich festzuhalten. Und hierin liegt auch der Grund für die Wahl des Namens Antipodenebene.

Nachdem in solcher Weise die *obern* Seiten der betrachteten Flächen fixirt sind, können solche Ausdrücke wie *positive* oder *negative Umlaufung* sofort angewendet werden, ohne dass dabei irgend ein Missverständniss zu befürchten wäre.

Will man nämlich ein beliebig gegebenes Flächenstück in *positiver* Richtung umlaufen, so muss man [vgl. die Regel pg. 3] auf der *obern* Seite des Flächenstücks längs seiner Randes in solcher Richtung fortschreiten, dass man dabei das Flächenstück selber zur *Linken* hat.

Die *obere* Seite der Kugelfläche ist aber ihre *Aussenseite*. Will man also z. B. das Flächenstück $\mathfrak{S}$ längs seiner Randcurve $\mu\nu$ *positiv* umlaufen, so hat man längs dieser Curve von *Westen nach Osten* zu wandern, falls man nämlich für den Augenblick O als *Nordpol* und O' als *Südpol* der Kugel bezeichnet. Will man hingegen das andere Flächenstück $\mathfrak{S}'$ *positiv* umlaufen, so hat man längs $\mu\nu$ in *entgegengesetzter* Richtung, nämlich von Osten nach Westen fortzuschreiten.



Ferner bemerkt man, dass die positiven Umlaufungen der beiden Flächenstücke $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{A}$ unter einander harmoniren. Denken wir uns z. B. in O' einen leuchtenden Punkt, so wird, falls wir selber das Flächenstück $\mathfrak{S}$ *positiv* umlaufen, gleichzeitig unser auf die Horizontalebene geworfener Schatten in *positiver* Richtung um $\mathfrak{A}$ herumlaufen.

In ähnlicher Weise harmoniren unter einander die positiven Umlaufungen von $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{A}'$, wobei ein leuchtender Punkt in O anzubringen sein würde.

§ 4.

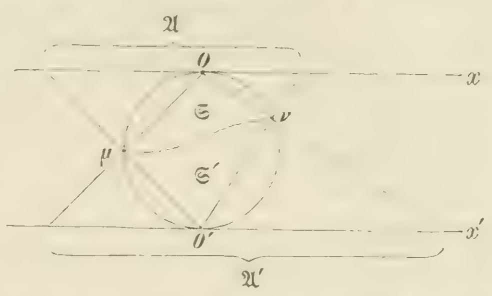
Die Coordinatensysteme xOy und $x'O'y'$ in der Horizontal- und Antipodenebene.

Ebenso wie wir das Axensystem in der Horizontalebene mit xOy bezeichnet haben, ebenso wollen wir das in der Antipoden ebene festzusetzende Axensystem $x'O'y'$ nennen. Und zwar mögen die Axen Ox und $O'x'$ *parallel* und *von gleicher Richtung* sein. Sie mögen beide liegen in der Ebene der nebenstehenden Zeichnung.

Der in O auf der *obern* Seite der Horizontalebene Stehende und in der Richtung Ox Fortsehende wird alsdann die Richtung Oy

markiren mit ausgestreckter Linken [Satz (3.) pg. 4]. Daraus folgt, dass der Punkt y *hinter* der Ebene der Zeichnung liegt.

Andererseits wird [zufolge desselben Satzes] der auf der *obern* Seite der Antipodenebene in O' Stehende und in der Richtung $O'x'$ Fortsehende die Richtung $O'y'$ mit ausgestreckter Linken



markiren. Hieraus folgt, dass der Punkt y' vor der Ebene der Zeichnung liegt, dass mithin $O'y'$ und Oy *entgegengesetzte* Richtungen sind.

Sind also xOy und $x'O'y'$ die in der Horizontal- und Antipodenebene festgesetzten Axensysteme, so haben Ox und $O'x'$ gleiche Richtung, hingegen Oy und $O'y'$ entgegengesetzte Richtungen.

Es mag dabei noch auf folgenden Umstand aufmerksam gemacht werden. Die Ebenen xOy und $x'O'y'$ sind zwei Tangentialebenen der Kugelfläche. Denkt man sich die eine derselben als eine *bewegliche* Tangentialebene, so wird man dieselbe durch Verschiebung ihres Contactpunktes stets in eine solche Lage versetzen können, dass O mit O', ferner Ox mit $O'x'$ und gleichzeitig Oy mit $O'y'$ zur Deckung gelangt.

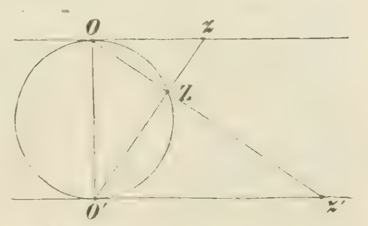
Es seien z, Z, z' irgend drei einander correspondirende Punkte. Alsdann sind die beiden Dreiecke $OO'z$ und $OO'z'$ ähnlich dem Dreieck $OO'Z$, also auch unter einander ähnlich. Hieraus folgt:

$$\frac{(Oz)}{(OO')} = \frac{(OO')}{(O'z')},$$

d. i.

$$(Oz)(O'z') = (OO')^2.$$

Bezeichnet man also die Entfernungen (Oz) und $(O'z')$ mit r und r', *und setzt man ausserdem fest, dass der Kugeldurchmesser* $(OO') = 1$ *sein solle*, so erhält man:



$$rr' = 1, \tag{1.}$$

Es seien nun z und z' zugleich die Abbreviaturen für die diesen Punkten z und z' zugehörigen Binome; also

$$\begin{aligned} z &= x + iy, \\ z' &= x' + iy', \end{aligned} \tag{2.}$$

wo x, y die Coordinaten des Punktes z im Coordinatensystem xOy,

und x', y' die Coordinaten von z' im Coordinatensystem $x'O'y'$ vorstellen. Alsdann ergiebt sich:

$$(3.)\qquad \begin{cases} x = r \cos \vartheta, \\ y = r \sin \vartheta, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = r' \cos \vartheta, \\ y' = -r' \sin \vartheta, \end{cases}$$

wo ϑ das in beistehender Figur*) angegebene Azimuth repräsentirt. Hieraus folgt weiter:

$$(4.)\qquad \begin{aligned} x + iy &= re^{i\vartheta}, \\ x' + iy' &= r'e^{-i\vartheta}, \end{aligned}$$

also mit Rücksicht auf (1.):

$$(5.)\qquad (x + iy)(x' + iy') = 1.$$

Also der Satz: *Zwischen je zwei einander correspondirenden Punkten $z = x + iy$ und $z' = x' + iy'$ der Horizontal- und Antipodenebene findet stets die Relation statt*:

$$(6.)\qquad (x + iy)(x' + iy') = 1, \quad \text{d. i.} \quad zz' = 1.$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass der Durchmesser der Kugel $= 1$ sei, dass ferner in jenen beiden Ebenen die x-Axen gleiche Richtung, und die y-Axen entgegengesetzte Richtung haben, wie solches näher angegeben wurde im vorhergehenden Satz [pg. 57].

§ 5.

Eine rationale Function von z in ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche.

Die Werthe irgend welcher Function $f(z)$ erleiden, falls man die Horizontalebene in die Kugelfläche, und diese wieder in die Antipodenebene übergehen lässt, keine Grössen-Veränderung, sondern nur eine *Orts*-Veränderung. Derselbe Werth nämlich, welcher ursprünglich in z war, kommt später nach Z, und schliesslich nach z', falls man nämlich unter z, Z, z' irgend drei einander correspondirende Punkte versteht [Figur pg. 57].

Demgemäss wird also z. B. auch die rationale Function

$$(7.)\qquad \Phi = \frac{(z - A)(z - B)}{z - C}$$

in je drei solchen Punkten z, Z, z' *ein und denselben* Werth haben.

*) Diese Figur soll die vorhergehende von Neuem darstellen, dieselbe betrachtet aus der Vogelperspective.

Dabei sollen A, B, C beliebig gegebene reelle oder complexe Constanten vorstellen.

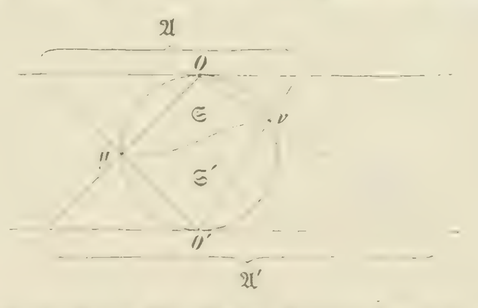
Nun kann man aber, weil bei je drei correspondirenden Punkten z, Z, z' die Relation (6.) stattfindet: $zz' = 1$, hiervon Gebrauch machen, um jenem in z, Z, z' vorhandenem Werth (7.) eine andere *Form* zu geben, indem man $z = \frac{1}{z'}$ substituirt. In solcher Weise ergiebt sich:

$$\Phi = \frac{(1 - Az')(1 - Bz')}{z'(1 - Cz')}. \tag{8.}$$

Auch wird es bequem sein, diesen den drei Punkten z, Z, z' *gemeinschaftlichen* Werth Φ bei z in der Form (7.), hingegen bei z' in der Form (8.) zu verwenden.

Thut man dies, und berücksichtigt man dabei den Satz (29.) pg. 47, so ergiebt sich aus (7.), dass die Function Φ auf jedem *endlichen* Stück der Horizontalebene *eindeutig* und *bis auf einzelne Pole stetig* ist. Und ebenso ergiebt sich alsdann aus (8.), dass Φ dieselben Eigenschaften besitzt auf jedem *endlichen* Stück der Antipodenebene.

Denkt man sich also, wie früher, die Kugelfläche durch eine Curve $\mu\nu$ in zwei Theile $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ zerlegt, und die mit diesen Theilen correspondirenden Theile der Horizontal- und Antipodenebene mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ bezeichnet, so wird Φ *eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig sein* sowohl auf $\mathfrak{A}$ wie auf $\mathfrak{A}'$, mithin diese Eigenschaften auch besitzen auf $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ [vgl. die folgende Erläuterung]. Demgemäss wird also Φ diese Eigenschaften besitzen auf der *ganzen Kugelfläche*.



Man übersieht nun sofort, dass man in genau derselben Weise verfahren kann bei jeder *beliebigen* rationalen Function von z, und gelangt also zu folgendem

(9.) Satz. — *Eine rationale Function von z wird bei ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche daselbst überall eindeutig, und bis auf einzelne Pole daselbst auch überall stetig sein.*

Erläuterung der vorhergehenden Schlussfolge. — Sind z und Z zwei auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{S}$ einander correspondirende Punkte, so wird eine in z stetige

Function Φ offenbar in Z ebenfalls stetig sein. Ist andererseits Φ in z mit einem *Pol* behaftet, also daselbst unstetig, jedoch in solcher Weise, dass der reciproke Werth $\frac{1}{\Phi}$ im Bereich des Punktes z stetig bleibt, so wird dieses $\frac{1}{\Phi}$ auch stetig sein in dem Bereich des correspondirenden Punktes Z. Folglich wird Φ in Z ebenfalls einen *Pol* haben. *Q. e. d.*

Nimmt man insbesondere eine *ganze* rationale, z. B. die Function

$$\Phi = (z - A)(z - B)(z - C), \tag{10.}$$

so lässt sich dieser den drei Punkten z, Z, z' *gemeinschaftliche* Werth mittelst der Substitution $z = \frac{1}{z'}$ auch so darstellen:

$$\Phi = \frac{(1 - Az')(1 - Bz')(1 - Cz')}{z'^3}. \tag{11.}$$

Aus (10.) ersieht man, dass Φ *eindeutig und stetig* ist auf $\mathfrak{A}$, mithin auch auf $\mathfrak{S}$. Andererseits ersieht man aus (11.), dass Φ auf $\mathfrak{A}'$ *eindeutig* und *bis auf einen in O' liegenden Pol stetig* ist, dass mithin Φ diese Eigenschaften auch auf $\mathfrak{S}'$ besitzt. Demgemäss ist also die Function Φ *auf der Kugelfläche eindeutig, und bis auf einen in O' liegenden Pol stetig*. Genau dasselbe wiederholt sich offenbar bei jeder *beliebigen* ganzen rationalen Function. Also der

(12.) **Satz.** — *Eine ganze rationale Function von z wird bei ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche überall eindeutig, und, bis auf einen bei O' d. i. bei $z = \infty$ liegenden Pol, daselbst überall stetig sein.* Man kann nämlich die Punkte O und O' nach den zugehörigen Werthen von z respective mit $z = 0$ und mit $z = \infty$ bezeichnen.

§ 6.

Ueber die Umkehrbarkeit der Sätze des vorhergehenden Paragraphs.

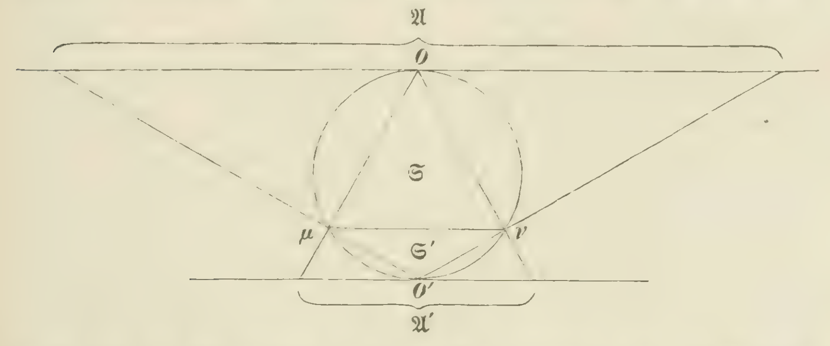
Ist eine nicht näher bekannte Function $f(z)$ auf der Kugelfläche *überall eindeutig und stetig*, so gilt offenbar Gleiches auch von ihrem Modul. Es wird also dieser Modul auf der Kugelfläche überall stetig, mithin auch überall *endlich* sein. Ist mithin M der *grösste* Werth dieses Moduls, so repräsentirt M eine bestimmte *endliche* Constante von positivem Werth.

Demgemäss ist also $f(z)$ auf der *Horizontalebene* überall eindeutig und stetig, und gleichzeitig ist der Modul von $f(z)$ daselbst überall $< M$. Hieraus aber folgt [Satz pg. 25], dass $f(z)$ eine *Constante* ist. Also der

(13.) **Satz.** — *Ist eine Function $f(z)$ bei ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche allenthalben eindeutig und stetig, so wird sie eine* C o n s t a n t e *sein.*

Wir wollen jetzt annehmen, die Function $f(z)$ sei auf der Kugelfläche überall eindeutig, und bis auf einen bei $z = \infty$ (d. i. in O') liegenden Pol daselbst auch überall stetig. Es soll die Beschaffenheit dieser Function näher untersucht werden.

Zerlegt man die Kugelfläche durch irgend einen *Parallelkreis* $\mu\nu$ in zwei Theile $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$, und bezeichnet man die correspondirenden Theile der Horizontal- und Antipodenebene mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$,



so ist $f(z)$ auf $\mathfrak{S}'$, mithin auch auf $\mathfrak{A}'$ eindeutig, und bis auf den Pol O' stetig. Folglich ist $f(z)$ [Satz (34.) pg. 48] innerhalb dieser Kreisfläche $\mathfrak{A}'$ darstellbar durch die Formel:

(14.)
$$f(z) = Az'^{-p} + Bz'^{-p+1} + Cz'^{-p+2} \dots + Pz'^{-1}$$
$$+ Q + Rz' + Sz'^2 + Tz'^3 + \cdots\cdots, \text{ (gültig auf } \mathfrak{A}'\text{)}.$$

wo $A, B, C, \cdots P, Q, R, S, T, \cdots$ Constanten sind, während p eine positive ganze Zahl repräsentirt.

Solches constatirt, soll jetzt die Differenz untersucht werden:

(15.) $$\varphi(z) = f(z) - [Az'^{-p} + Bz'^{-p+1} + Cz'^{-p+2} \dots + Pz'^{-1}],$$

welche, da $zz' = 1$ ist, auch so sich darstellen lässt:

(16.) $$\varphi(z) = f(z) - [Az^p + Bz^{p-1} + Cz^{p-2} \dots + Pz].$$

Nimmt man diese neue Function $\varphi(z)$ in der Gestalt (15.), so folgt aus der Formel (14.) sofort, dass sie auf $\mathfrak{A}'$ identisch ist mit

$$Q + Rz' + Sz'^2 + Tz'^3 + \cdots,$$

dass sie also auf $\mathfrak{A}'$, mithin auch auf $\mathfrak{S}'$ *überall eindeutig und stetig* ist. Und nimmt man andererseits die neue Function $\varphi(z)$ in der Gestalt (16.), so folgt mit Rücksicht auf die über $f(z)$ gemachten Voraussetzungen, dass $\varphi(z)$ auf $\mathfrak{A}$, mithin auch auf $\mathfrak{S}$ *überall eindeutig und stetig* ist.

Beides zusammen genommen, ergiebt sich also, dass $\varphi(z)$ die Eigenschaften der Eindeutigkeit und Stetigkeit *auf der ganzen Kugelfläche* besitzt, dass also [zufolge des vorhergehenden Satzes (13.)] $\varphi(z)$ eine *Constante* ist. Demgemäss erhalten wir aus (16.):

(17.) $$f(z) = \text{Const.} + Az^p + Bz^{p-1} + Cz^{p-2} \cdots + Pz,$$

und gelangen daher zu folgendem

(18.) **Satz.** — *Ist die Function $f(z)$ auf der Kugelfläche überall eindeutig, und bis auf einen bei $z = \infty$* (d. i. in O') *gelegenen Pol daselbst auch überall stetig, so wird sie stets eine ganze rationale Function von z sein.*

Wir gehen jetzt zu der allgemeinsten Aufgabe über, die sich hier darbietet. Es sei nämlich $f(z)$ eine Function, *die auf der Kugelfläche eindeutig, und bis auf einzelne unbekannte Pole stetig ist.* Es soll die Beschaffenheit von $f(z)$ näher untersucht werden.

Möglicherweise liegt einer der unbekannten Pole in O'. All' diejenigen Pole aber, die *nicht* in O' liegen, mögen mit $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_a$ benannt werden. Und zur Zerlegung der Kugelfläche in zwei Theile $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ [vgl. die vorhergehende Figur] mag ein Parallelkreis $\mu\nu$ benutzt werden, der so nahe an O' liegt, dass all' jene mit $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_a$ bezeichneten Pole innerhalb $\mathfrak{S}$ liegen. Sind nun wieder $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ die mit $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ correspondirenden Theile der Horizontal- und Antipodenebene, so wird $f(z)$ auf $\mathfrak{S}$, mithin auch auf $\mathfrak{A}$ eindeutig, und bis auf die Pole $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_a$ stetig sein, also [Satz (32.) pg. 48] auf der Kreisfläche $\mathfrak{A}$ darstellbar sein durch die Formel:

(19.) $$f(z) = \frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots}{(z-\alpha_1)^{p_1}\,(z-\alpha_2)^{p_2} \cdots (z-\alpha_a)^{p_a}}, \quad (\text{auf } \mathfrak{A}),$$

wo $A, B, C, D, \cdots$ Constanten vorstellen, während die p's positive ganze Zahlen sind.

Solches constatirt wollen wir jetzt das Product untersuchen:

(20.) $$\varphi(z) = f(z) \cdot [(z-\alpha_1)^{p_1}\,(z-\alpha_2)^{p_2} \cdots (z-\alpha_a)^{p_a}].$$

Der hier in der eckigen Klammer enthaltene Ausdruck ist eine *rationale* Function von z, also [nach Satz (9.)] auf der Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig. Gleiches gilt aber, nach unserer Voraussetzung, auf der Kugelfläche auch von $f(z)$, und daher [Satz pg. 46] auch von dem *Product* $\varphi(z)$.

(21.) *Diese neu eingeführte Function $\varphi(z)$ ist mithin auf der Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig.* Es handelt sich darum, diese noch unbekannten Pole zu ermitteln. Und zu diesem

Zwecke sind nacheinander die beiden Theile $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ der Kugelfläche zu durchmustern.

Zuvörderst folgt aus der Gleichung (19.), dass die neue Function $\varphi(z)$, (20.), auf $\mathfrak{A}$ darstellbar ist durch

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots,$$

dass sie also auf $\mathfrak{A}$, mithin auch auf $\mathfrak{S}$ überall stetig ist. *Sie kann somit auf $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{S}$ keinen Pol haben.* (22.)

Was ferner $\mathfrak{A}'$ oder $\mathfrak{S}'$ betrifft, so besteht $\varphi(z)$, nach (20.), aus zwei Factoren. Der *erste* Factor $f(z)$ kann [zufolge unserer Construction] auf $\mathfrak{S}'$ nirgends einen Pol haben, also auch nirgends unendlich werden, — ausser vielleicht in O'. Und der *zweite* Factor, der in (20.) in eckige Klammern eingeschlossen ist, kann, wie sein Anblick zeigt, auf $\mathfrak{S}'$ ebenfalls nirgends unendlich werden, ausser für $z = \infty$, d. i. in O'. Demgemäss wird also auch das Product $\varphi(z)$ dieser beiden Factoren auf $\mathfrak{S}'$ nirgends unendlich sein können, ausser in O'. Und hieraus folgt weiter, *dass $\varphi(z)$ auf $\mathfrak{S}'$ keinen Pol besitzen kann, ausser in O'.* (23.)

Mit Rücksicht auf diese Ergebnisse (22.), (23.) wird jetzt also der Satz (21.) dahin auszusprechen sein, dass die Function $\varphi(z)$ *auf der ganzen Kugelfläche eindeutig und mit etwaiger Ausnahme eines in O' liegenden Poles daselbst auch überall stetig ist.* Hieraus aber folgt [mittelst des Satzes (18.)], dass $\varphi(z)$ eine *ganze rationale Function von z* ist. Solches constatirt, ergiebt sich jetzt aus (20.), dass $f(z)$ eine *gebrochene rationale Function von z* ist. Also der

Satz. — *Ist die Function $f(z)$ auf der Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so wird sie stets eine rationale Function von z sein.* (24.)

Genauer genommen, ist übrigens offenbar hinzuzufügen, dass der Satz nur dann Giltigkeit hat, wenn die Anzahl jener einzelnen Pole eine *endliche* ist.

Viertes Capitel.

Einführung der Riemann'schen ebenen Flächen und der Riemann'schen Kugelflächen.

§ 1.

Ueber die Riemann'schen Windungsflächen.

Ein Strahl, welcher von einem festen Punkte c ausgeht, um c drehbar ist, und nun längs irgend einer im Raume gegebenen Leitcurve fortgleitet, wird einen Kegelmantel beschreiben. Ist die Leitcurve eine in sich zurücklaufende, so gilt Gleiches auch von dem Kegelmantel.

Befindet sich die Leitcurve auf einer um den Punkt c mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel, so heisst bekanntlich derjenige Oberflächentheil dieser Kugel, welcher von der Leitcurve umschlossen wird, die *Oeffnung* des Kegelmantels.

Wir wollen uns nun auf der um c beschriebenen Kugel eine Leitcurve denken, welche etwa die Form einer 8 besitzt, nämlich annehmen, dass diese Curve, ebenso wie es bei der 8 der Fall ist, durch einen Zug entsteht, welcher zuerst nach Ausführung *einer* Wendung sich selber durchschneidet, und welcher sodann nach Ausführung einer *zweiten*, entgegengesetzten Wendung in seinen Anfang zurückläuft. Der Punkt, in welchem jene 8förmige Curve sich selber durchschneidet, mag der *Doppelpunkt* der Curve genannt und mit d bezeichnet werden.

Lassen wir den von c ausgehenden Strahl dem Zuge dieser Leitcurve folgen, so wird der von ihm beschriebene Kegelmantel, ähnlich wie jene Curve selber, zuerst nach Ausführung *einer* Wendung (in der Linie cd) sich selber durchsetzen, und sodann nach Ausführung einer *zweiten*, entgegengesetzten Wendung in seinen Anfang zurücklaufen. Es wird demnach dieser Kegelmantel *zwei* Oeffnungen besitzen, von welchen die eine dem unteren, die andere dem oberen Theile der 8 entspricht.

Wir haben hier eine Fläche vor uns, welche in einer gewissen Linie *sich selber durchsetzt*. Mit Flächen solcher Art werden wir in Zukunft häufig zu thun haben; und es wird daher zweckmässig sein, wenn wir uns hier zu Anfang sogleich mit einer gewissen Grundvorstellung bekannt machen, welche — wie gezwungen sie im ersten Augenblick vielleicht auch erscheinen mag — bei jenen Flächen in Zukunft beständig festgehalten werden muss.

(1.) *Wir setzen nämlich ein für allemal fest, dass zwischen zwei Flächentheilen, welche einander in irgend einer Linie durchsetzen, längs dieser Linie hin kein Zusammenhang, also auch keine Nachbarschaft stattfinden soll.*

Denkt man sich z. B. im Raume zwei gleich grosse Kreisflächen, welche einander längs eines Durchmessers durchsetzen und unter irgend welchem Winkel gegen einander geneigt sind, so werden diese beiden Kreisflächen als zwei von einander völlig getrennte Flächenstücke anzusehen sein; nämlich als zwei Flächenstücke anzusehen sein, welche unabhängig von einander ihre Lage im Raume ändern können, mithin an beliebige und beliebig weit von einander entfernte Stellen des Raumes versetzt werden können.

Sobald von einem Punkte die Rede ist, welcher auf einer gegebenen Fläche *fortgeht*, oder *fortschreitet*, oder *fortläuft*, so versteht man darunter bekanntlich jederzeit einen Punkt, welcher seine Lage auf der Fläche *stetig* ändert, also einen Punkt, der von jedweder Stelle der Fläche immer nur zu einer *benachbarten Stelle* sich fortbewegt. Die aufeinander folgenden Lagen eines solchen Punktes werden demnach in ihrer Gesammtheit eine Curve bilden, welche aus lauter *zusammenhängenden* Punkten der Fläche besteht.

Zwei Flächentheile können als zwei *Systeme von Punkten* angesehen werden; die Punkte des einen Systems sind alle unter einander zusammenhängend, ebenso auch die des andern. *Durchsetzen* aber die beiden Flächentheile einander, so findet — nach der von uns angenommenen Vorstellung — zwischen den Punkten des einen und denen des andern Systems längs der Durchsetzungslinie *kein Zusammenhang* statt.

Der auf einer gegebenen Fläche fortlaufende Punkt wird daher, weil seine Bahn aus lauter *zusammenhängenden* Punkten bestehen muss, sobald er auf seinem Wege zu einer Linie gelangt, in welcher der Flächentheil, auf dem er sich gerade befindet, von einem andern Flächentheile durchsetzt wird, niemals in diesen andern Flächentheil hinübergehen können. Oder mit andern Worten:

(2.) *Bei einer Linie, in welcher zwei Theile einer Fläche einander durchsetzen, ist die Bewegung eines auf der Fläche fortlaufenden Punktes nothwendig immer der Art, als wäre der eine von diesen beiden Flächentheilen gar nicht vorhanden.*

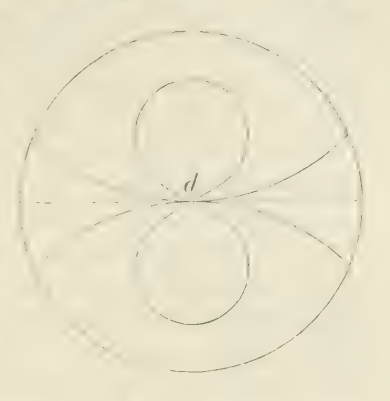
Wir haben früher, um die Werthe irgend einer Function räumlich auszubreiten, bald eine *ebene Fläche*, bald eine *Kugelfläche* benutzt. Unter Umständen wird es zweckmässig sein, zu diesem Behuf irgend welche *andere* Flächen in Anwendung zu bringen. Jeder Punkt der gerade gewählten Fläche wird alsdann der Träger eines gewissen Functionswerthes werden. Trifft es sich, dass hierbei *zusammenhängende* Flächenpunkte auch jederzeit mit *stetig zusammenhängenden* Functionswerthen belastet sind, so wird die Function eine auf jener Fläche überall *stetige* zu nennen sein.

Wiederum wird hierbei, falls zwei Theile der in Anwendung gebrachten Fläche einander *durchsetzen*, wohl zu beachten sein, dass zwischen den Punkten des einen und denen des andern Theiles längs ihrer Durchsetzungslinie kein Zusammenhang stattfindet.

(3.) *Soll demnach irgend eine Function auf einer solchen Fläche stetig sein, so wird dazu, was ihre Werthe auf jenen beiden einander durchsetzenden Flächentheilen anbelangt, nur erforderlich sein, dass jeder von diesen beiden Theilen für sich allein betrachtet mit lauter stetig zusammenhängenden Werthen belastet ist — gleichgültig, ob die Werthe, welche der eine, und welche der andere Theil in der Nähe ihrer Durchsetzungslinie besitzen, unter einander gleich oder verschieden sind.*

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen kehren wir zu dem zu Anfang betrachteten Kegelmantel zurück. Wir wollen uns diesen Kegelmantel als eine materielle Fläche denken, und wiederum annehmen, sein Scheitelpunkt befinde sich im *Mittelpunkt*, und seine 8förmige Leitcurve auf der *Oberfläche* irgend einer Kugel. Der Kreis, in welchem die Kugel von einer durch ihren Mittelpunkt gelegten Horizontalebene geschnitten wird, mag der Aequator genannt werden; und jene 8förmige Leitcurve mag auf der Kugel eine solche Lage haben, dass die eine Schleife derselben *oberhalb*, die andere *unterhalb* des Aequators, dass mithin ihr Doppelpunkt d gerade *im* Aequator liegt. Während nun der Doppelpunkt jener Curve im Aequator ungeändert liegen bleibt, mag sich die *eine* Schleife auf der obern, die *andere* auf der untern Halbkugel mehr und mehr ausdehnen; die Ausdehnung mag so weit fortschreiten, bis zuletzt die eine Schleife von oben, die andere von unten her *dem Aequator*

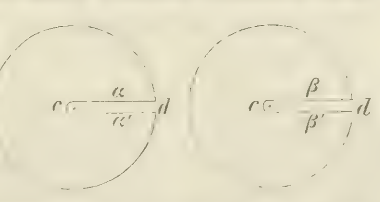
unendlich nahe kommt. Gleichzeitig werden sich alsdann die den beiden Schleifen entsprechenden Theile des Kegelmantels mehr und mehr abplatten, und zwar so weit abplatten, bis zuletzt beide Theile, der eine von oben, der andere von unten her, *fast vollständig in die Horizontalebene hineinfallen.*



In dem gegenwärtigen Zustande wird alsdann der Kegelmantel eine Fläche repräsentiren, von welcher die Horizontalebene überall doppelt bedeckt ist, es mag diese Fläche eine *Windungsfläche*, und ihr Scheitelpunkt ein *Windungspunkt* genannt werden.

Die Windungsfläche kann auf *beliebige* Weise begrenzt, oder auch *un*begrenzt sein. Denken wir uns z. B. unsere Windungsfläche von ihrem Scheitelpunkte aus nur bis zu der um c beschriebenen Kugelfläche hin fortgesetzt, so wird die Begrenzungslinie derselben eine kreisförmige Gestalt besitzen. Und zwar wird, weil längs der Linie cd hin zwischen den beiden daselbst einander durchsetzenden Flächentheilen *kein* Zusammenhang stattfindet, zwischen den beiden im Punkte d einander durchkreuzenden Theilen der Begrenzungslinie ebenfalls *kein* Zusammenhang vorhanden sein. Es wird demnach die Begrenzung der Windungsfläche aus einer *einzigen* Curve bestehen, welche nach zwei vollen Kreisumläufen in sich selber zurückkehrt.

Wir würden übrigens, wie wir sofort übersehen, eine solche kreisförmig begrenzte Windungsfläche auch dadurch erhalten können, dass wir zwei ebene Kreisflächen übereinanderlegen, dieselben längs zweier übereinanderliegenden Radien aufschlitzen, und sodann die entgegengesetzt liegenden Ränder des oberen und des unteren Schlitzes mit einander zusammenheften, nämlich den Rand α mit β', und α' mit β.



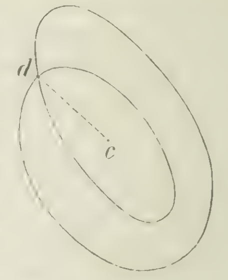
Ein auf der Windungsfläche fortgehender Punkt wird, sobald er die Linie cd passirt, aus dem unteren Blatt der Fläche in das obere, oder auch umgekehrt aus dem oberen in das untere gelangen. Aus diesem Grunde wird es zweckmässig sein, die Linie cd eine

Uebergangslinie zu nennen. Ein Uebergang aus dem *unteren* Blatt in das *obere* hinein kann übrigens auf doppelte Weise bewerkstelligt werden. Denkt man sich nämlich einen Beobachter, welcher in c auf der horizontal liegenden Windungsfläche steht und nach d hin fortsieht, so kann dieser Uebergang entweder von *links* unten nach *rechts* oben, oder auch umgekehrt von *rechts* unten nach *links* oben erfolgen. Charakteristisch für die hier betrachtete Fläche ist es, dass ein auf derselben fortlaufender Punkt den Windungspunkt *zwei*mal umkreisen muss, ehe er in seine Anfangslage zurückkommt.

Durchaus unwesentlich ist es, dass wir uns bis jetzt die Uebergangslinie *gerad*linig gedacht haben; es kann dieselbe eine Curve von beliebiger Krümmung sein. Wir brauchen nämlich die beiden ebenen Kreisflächen, welche zuletzt zur Construction der Windungsfläche in Anwendung gebracht wurden, nicht gerade längs eines *Radius* hin aufzuschlitzen, sondern können dieselben auch längs irgend einer *andern* vom Mittelpunkt nach dem Rande hingehenden *Curve* aufschlitzen. Wenn wir alsdann wiederum die entgegengesetzt liegenden Ränder des oberen und unteren Schlitzes zusammenheften, so haben wir eine Windungsfläche, in welcher die Uebergangslinie durch eine *Curve von beliebiger Gestalt* repräsentirt ist.

Zur Construction einer Windungsfläche sind bis jetzt *zwei* Methoden angegeben worden. Eine *dritte* Methode zur Construction einer solchen Fläche ist folgende:

Man markire in der *Horizontalebene* einen Punkt c, und construire sodann in dieser Ebene eine zweimal um c herum- und schliesslich in sich zurücklaufende Curve, und bezeichne den Doppelpunkt derselben mit d. Diese Curve betrachte man als die Leitcurve eines Kegels, dessen Scheitelpunkt irgendwo im *Raume* liegt; und denke sich sodann diesen Scheitelpunkt auf irgend welchem Wege näher und näher an den Punkt c herankommend; dann wird sich die Mantelfläche des Kegels mehr und mehr abplatten, bis sie zuletzt vollständig mit der Ebene der Leitcurve zusammenfällt. In diesem Endzustande wird dann die Mantelfläche des Kegels wiederum eine *Windungsfläche* sein. Der Punkt c wird den Windungspunkt, und die Linie cd die Uebergangslinie vorstellen.



Es wird zweckmässig sein, hier zugleich andere Windungsflächen, nämlich Windungsflächen *höherer Ordnung*, mit in unsere Betrachtung hineinzuziehen.

Die letzterwähnte Leitcurve lief nach zwei vollen Umdrehungen in ihren Anfang zurück. Nimmt man statt dieser eine Curve, die nach m vollen Umdrehungen in ihren Anfang zurückläuft, so erhält man:

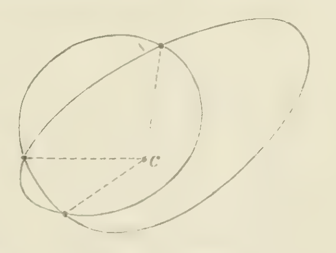
für $m = 1$ eine *gewöhnliche einblättrige Fläche* (Windungsfläche 0ter Ordnung; bei einer solchen Fläche wird irgend ein *beliebiger* Punkt als der Windungspunkt derselben zu bezeichnen sein),

für $m = 2$ die soeben betrachtete, der letzten Figur entsprechende *zweiblättrige Windungsfläche* (nach Riemann's Ausdrucksweise: eine *Windungsfläche* 1ter *Ordnung*),

ferner für $m = 3$ eine *dreiblättrige Windungsfläche* (nach Riemann: eine *Windungsfläche* 2ter *Ordnung*). U. s. w. U. s. w.

Bemerkungen. — Man ersieht hieraus, dass eine *ein*blättrige Windungsfläche nichts anderes ist, als eine *gewöhnliche* einblättrige Fläche (z. B. eine Kreisfläche), und also *gar keine* Uebergangslinie besitzt.

Ferner ergiebt sich aus den angestellten Betrachtungen sofort, dass eine *zwei*blättrige Windungsfläche mindestens *eine* Uebergangslinie besitzt. Doch kann sie deren auch mehr haben. In der That kann man eine solche zweiblättrige Fläche z. B. erhalten unter Anwendung der nebenstehenden Curve, welche [ebenso wie die der vorhergehenden Figur] nach zwei vollen Umläufen in sich zurückkehrt. Diese besitzt alsdann offenbar aber *drei* Uebergangslinien, welche in der Figur durch Punktirung angegeben sind.



Eine *drei*blättrige Windungsfläche besitzt, wie man leicht übersieht, mindestens *zwei* Uebergangslinien. Diese beiden können entweder irgend welchen Winkel mit einander bilden, oder auch dicht neben einander, respective über einander liegen, wie solches leicht zu übersehen ist. U. s. w. U. s. w.

§ 2.

Ueber die stetige Umformung einer Windungsfläche in eine gewöhnliche einblättrige Fläche.

Liegt auf der *Horizontalebene* ein in sich zurücklaufender Faden (etwa ein Gummifaden), dessen einzelne Elemente *biegsam, dehnbar* und auf der Ebene *verschiebbar* sind, so kann man diesen Faden *in stetiger* Weise aus der Gestalt 1. in die Gestalt 2., sodann in die Gestalt 3., endlich in die Gestalt 4. übergehen lassen; [vergl. die folgende Figur].

Denkt man sich den betrachteten Faden als die Leitcurve eines Kegels, dessen Spitze irgendwo im *Raume*, etwa gerade über dem Mittelpunkt der Curve liegt, so werden den verschiedenen Zustän-



den 1., 2., 3., 4. der Curve ebenso viele verschiedene Zustände des Kegels entsprechen. Und ebenso, wie jene vier Zustände der Curve *stetig* in einander übergehen, ebenso wird Gleiches zu sagen sein von den vier entsprechenden Zuständen des Kegelmantels.

Es soll nämlich jede Umformung, bei welcher Zerreissungen und Zusammenheftungen vermieden werden, eine *stetige* heissen. Wenn wir den hier betrachteten Kegelmantel aus dem Zustande 1. in die Zustände 2., 3., 4. übergehen lassen, so müssen wir dabei zwei Flächentheile dieses Mantels in einer gewissen Linie einander *durchsetzen* lassen. Eine solche Durchsetzung geht nun aber [zufolge unserer Vorstellungen pg. 65] vor sich, ohne dass dabei die Punkte des einen Flächentheiles mit denen des andern längs jener Linie hin in irgend welchen Zusammenhang treten, geht also vor sich, ohne dass dabei irgend welche *Zusammenheftungen* eintreten. Ebenso wenig finden dabei *Zerreissungen* irgend welcher Art statt. Demnach ist die Umformung unseres Kegels aus dem Zustande 1. in die Zustände 2., 3., 4 in der That eine *stetige* zu nennen.

Die Umformung des Kegels 1. in die Gestalten 2., 3., 4. ist eine *stetige* zu nennen, an welchem Ort des Raumes die Spitze des Kegels auch liegen mag. Sie wird also auch dann noch eine *stetige* bleiben, wenn wir uns jene Spitze in der Ebene der Curve, oder wenigstens dieser Ebene *unendlich nahe* gelegen denken. Thun wir aber dies, und verfügen wir *im Uebrigen* über die Lage jener Spitze in geeigneter Weise, so ist der Kegel 1. eine *gewöhnliche einblättrige Fläche*, und der Kegel 4. eine *zweiblättrige Windungsfläche*.

(1.) Also der Satz: *Eine gewöhnliche einblättrige Fläche kann mittelst stetiger Umformung in eine zweiblättrige Windungsfläche verwandelt werden.*

Man sieht bereits, dass man durch die angegebene Operationsmethode sofort auch zu folgendem allgemeineren Satz gelangt:

(2.) *Eine gewöhnliche einblättrige Fläche kann durch stetige Umformung in eine m-blättrige Windungsfläche verwandelt werden, wo m eine beliebig gegebene Zahl aus der Reihe* 1, 2, 3, 4 . . . *vorstellt. Selbstverständlich ist dieser Process auch rückwärts ausführbar, so dass man also eine beliebig gegebene m-blättrige Windungsfläche mit-*

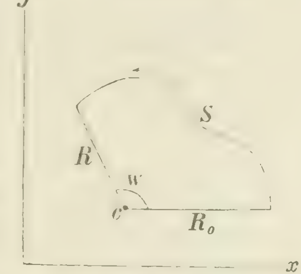
telst stetiger Umformung in eine gewöhnliche einblättrige Fläche zu verwandeln vermag.

§. 3.

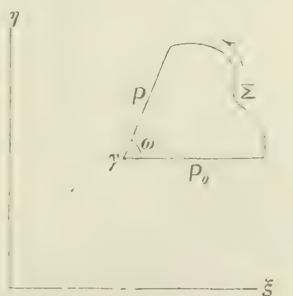
Analytische Einkleidung des in Rede stehenden Umformungsprocesses.

Man kann eine Linie durch die Bewegung eines Punktes, und ebenso eine Fläche durch die Bewegung einer Linie entstehen lassen.

Wir denken uns in der xy-Ebene einen Radius, welcher um seinen Ausgangspunkt c in *positiver* Richtung und mit *beliebiger Geschwindigkeit* rotirt, und dessen Länge sich von Augenblick zu Augenblick auf ganz *beliebige* Weise ändert. Durch die Rotationsbewegung des Radius wird eine ebene Fläche erzeugt werden, welche, so lange jene Bewegung andauert, fortwährend im Wachsen begriffen ist. Diese Fläche ist in jedem Augenblick begrenzt von denjenigen beiden geraden Linien R_0 und R, durch welche die *Anfangs*lage und die *augenblickliche* Lage des Radius dargestellt sind, und überdies von derjenigen krummen Linie S, auf welcher der Endpunkt des Radius sich inzwischen fortbewegt hat. Von diesen drei Begrenzungslinien ist es die Linie R, welche, während sie in ihrer Rotationsbewegung weiter und weiter fortschreitet, ein fortwährendes Wachsen der Fläche bewirkt.



Neben der Fläche $(R_0 R S)$ denken wir uns gleichzeitig eine zweite, und ebenfalls noch im Wachsen begriffene Fläche $(\mathsf{P}_0 \mathsf{P} \Sigma)$. Diese letztere mag an irgend einer andern Stelle des Raumes, etwa in der $\xi\eta$-Ebene, auf ganz analoge Weise entstehen, nämlich erzeugt werden durch einen Radius, der in jener Ebene in *positiver* Richtung um seinen Ausgangspunkt γ rotirt, und dessen Länge sich ebenfalls von Augenblick zu Augenblick ändert.



Bei der Fläche $(R_0 R S)$ waren die Geschwindigkeit, mit welcher der erzeugende Radius rotirt, und die Schnelligkeit, mit welcher die Länge des Radius zu- oder abnimmt, durchaus *willkürlich*. Anders soll es sich bei der Fläche $(\mathsf{P}_0 \mathsf{P} \Sigma)$ verhalten. *Sind nämlich in irgend einem Augen-*

blick R und P die Längen der beiden erzeugenden Radien, und w und ω die von ihnen beschriebenen Rotationswinkel, so soll beständig

$$\mathsf{P} = \sqrt[m]{R} \quad \textit{und} \quad \omega = \frac{\mathrm{w}}{m}$$

sein, wo m eine beliebig gegebene positive ganze Zahl vorstellt. Lässt man man das Azimuth w von 0° bis $m \cdot 360°$, mithin das Azimuth ω von 0° bis 360° anwachsen, so wird sich, auf diese Weise und unter sonst geeigneten Dispositionen, die eine Fläche in eine *m-blättrige Windungsfläche*, die andere in eine *gewöhnliche einblättrige Fläche* verwandeln.

Erläuterung. — Die Flächen $(R_0 RS)$ und $(\mathsf{P}_0 \mathsf{P} \Sigma)$ entstehen und wachsen gleichzeitig. Während aber das Wachsen der ersteren *auf völlig freie und willkürliche Weise* vor sich geht, ist das Wachsen der letztern ***auf bestimmte Weise gebunden*** **an das der erstern.**

Wir wollen uns beide Flächen *materiell* denken. Die Fläche $(R_0 RS)$ wird in dem Augenblick, wo ihr erzeugender Radius einen Rotationswinkel von 360° beschrieben hat, zwei Randgebiete R_0 und R besitzen, welche dicht neben einander liegen. Zwischen diesen beiden Randgebieten mag aber keine Vereinigung eintreten. Wir wollen nämlich den erzeugenden Radius, sobald er nach einer Drehung von 360° zu seiner Anfangslage R_0 zurückgekehrt ist, in seiner Rotationsbewegung weiter fortfahren lassen, und gleichzeitig wollen wir das von ihm nachgeschleppte, neu entstehende Flächengebiet, ohne mit dem bei R_0 schon vorhandenen in Zusammenhang zu treten, über dieses hinweg sich fortschieben lassen. Die Fläche $(R_0 RS)$ wird alsdann die Gestalt einer *Schraubenfläche* annehmen, in welcher die Anzahl der über einander liegenden Blätter mit jeder Umdrehung des erzeugenden Radius um Eins zunimmt, und bei welcher eine Vereinigung der bei R_0 und R liegenden Randgebiete nun weiterhin völlig unmöglich ist.

Wir ändern gegenwärtig unsere Vorstellungen. Die Fläche $(R_0 RS)$ mag nicht geradezu wie eine *Schraubenfläche*, sondern in etwas *anderer* Art wachsen. Während nämlich bei Entstehung einer Schraubenfläche das im Wachsen begriffene obere Blatt der Fläche beständig auf dem schon vorhandenen darunter liegenden Blatt sich *fortschiebt*, nehmen wir an, dass bei Entstehung der Fläche $(R_0 RS)$ das im Wachsen begriffene Blatt die schon vorhandenen Blätter beliebig oft, und an beliebigen Stellen *durchsetzen* dürfe, dass also die voranschreitende Begrenzungslinie R des neu entstehenden Blattes sich gewissermassen wie eine scharfe Kante oder Schneide verhalte, welche die schon fertigen Blätter nach Belieben durchdringen kann.

Wir lassen nun die voranschreitende Kante R von ihrer Anfangslage R_0 aus im Ganzen m volle Umdrehungen machen, und lassen dieselbe im Verlaufe dieser Umdrehungen in jedem Augenblick nach Belieben entweder das schon früher entstandene Flächengebiet durchschneiden, oder ohne dasselbe zu verletzen ruhig darüber hingleiten; jedoch so, dass sie schliesslich nach Ablauf jener m Umdrehungen in ihre Anfangslage R_0 hineinfällt. Ihre Länge mag sich während jener m Umdrehungen von

Augenblick zu Augenblick beliebig geändert haben, zuletzt aber wiederum ebenso gross geworden sein, als sie zu Anfang war. Die in solcher Weise entstandene Fläche $(R_0 R S)$ wird alsdann zwei bei R_0 und R unmittelbar neben einander liegende Randgebiete haben. Lassen wir zwischen diesen beiden Randgebieten eine *Zusammenschmelzung* eintreten, und setzen wir ferner [in Uebereinstimmung mit den von uns angenommenen Grundvorstellungen; pg. 65] fest, dass in jeder Linie, wo zwei Theile der Fläche einander durchsetzen, zwischen diesen beiden Theilen *kein* Zusammenhang vorhanden sein soll, so haben wir eine Fläche vor uns, die nichts Anderes ist, als eine *m-blättrige Windungsfläche*, deren Windungspunkt in c liegt, und deren Rand durch eine einzige nach m vollen Umgängen in sich selber zurücklaufende Curve S dargestellt wird.

Während nun die Fläche $(R_0 R S)$ in solcher Weise anwächst und schliesslich in eine m-blättrige Windungsfläche übergeht, nimmt gleichzeitig die von ihr abhängende Fläche $(\mathsf{P}_0 \mathsf{P} \Sigma)$ eine sehr viel einfachere Gestalt an. Da nämlich die von den Radien R und P gleichzeitig beschriebenen Rotationswinkel w und ω in jedem Augenblick durch die Gleichung

$$\omega = \frac{\mathrm{w}}{m}$$

mit einander verbunden sind, der Radius R aber m volle Umdrehungen gemacht hat, so wird gleichzeitig der Radius P nur *eine* Umdrehung ausgeführt haben. Und da ferner die Längen jener beiden Radien in jedem Augenblick durch die Gleichung

$$\mathsf{P} = \sqrt[m]{R}$$

verbunden sind, der Radius R aber nach Ablauf seiner m Umdrehungen wieder seine ursprüngliche Länge R_0 angenommen hat, so wird auch der Radius P nach Ausführung seiner einen Umdrehung wiederum zu seiner anfänglichen Länge P_0 zurückgekehrt sein.

Nach Ablauf des ganzen Processes haben wir also in der xy-Ebene eine *m-blättrige Windungsfläche*, mit dem *Centrum* oder *Windungspunkt* c, andererseits in der $\xi\eta$-Ebene eine *gewöhnliche einblättrige Fläche* mit dem *Centrum* γ. Zerlegt man die erstere in 360 Sectoren von je 1 Grad, so besitzen die *correspondirenden* Sectoren der letztern je $\frac{1}{m}$ Grad. Dabei wird die gegenseitige Lagerung benachbarter Sectoren auf der einen Fläche *genau dieselbe* sein, wie die gegenseitige Lagerung der correspondirenden Sectoren auf der andern. Durch geeignete Biegungen und Dehnungen wird man daher die eine Fläche mit der andern, und zwar jeden Sector der einen mit dem correspondirenden der andern zur Deckung bringen können. *Demgemäss ist die eine Fläche als eine stetige Umformung der andern zu bezeichnen* [wie solches auf anderm Wege schon früher erkannt wurde, Satz (2.) pg. 70].

Versteht man jetzt unter *correspondirenden Punkten* der beiden Flächen solche, die auf *correspondirenden Radien* liegen, deren Azi-

muthe also der Relation entsprechen: $\omega = \frac{\mathrm{w}}{m}$, und deren Centraldistanzen überdies der Gleichung Genüge leisten: $\varrho = \sqrt[m]{r}$, so hat man für je zwei solche einander correspondirende Punkte (r, w) und (ϱ, ω) die Formeln: $r = \varrho^m$ und $\mathrm{w} = m\omega$, mithin:

$$re^{i\mathrm{w}} = (\varrho e^{i\omega})^m, \quad \text{wo} \quad i = \sqrt{-1}\,. \tag{3.}$$

Bezeichnet man die rechtwinkligen Coordinaten dieser correspondirenden Punkte (r, w) und (ϱ, ω) respective mit (x, y) und (ξ, η), und setzt man $x + iy = z$, ebenso $\xi + i\eta = \zeta$, so ergiebt sich sofort [vgl. die Figuren p. 71]:

$$z - c = re^{i\mathrm{w}} \quad \text{und} \quad \zeta - \gamma = \varrho e^{i\omega}. \tag{R.}$$

Dabei steht c für $a + ib$ und γ für $\alpha + i\beta$, wo (a, b) und (α, β) die rechtwinkligen Coordinaten dieser Punkte c und γ vorstellen. Mittelst dieser Relationen (R.) geht aber die Formel (3.) über in

$$z - c = (\zeta - \gamma)^m. \tag{4.}$$

Also der Satz: *Ist in der z-Ebene eine m-blättrige Windungsfläche mit dem Windungspunkt c, ferner in der ζ-Ebene eine gewöhnliche einblättrige Fläche mit dem Windungspunkt γ gegeben, und setzt man zwischen den Punkten z und ζ dieser beiden Flächen die Correspondenz fest:*

$$z - c = (\zeta - \gamma)^m, \tag{5.}$$

so wird man durch stetige Umformung die eine Fläche in die andere, und zwar jedweden Punkt z der einen in den correspondirenden Punkt ζ der andern zu verwandeln im Stande sein.

Bemerkung. — Die Einrichtung der in unsern Figuren pg. 71 gezeichneten Axensysteme zeigt sofort, dass als *obere* Seite der xy-Ebene und $\xi\eta$-Ebene diejenigen zu bezeichnen sind, die in jenen Figuren wirklich nach oben gewendet sind. Lässt man nun den Punkt z den Rand der m-blättrigen Windungsfläche umlaufen, so wird gleichzeitig der *correspondirende* Punkt ζ den Rand der einblättrigen Fläche durchwandern. Und diese beiden einander *correspondirenden* Umlaufsbewegungen sind, wie man sieht, entweder *beide positiv*, oder aber *beide negativ*.

§ 4.

Betrachtung der Function $\sqrt{(z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)}$.

Wir wollen die Function

$$f = f(z) = \sqrt{(z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)} \tag{1.}$$

untersuchen, indem wir die Variable z und die Constanten c_1, c_2, c_3 als Punkte in der Horizontalebene uns vorstellen. Sind r_1, r_2, r_3 die Entfernungen des variablen Punktes z von den festen Punkten

c_1, c_2, c_3, und ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 die Azimuthe dieser Entfernungen gegen die x-Axe des zu Grunde gelegten Coordinatensystems, so ist

$$z - c_1 = r_1 e^{i\vartheta_1},$$
$$z - c_2 = r_2 e^{i\vartheta_2},$$
$$z - c_3 = r_3 e^{i\vartheta_3},$$

folglich:

$$f = \sqrt{r_1 r_2 r_3} \cdot e^{\frac{i(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3)}{2}}, \tag{2.}$$

oder was dasselbe ist:

$$f = \sqrt{r_1 r_2 r_3}\left[\cos\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3}{2}\right)\right], \tag{2a.}$$

wobei unter $\sqrt{r_1 r_2 r_3}$ stets der *positive* Werth dieser Wurzel zu verstehen ist. Aus (1.) wie aus (2.) folgt, dass f *nur dann* verschwindet, wenn z in einen der Punkte c_1, c_2, c_3 hineinfällt.

Versteht man nämlich unter φ eine *reelle* Grösse, so kann ein Ausdruck von der Form

$$\cos\varphi + i \sin\varphi$$

niemals verschwinden. Denn zu seinem Verschwinden würde ein gleichzeitiges Nullwerden von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ erforderlich sein; was zufolge der Relation $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ *unmöglich ist.*

Der in (2a.) auf der rechten Seite stehende Ausdruck kann daher *nur dann* verschwinden, wenn einer der Factoren r_1, r_2, r_3 verschwindet. U. s. w.

Für jedwede Lage des Punktes z hat die Function f zwei einander entgegengesetzte Werthe: f und $(-f)$. Diese simultanen Werthe f und $(-f)$ ändern sich, falls man z irgend eine Curve

$$z', z'', z''' \ldots\ldots Z \tag{σ.}$$

durchlaufen lässt, Schritt für Schritt in stetiger Weise, und liefern also zwei der Curve entsprechende Reihen:

$$f', \quad f'', \quad f''', \ldots\ldots F, \tag{α.}$$
$$(-f'), (-f''), (-f'''), \ldots (-F), \tag{β.}$$

deren jede aus lauter stetig zusammenhängenden Werthen besteht. Passirt die Curve (σ.) eine der Stellen c_1, c_2, c_3, so erfolgt in diesem Augenblick ein *Contact* der beiden Reihen, indem alsdann die augenblicklichen Werthe derselben *einander gleich*, beide $= 0$ werden. Setzt man hingegen fest, die Curve (σ.) solle jene drei Stellen c_1, c_2, c_3 *vermeiden*, so sind die simultanen Werthe der beiden Reihen (α.), (β.) stets von einander verschieden. Bei der genannten Festsetzung wird also zwischen den beiden Reihen niemals ein *Contact*, mithin auch niemals eine *Verwechselung* möglich sein; so dass also jede derselben durch Angabe ihres Anfangswerthes längs der ganzen Curve *eindeutig* bestimmt ist.

Lässt man also den Punkt z, unter Vermeidung der drei Stellen c_1, c_2, c_3, irgend welche Curve

$$z', z'', z''', \ldots\ldots Z$$

durchlaufen, so entsprechen dieser Curve zwei stetige Werthreihen der Function

$$f = \sqrt{(z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)}. \tag{3.}$$

Und zwar wird jede dieser beiden Reihen durch Angabe ihres Anfangswerthes längs der ganzen Curve eindeutig bestimmt sein.

(4.) *Eine wesentlich andere Frage aber ist die, ob eine solche Werthreihe zu ihrem Anfangswerthe zurückkehrt, sobald man den Punkt z nach irgend welcher, die Stellen c_1, c_2, c_3 vermeidenden Bewegung schliesslich wieder in seine Anfangslage zurückführt.*

Bemerkung. — Die Anwendung des Wortes *Contact* dürfte im Vorhergehenden um so zutreffender sein, als dasselbe einer nahe liegenden *geometrischen* Vorstellungsweise entspricht. Setzt man nämlich

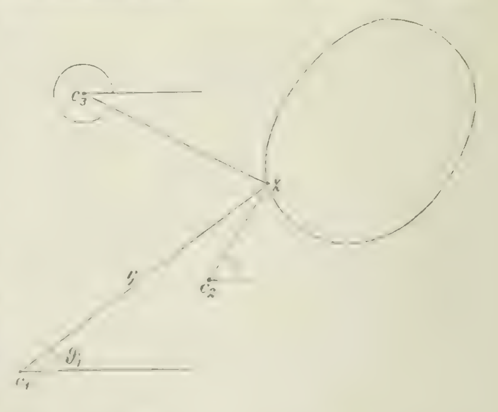
$$f = u + iv,$$

mithin

$$(-f) = (-u) + i(-v),$$

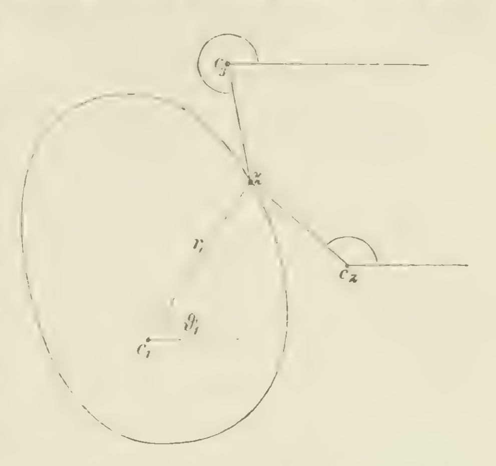
und betrachtet man u, v und $(-u)$, $(-v)$ als zwei Punkte in der uv-Ebene, so werden diese beiden Punkte, während z die Curve $(\sigma.)$ durchwandert, irgend welche Bahnen beschreiben. Dabei aber werden diese beiden Punkte, so lange die Stellen c_1, c_2, c_3 von der Curve $(\sigma.)$ vermieden werden, niemals mit einander in *Contact* kommen können.

Wir gehen über zur Beantwortung der in (4.) gestellten Frage. Lässt man den Punkt z eine geschlossene Curve durchlaufen, welche *keinen* der Punkte c_1, c_2, c_3 umschliesst, so kehren hierbei [wie die geometrische Anschauung zeigt] die Azimuthe ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 zu denselben Werthen zurück, die sie zu Anfang dieser Bewegung besassen. Gleiches gilt selbstverständlich von r_1, r_2, r_3, und zufolge (2a.) also auch von f. Denn es sollte unter $\sqrt{r_1 r_2 r_3}$ stets der *positive* Werth dieser Wurzel verstandn werden.



Lässt man hingegen den Punkt z eine geschlossene Bahn durchlaufen, welche *einen* der Punkte c_1, c_2, c_3, z. B. den Punkt c_1 umschliesst, so wird ϑ_1 um $\pm 2\pi$ wachsen, während ϑ_2, ϑ_3 und r_1,

r_2, r_3 zu ihren anfänglichen Werthen zurückkehren. Hieraus folgt, dass die Function f (2a.) bei einem solchen Umlauf einen Werth erlangt, der zu ihrem anfänglichen Werthe *entgegengesetzt* ist.



Lässt man ferner den Punkt z eine geschlossene Curve durchlaufen, welche *zwei* der Punkte c_1, c_2, c_3, z. B. c_1 und c_2 umschliesst, so wird jedes der beiden Azimuthe ϑ_1, ϑ_2 um $\pm 2\pi$ wachsen, und zwar entweder *beide* um $+ 2\pi$, oder *beide* um $- 2\pi$. Hieraus folgt, dass die Function f (2a.) bei einem solchen Umlauf zu ihrem anfänglichen Werthe zurückkehrt. U. s. w. U. s. w.

Auf Grund dieser Ueberlegungen kann der vorhergehende Satz (3.) jetzt weiter vervollständigt und so ausgesprochen werden: *Lässt man den Punkt z, unter Vermeidung der Stellen c_1, c_2, c_3, irgend welche Curve:*

$$z', z'', z''', \ldots . Z$$

durchlaufen, so entsprechen dieser Curve **zwei** *stetige Werthreihen der gegebenen Function*

$$f = \sqrt{(z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)}. \tag{5.}$$

Jede solche Reihe

$$f', f'', f''', \ldots . F$$

ist durch Angabe ihres Anfangswerthes f' längs der ganzen Curve **eindeutig** *bestimmt. Lässt man nun jene Curve, immer unter Vermeidung der Punkte c_1, c_2, c_3, in sich zurückkehren, also Z identisch werden mit z', so wird sich für diese Reihe ein Endwerth F herausstellen, welcher mit ihrem Anfangswerth f'* **gleich** *oder* **entgegengesetzt** *ist, jenachdem die Anzahl der von der Curve umschlossenen Punkte c_1, c_2, c_3* **gerade** (0, resp. 2) *oder* **ungerade** (1, resp. 3) *ist.*

§ 5.

Weitere Betrachtung der Function $\sqrt{(z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)}$. Zerlegung ihres ganzen Werthvorraths in zwei gesonderte Systeme.

Es seien $(+ f_0)$ und $(- f_0)$ die Werthe von f in irgend einem Punkte z_0. Wir beschreiben um z_0 ein kleines Flächenstück und

pflanzen auf diesem Flächenstück sowohl dasjenige Werthsystem $S(+f_0)$ auf, welches an $(+f_0)$ sich stetig anschliesst, als auch dasjenige Werthsystem $S(-f_0)$, welches mit $(-f_0)$ stetig zusammenhängt.

Wir lassen nun jenes kleine Flächenstück nach allen Seiten hin mehr und mehr anwachsen und gleichzeitig die genannten beiden Werthsysteme in entsprechender Weise sich ausdehnen, indem wir dabei zu jedem der beiden Systeme immer nur solche Werthe hinzutreten lassen, die sich stetig anschliessen.

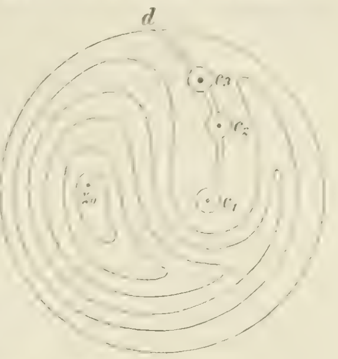
Wir haben alsdann zwei im Wachsen begriffene Werthsysteme vor uns, deren gemeinschaftliche Peripherie sich ähnlich wie ein im Punkt z_0 erregter Wellenring, nach allen Seiten weiter und weiter fortbewegt. Geschieht diese Fortbewegung nach allen Seiten hin mit gleicher Geschwindigkeit, so wird jene Peripherie, falls sie ursprünglich kreisförmig war, beständig kreisförmig bleiben. Ist hingegen die Geschwindigkeit nach verschiedenen Seiten verschieden, so wird jene Peripherie im Verlaufe der Zeit andere und andere Gestalten annehmen können, und zwar Gestalten von beliebig unregelmässiger Form.

Wie dem auch sei, — jedenfalls wird ein Contact zwischen jenen beiden im Wachsen begriffenen Werthsystemen $S(+f_0)$ und $S(-f_0)$, mithin auch die Gefahr einer Verwechselung *niemals* eintreten können, falls man nur dafür sorgt, dass die gegebenen Punkte c_1, c_2, c_3 beständig *ausserhalb* der gemeinschaftlichen Peripherie der beiden Systeme bleiben. Um die Hauptsache hervorzuheben:

(6.) *So lange die Punkte c_1, c_2, c_3 ausserhalb der gemeinschaftlichen Peripherie der Systeme $S(+f_0)$ und $S(-f_0)$ bleiben, werden diese beiden Systeme ohne gegenseitigen Contact, mithin eindeutig bestimmt sein, und in jedwedem Punkte z entgegengesetzte Werthe besitzen.*

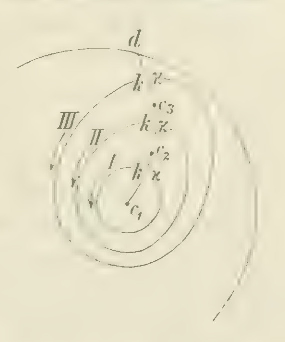
Wir betrachten jetzt die Horizontalebene als eine um den Anfangspunkt $z=0$ des Coordinatensystems beschriebene, unendlich grosse *Kreisfläche* $\mathfrak{K}$, und führen in dieser einen *Schnitt* aus: $c_1c_2c_3d$. Oder genauer ausgedrückt: Wir sondern von der Fläche $\mathfrak{K}$ einen *unendlich schmalen Flächenstreifen* ab, welcher die Punkte c_1, c_2, c_3 in sich enthält, welcher nämlich bei c_1 beginnt und, über c_2 und c_3 fortlaufend, bis zum Rande der Kreisfläche $\mathfrak{K}$, etwa bis d, sich erstreckt. *Nach* Absonderung dieses schmalen Streifens bezeichnen wir die Fläche mit $\mathfrak{K}'$. Diese *neue* Fläche $\mathfrak{K}'$ besitzt demgemäss eine Randcurve, welche theils aus dem kreisförmigen Rande von $\mathfrak{K}$, theils aus den beiden Uferlinien des Schnittes $c_1c_2c_3d$ besteht.

Solches festgesetzt, mag nun die gemeinschaftliche Peripherie der Systeme $S(+f_0)$ und $S(-f_0)$, vom Punkte z_0 aus, in solcher Weise sich ausdehnen, dass sie, beständig *innerhalb* $\mathfrak{R}'$ bleibend, dem Rande von $\mathfrak{R}'$ näher und näher kommt und schliesslich in denselben übergeht. In solcher Art entstehen alsdann zwei die ganze Fläche $\mathfrak{R}'$ überdeckende Werthsysteme $S(+f_0)$ und $S(-f_0)$, *die, zufolge* (6.), *ohne gegenseitigen Contact sind, und die überdiess in jedwedem innerhalb* $\mathfrak{R}'$ *liegendem Punkte* z



(6a.) *entgegengesetzte Werthe haben. Es kann daher das eine System aus dem andern abgeleitet werden durch Multiplication mit* (-1).

Es bleibt noch übrig, die Werthe der beiden Systeme an den Ufern des Schnittes $c_1c_2c_3d$ zu untersuchen.*) Sind k und $\varkappa$ zwei zu beiden Ufern der Schnittstrecke (c_1c_2) einander gegenüberliegende Punkte, und zieht man von k aus eine Curve I, welche innerhalb $\mathfrak{R}'$ fortschreitend schliesslich nach $\varkappa$ gelangt, so bilden die Werthe, welche das System $S(+f_0)$ längs dieser Curve I besitzt, eine stetig zusammenhängende Reihe. Zufolge des Satzes (5.) hat aber diese Reihe im Anfangs- und Endpunkt der Curve, d. i. in k und $\varkappa$ *entgegengesetzte* Werthe. Denn die Curve



umschliesst nur *einen* der Punkte c_1, c_2, c_3, nämlich nur c_1. Das System $S(+f_0)$ hat also in k und $\varkappa$ *entgegengesetzte* Werthe.

Sind hingegen k und $\varkappa$ zwei Uferpunkte der Schnittstrecke (c_2c_3), so findet man, auf Grund des Satzes (5.) und unter Anwendung der Curve II, dass das System $S(+f_0)$ in k und $\varkappa$ *gleiche* Werthe hat.

Gehören endlich k, $\varkappa$ zur Schnittstrecke (c_3d), so findet man, mittelst der Curve III, dass das System $S(+f_0)$ in k und $\varkappa$ *entgegengesetzte* Werthe hat.

*) In den Figuren sind die beiden Uferlinien des Schnittes $c_1c_2c_3d$ bald durch zwei Parallellinien, bald nur durch *eine einzige* Linie angedeutet. Auch wird es hin und wieder zweckmässig sein, diesen Schnitt in den Punkten c_1, c_2, c_3 mit kleinen *kreisförmigen Erweiterungen* zu versehen, wie solches z. B. geschehen ist in der ersten Figur der gegenwärtigen Seite. Durch diese kreisförmigen Erweiterungen wird alsdann z. B. deutlich zur Anschauung gebracht, dass die genannten Punkte *ausserhalb* $\mathfrak{R}'$ liegen.

Die Werthe, welche das System $S(+f_0)$ zu beiden Ufern des (7.) *Schnittes $c_1c_2c_3d$ besitzt, sind also längs der Strecke (c_1c_2) einander entgegengesetzt, längs der Strecke (c_2c_3) einander gleich, und längs der Strecke (c_3d) wieder einander entgegengesetzt.*

Genau dasselbe gilt von dem System $S(-f_0)$, wie man solches z. B. schon daraus erkennt, dass die Werthe des *einen* Systems aus denen des *andern* durch Multiplication mit (-1) sich ergeben.

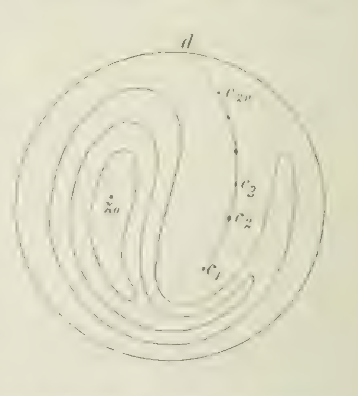
§ 6.

Betrachtung der Function $\sqrt{(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_{2n})}$. Ihre Ausbreitung auf einer Riemann'schen Fläche.

Die soeben durchgeführten Betrachtungen sind sofort übertragbar auf die *allgemeinere* Function

$$f = \sqrt{(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_{2n})}. \tag{8.}$$

Denkt man sich nämlich wiederum die Horizontalebene als eine unendlich grosse, um $z=0$ beschriebene Kreisfläche $\mathfrak{K}$, und diese Fläche durch einen Schnitt $c_1c_2c_3\ldots c_{2n}d$ in eine neue Fläche $\mathfrak{K}'$ verwandelt, so werden sich, falls man die Werthe von f in irgend einem Punkte z_0 mit $(+f_0)$ und $(-f_0)$ benennt, von diesem Punkte aus zwei die ganze Fläche $\mathfrak{K}'$ überdeckende Werthsysteme $S(+f_0)$ und $S(-f_0)$ ausbreiten lassen, von denen jedes für sich betrachtet auf $\mathfrak{K}'$ stetig ist, und die zusammengenommen den ganzen Werthvorrath der gegebenen Function repräsentiren.



Ferner wird man, analog dem Satz (7.), finden, *dass die Werthe, welche das System $S(+f_0)$ zu beiden Seiten des Schnittes $c_1c_2c_3\ldots c_{2n}d$ besitzt, längs der Strecke (c_1c_2) entgegengesetzt, längs (c_2c_3) einander* (9.) *gleich, längs (c_3c_4) wieder einander entgegengesetzt sind u. s. f.; so dass also Gegensatz herrscht auf den Strecken (c_1c_2), (c_3c_4), (c_5c_6), $\ldots(c_{2n-1}c_{2n})$, andererseits aber Gleichheit in den Strecken (c_2c_3), (c_4c_5), (c_6c_7), $\ldots(c_{2n}d)$.*

(10.) *Gleiches gilt für das System $S(-f_0)$. Denn das eine System entsteht aus dem andern durch Multiplication mit (-1)*; vgl. (6a.).

Wir denken uns jetzt die Fläche $\mathfrak{K}'$ *doppelt*, nämlich gegeben in zwei genau übereinander liegenden Exemplaren $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{L}'$, die etwa von einander getrennt sein können durch einen unendlich

dünnen Zwischenraum. Das System $S(+f_0)$ lassen wir auf $\mathfrak{K}'$, verpflanzen aber das andere System $S(-f_0)$ von $\mathfrak{K}'$ nach $\mathfrak{L}'$. *Alsdann*
(11.) *werden also je zwei übereinander liegende Punkte der Flächen $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{L}'$ mit einander entgegengesetzten Functionswerthen belastet sein.*

Wir haben alsdann *zwei* übereinander liegende Schnitte $c_1 c_2 \ldots d$, einen im *obern* Blatt $\mathfrak{K}'$, den andern im *untern* Blatt $\mathfrak{L}'$. Sind nun k, $\varkappa$ zwei einander gegenüberliegende Uferpunkte des *obern*, und l, λ die darunter befindlichen Uferpunkte des *untern* Schnitts, so finden zwischen den in je vier solchen Punkten vorhandenen Functionswerthen einfache Beziehungen statt.

Gehören z. B. die vier Punkte k, $\varkappa$, l, λ zu einer der Strecken $(c_1 c_2)$, $(c_3 c_4)$, $(c_5 c_6)$, $\ldots$ $(c_{2n-1} c_{2n})$, so sind, zufolge (9.), in k und $\varkappa$ *entgegengesetzte* Werthe vorhanden. Ebenso aber sind, zufolge (11.), auch die Werthe in den übereinander liegenden Punkten k und l einander *entgegengesetzt*, und ebenso, aus gleichem Grunde, auch die Werthe in $\varkappa$ und λ. Bezeichnet man also z. B. den in k vorhandenen Werth mit K, so hat man in jenen vier Punkten im Ganzen folgende Werthe:

in k: $+K$,	in $\varkappa$: $-K$,
in l: $-K$,	in λ: $+K$.

Diese Formeln zeigen, dass in den Uferlinien k und λ *gleiche* Werthe vorhanden sind und dass also bei einer *Zusammenheftung* dieser beiden (einander schräg gegenüberliegenden) Uferlinien von beiden Seiten her *gleiche* Werthe zusammenstossen werden. Und ebenso wird, jenen Formeln zufolge, Analoges auch dann eintreten, wenn man die beiden Ufer $\varkappa$ und l *zusammenheftet*.

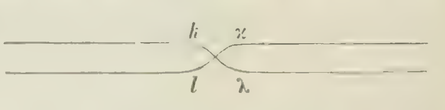
Gehören andererseits die vier Punkte k, $\varkappa$, l, λ zu einer der Strecken $(c_2 c_3)$, $(c_4 c_5)$, $(c_6 c_7)$, $\ldots$ $(c_{2n} d)$, so lassen sich die daselbst vorhandenen Functionswerthe, zufolge (9.) und (11.), so darstellen:

in k: $+K$,	in $\varkappa$: $+K$,
in l: $-K$,	in λ: $-K$,

Es werden also gleiche Werthe zusammenstossen, wenn man einerseits k mit $\varkappa$, und andererseits l mit λ zusammenheftet.

Denkt man sich die genannten Zusammenheftungen (es sind deren je zwei bei jeder einzelnen Schnittstrecke) wirklich ausgeführt, so vereinigen sich dadurch die Flächen $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{L}'$ zu einer einzigen *zweiblättrigen* Fläche $(\mathfrak{K}' + \mathfrak{L}')$. Diese letztere besteht also der Hauptsache nach aus zwei übereinander liegenden unendlich grossen Kreis-

flächen, die durch n Doppelbrücken mit einander verbunden sind. Die erste dieser Brücken zieht sich hin längs der Linie $(c_1 c_2)$, die zweite längs $(c_3 c_4)$, die dritte längs $(c_5 c_6)$ u. s. w., endlich die letzte längs $(c_{2n-1} c_{2n})$. Bei jeder solchen Doppelbrücke *durchsetzen* einander zwei Flächentheile. Die Durchsetzung findet statt in einer gewissen Linie. In dieser Linie aber findet [zufolge der von uns adpotirten Grundsätze p. 65] zwischen den beiden einander durchsetzenden Flächentheilen *kein* Zusammenhang statt.



Im Einklang mit unsern früheren Benennungen können wir jede von jenen Doppelbrücken als eine in der zweiblättrigen Fläche vorhandene *Uebergangslinie*, und die beiden Endpunkte einer solchen Doppelbrücke oder Uebergangslinie als *Windungspunkte* bezeichnen. In der That wollen wir das einen solchen Punkt umgebende Gebiet der zweiblättrigen Fläche $(\mathfrak{K}' + \mathfrak{L}')$ als eine *Windungsfläche* d. i. als eine *continuirliche Kegelfläche* uns vorstellen, so dass also jene zweiblättrige Fläche $(\mathfrak{K}' + \mathfrak{L}')$ in ihrem Innern durchweg *stetig* verläuft, während sie äusserlich begrenzt ist von zwei unendlich grossen Kreislinien.

Der ganze Werthvorrath der Function f (8.) war repräsentirt durch die beiden auf $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{L}'$ ausgebreiteten Systeme $S(+f_0)$ und $S(-f_0)$. Und diese beiden Systeme schmelzen, bei der Vereinigung jener beiden Flächen, in stetiger Weise zusammen zu einem einzigen System. Also der Satz:

Der ganze Werthvorrath der Function

$$f = \sqrt{(z - c_1)(z - c_2) \ldots (z - c_{2n})} \tag{12.}$$

kann in eindeutiger und stetiger Weise auf einer gewissen zweiblättrigen Fläche $(\mathfrak{K}' + \mathfrak{L}')$ *ausgebreitet werden.*

Diese Fläche $(\mathfrak{K}' + \mathfrak{L}')$ *mag hinfort eine Riemann'sche Fläche heissen. Sie besitzt* $2n$ *Windungspunkte:* $c_1, c_2, \ldots c_{2n}$ *und* n *Uebergangslinien:* $(c_1 c_2)$, $(c_3 c_4)$, $(c_5 c_6)$, $\ldots$ $(c_{2n-1} c_{2n})$. *Jede solche Uebergangslinie ist übrigens nur bestimmt in Bezug auf ihre beiden Endpunkte, und ganz willkürlich hinsichtlich ihres Verlaufs zwischen diesen beiden Punkten.*

Bemerkung. — Die beiden Flächentheile, welche einander in einer Uebergangslinie durchsetzen, sind in unmittelbarer Nähe dieser Linie mit sehr verschiedenen, nämlich mit entgegengesetzten Functionswerthen belastet. Trotzdem ist die Function auf der in Rede stehenden zweiblättrigen Fläche als *stetig* zu bezeichnen; zufolge des Satzes (3.) p. 66.

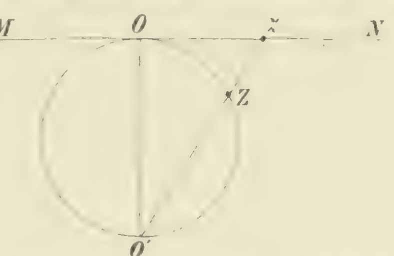
Zweite Bemerkung. — Die gegebene Function f (12.) geht für $z = \infty$ über in $\pm z^n$, und besitzt also an den unendlich fernen Stellen der Fläche

($\mathfrak{K}' + \mathfrak{L}'$) im einen Blatt den Werth $+ z^n$, im andern den Werth $- z^n$. Um die Vorstellung zu fixiren, wollen wir dem *obern* Blatt $\mathfrak{K}'$ den Werth $+ z^n$, mithin dem *untern* Blatt $\mathfrak{L}'$ den Werth $- z^n$ zuschreiben.

§ 7.

Fortsetzung. Umformung der ebenen Riemann'schen Fläche in eine kugelförmige.

Die horizontal liegende Fläche ($\mathfrak{K}' + \mathfrak{L}'$) bringen wir im Punkte O, d. i. im Punkte $z = 0$, mit einer Kugel vom Durchmesser 1 in Berührung, und bezeichnen den tiefsten Punkt dieser Kugel mit O'. Sodann unterwerfen wir die Fläche ($\mathfrak{K}' + \mathfrak{L}'$) einer Umformung, bei welcher sich die einzelnen Punkte dieser Fläche von allen Seiten her auf geradlinigen Wegen gegen den Punkt O' hinbewegen, und zwar so weit gegen O' fortbewegen, bis sie auf die Kugelfläche fallen. Nach Ausführung dieser Umformung werden also z. B. diejenigen beiden Punkte der Fläche, welche zu Anfang bei z übereinander lagen, gegenwärtig bei Z übereinander liegen. Auch wird bei O' das *obere* Blatt derFläche sich schliessen, und ebenso auch das *untere*: sodass also die Fläche bei O' dieselbe Beschaffenheit besitzt, wie z. B. bei O, nämlich daselbst aus zwei platt übereinanderliegenden Flächentheilen besteht, die durch einen unendlich dünnen Zwischenraum von einander getrennt sind.



In dieser neuen Gestalt wird die Fläche zu bezeichnen sein als eine *zweiblättrige Kugelfläche*, die n Uebergangslinien und $2n$ Windungspunkte besitzt.

Die Function z^n ist auf der gewöhnlichen *einblättrigen* Kugelfläche überall stetig bis auf einen bei $z = \infty$, d. i. in O' liegenden *Pol* [vgl. den Satz (9.) pg. 59]. Die hier betrachtete Function f (12.) besitzt aber auf dem äussern Blatt unserer zweiblättrigen Kugelfläche in unmittelbarer Nähe von O' den Werth z^n [vgl. die zweite Bemerkung pg. 82]. Folglich besitzt sie auf diesem *äussern* Blatt im Punkte O' einen *Pol*. Und ebenso ergiebt sich, dass sie auf dem *innern* Blatt bei O' ebenfalls einen *Pol* hat. Also der Satz:

Der ganze Werthvorrath der Function

$$(13.)\qquad f = \sqrt{(z - c_1)(z - c_2)\ldots(z - c_{2n})}$$

kann in eindeutiger Weise ausgebreitet werden auf einer gewissen zweiblättrigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$, *welche* $2n$ *Windungspunkte:*

$c_1, c_2, \ldots c_{2n}$ und n Uebergangslinien: $(c_1 c_2), (c_3 c_4), (c_5 c_6), \ldots (c_{2n-1} c_{2n})$ besitzt.

Auf dieser Fläche $\mathfrak{R}$ ist die Function überall stetig bis auf zwei Pole, welche bei $z = \infty$ übereinander liegen, von einander getrennt durch den unendlich dünnen Zwischenraum, der zwischen den beiden Blättern der Fläche $\mathfrak{R}$ sich hinzieht.

§ 8.

Betrachtung der Function $\sqrt{(z - c_1)(z - c_2) \ldots (z - c_{2n-1})}$. Ihre Ausbreitung auf einer Riemann'schen Kugelfläche.

Die Function

$$f = \sqrt{\frac{(z - c_1)(z - c_2) \ldots (z - c_{2n})}{- c_{2n}}} \tag{14.}$$

unterscheidet sich von der früheren (13.) nur durch einen constanten Factor, und ist also ebenso wie diese ausbreitbar auf der von uns construirten Fläche $\mathfrak{R}$. Dabei sind $c_1, c_2, c_3, \ldots$ irgend welche Constanten, die beliebig gewählt und beliebig geändert werden dürfen. Nur wird jede solche Aenderung begleitet sein von einer entsprechenden Aenderung der Fläche $\mathfrak{R}$.

Lässt man z. B. die Constante c_{2n} wachsen und schliesslich $= \infty$ werden, so wird gleichzeitig der Windungspunkt c_{2n} der Fläche $\mathfrak{R}$ nach O' rücken. Andererseits aber geht die Function f (14.) für $c_{2n} = \infty$ über in:

$$f = \sqrt{(z - c_1)(z - c_2) \ldots . (z - c_{2n-1})}.$$

Also der Satz: *Der ganze Werthvorrath der Function*

$$f = \sqrt{(z - c_1)(z - c_2) \ldots . (z - c_{2n-1})} \tag{15.}$$

kann in eindeutiger Weise ausgebreitet werden auf einer gewissen zweiblättrigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$, welche $2n$ Windungspunkte: $c_1, c_2, c_3, \ldots c_{2n-1}, \infty$, und *$n$ Uebergangslinien: $(c_1 c_2), (c_3 c_4), \ldots (c_{2n-3} c_{2n-2}), (c_{2n-1}, \infty)$ besitzt.*

Auf dieser Fläche $\mathfrak{R}$ ist die Function überall stetig bis auf einen im Windungspunkt $z = \infty$ gelegenen Pol.

§ 9.

Die Verschiebbarkeit der Uebergangslinien.

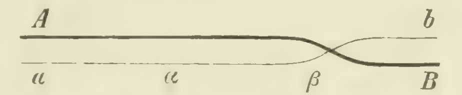
Bei unseren früheren Operationen [pg. 78] wurde in der damaligen Fläche $\mathfrak{R}$ ein Schnitt $c_1 c_2 c_3 d$ construirt, der aber von c_1 nach c_2 auf *beliebigem* Wege fortschreiten durfte, ebenso von c_2 nach

c_3 u. s. f. Hieraus folgt sofort, dass die später entstandene *Uebergangslinie* $c_1 c_2$ ebenfalls von c_1 nach c_2 auf *beliebigem* Wege fortschreitet.

Man kann daher jede solche Uebergangslinie, falls man nur ihren Anfangs- und Endpunkt festhält, im Uebrigen *beliebig verschieben*. Auch zeigt sich leicht, dass eine derartige Verschiebung keinerlei Störung hervorbringt. Sind nämlich, im senkrechten Durchschnitt betrachtet, AB und $a\alpha\beta b$ die beiden in einer Uebergangslinie einander durchsetzenden Flächentheile,



so wird dieser Durchchnitt bei einer Verschiebung der Uebergangslinie folgendes Aussehen erhalten:



Es tritt also bei dieser Verschiebung ein gewisses Stück $\alpha\beta$ des Flächentheils ab aus der obern in die untere Etage, während gleichzeitig Umgekehrtes beim Flächentheil AB erfolgt.

Von einer solchen Procedur wird aber z. B. die Stetigkeit der auf dem Flächentheil $a\alpha\beta b$ ausgebreiteten Functionswerthe in keinerlei Weise afficirt. Waren diese auf dem Flächentheil $a\alpha\beta b$ etwa stetig *vor* der Verschiebung der Uebergangslinie, so werden sie daselbst auch stetig sein *nach* der Verschiebung. U. s. w. Kurz, man gelangt zu folgendem Satz:

(16.) *Ist eine Function auf einer Riemann'schen Fläche ausgebreitet, so wird man, ohne dass dadurch in der Eindeutigkeit oder Mehrdeutigkeit, in der Stetigkeit oder Unstetigkeit der Function irgend welche Aenderung hervorgerufen würde, die Uebergangslinien dieser Fläche beliebig verschieben können, falls man nur ihre Anfangs- und Endpunkte ungeändert lässt.*

§ 10.

Betrachtung der Function $f = \sqrt[3]{\dfrac{(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_n)}{(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)\ldots(z-\gamma_\nu)}}$.

Bezeichnet man die Entfernungen des Punktes z von den festen Punkten $c_\varkappa$, $\gamma_\varkappa$ mit $r_\varkappa$, $\varrho_\varkappa$ und die Azimuthe dieser Entfernungen gegen die x-Axe mit $\vartheta_\varkappa$, $\tau_\varkappa$, und setzt man demgemäss

$$z - c_1 = r_1 e^{i\vartheta_1}, \qquad z - \gamma_1 = \varrho_1 e^{i\tau_1},$$
$$z - c_2 = r_2 e^{i\vartheta_2}, \qquad z - \gamma_2 = \varrho_2 e^{i\tau_2},$$
etc. etc. etc. etc.

so kann die gegebene Function

$$(1.) \qquad f = \sqrt[3]{\frac{(z - c_1)(z - c_2)\ldots(z - c_n)}{(z - \gamma_1)(z - \gamma_2)\ldots(z - \gamma_\nu)}}$$

auch so geschrieben werden:

$$(2.) \qquad f = \sqrt[3]{\frac{r_1 r_2 \ldots r_n}{\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_\nu}} \cdot e^{i\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 \ldots + \vartheta_n}{3} - \frac{\tau_1 + \tau_2 \ldots + \tau_\nu}{3}\right)},$$

wo in der letzten Formel unter der Cubikwurzel ihr reeller positiver Werth verstanden werden soll.

Diese Function f wird $= 0$ in den Punkten c, ferner $= \infty$ in den Punkten γ. Für jede *andere* Lage des Punktes z besitzt sie aber *drei* Werthe von der Form f, ηf, $\eta^2 f$, falls man nämlich unter η die Constante versteht:

$$(3.) \qquad \eta = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Diese drei simultanen Werthe f, ηf, $\eta^2 f$ ändern sich, falls man den Punkt z unter Vermeidung der Stellen c, γ irgend welche Curve

$$(\sigma.) \qquad z', z'', z''', \ldots Z$$

durchlaufen lässt, Schritt für Schritt in stetiger Weise, und liefern in solcher Art drei der Curve entsprechende Werthreihen:

$$(\alpha.) \qquad f', \quad f'', \quad f''', \ldots\ldots F,$$
$$(\beta.) \qquad \eta f', \quad \eta f'', \quad \eta f''', \ldots\ldots \eta F,$$
$$(\gamma.) \qquad \eta^2 f', \quad \eta^2 f'', \quad \eta^2 f''', \ldots\ldots \eta^2 F.$$

Da nun jene Curve (σ.) keinen der Punkte c, γ berühren soll, so sind [nach (1.)] die Werthe (α.), (β.), (γ.) durchweg *endlich* und *von Null verschieden*. Hieraus aber folgt, dass z. B. die Werthe f', $\eta f'$, $\eta^2 f'$ *alle drei von einander verschieden* sind, dass ferner Gleiches gilt von den drei Werthen f'', $\eta f''$, $\eta^2 f''$, ebenso von f''', $\eta f'''$, $\eta^2 f'''$; u. s. w. u. s. w. Mit andern Worten: Zwischen den drei Reihen (α.), (β.), (γ.) wird, während sie längs der Curve fortschreiten, niemals ein *Contact*, mithin auch niemals eine *Verwechselung* möglich sein, sodass also jede derselben durch ihren Anfangswerth *eindeutig* bestimmt ist. Also der Satz:

Lässt man den variablen Punkt z, unter Vermeidung der Stellen c, γ, irgend welche Curve

$$z', z'', z''' \ldots . Z$$

durchwandern, so entsprechen dieser Curve drei stetige Werthreihen der Function

$$(4.) \qquad f = \sqrt[3]{\frac{(z - c_1)(z - c_2) \ldots (z - c_n)}{(z - \gamma_1)(z - \gamma_2) \ldots (z - \gamma_\nu)}}.$$

Und jede dieser Reihen wird durch Angabe ihres Anfangswerthes Schritt für Schritt längs der ganzen Curve eindeutig bestimmt sein. Bezeichnet man ferner eine von diesen Werthreihen mit

$$f', f'', f''', \ldots . F,$$

so werden sich hieraus die beiden andern durch Multiplication mit η, *resp. mit* η^2 *ergeben, wo* η *die in (3.) genannte Constante vorstellt.*

Lässt man aber die Curve in sich zurückkehren, so ist der Endwerth F der Reihe im Allgemeinen *verschieden* von ihrem Anfangswerthe f'. Lässt man z. B. die Curve *um den Punkt* c_1 *herum* in sich zurücklaufen, während $c_2, c_3, \ldots c_n$ und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_\nu$ *ausserhalb* der Curve bleiben sollen, so wird bei einem solchen Umlauf das Azimuth ϑ_1 um $\pm 2\pi$ wachsen, während die übrigen Azimuthe $\vartheta_2, \vartheta_3, \ldots \vartheta_n$ und $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots \tau_\nu$ zu ihren ursprünglichen Werthen zurückkehren. Und demgemäss ersieht man aus (2.), dass die gegebene Function bei einer solchen Umlaufung zu einem Endwerthe F gelangen wird, der zu ihrem Anfangswerthe f' in der Beziehung steht:

$$F = f' e^{\pm \frac{2\pi i}{3}} \quad \text{d. i.} \quad F = f' \eta^{\pm 1}.$$

Dabei gilt das Zeichen $+$ oder $-$, jenachdem der Punkt c_1 positiv oder negativ umlaufen ist. Allgemein ergiebt sich folgender Satz:

Lässt man den Punkt z, *unter Vermeidung der Stellen* c, γ, *irgend welche Curve*

$$z', z'', z''', \ldots . Z$$

durchwandern, so entsprechen dieser Curve im Ganzen drei stetige Werthreihen der gegebenen Function

$$(5.) \qquad f = \sqrt[3]{\frac{(z - c_1)(z - c_2) \ldots (z - c_n)}{(z - \gamma_1)(z - \gamma_2) \ldots (z - \gamma_\nu)}}.$$

Jede solche Werthreihe

$$f', f'', f''' \ldots . F$$

ist durch Angabe ihres Anfangswerthes f' *längs der ganzen Curve Schritt für Schritt eindeutig bestimmt. Lässt man aber jene Curve, immer unter Vermeidung der Stellen* c, γ, *in sich zurückkehren, also* Z *iden-*

tisch werden mit z', so wird sich für diese Reihe ein Endwerth F ergeben, welcher zu ihrem Anfangswerth f' in der Beziehung steht:

$$F = f' \cdot \eta^{m-\mu}, \tag{6a.}$$

wo m und μ die Anzahlen derjenigen Punkte c und γ repräsentiren, welche innerhalb *der Curve liegen, und wobei vorausgesetzt wird, dass diese innerhalb der Curve gelegenen Punkte c und γ* positiv *umlaufen sind.*

Für den Fall einer negativen *Umlaufung würde die in Rede stehende Beziehung zwischen F und f' lauten:*

$$F = f' \eta^{-(m-\mu)}. \tag{6b.}$$

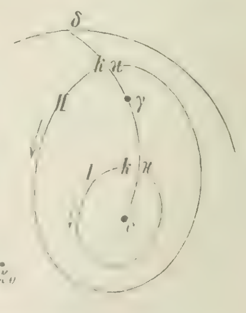
Es würde nun leicht sein, den ganzen Werthvorrath der hier betrachteten Function f (5.) in eindeutiger Weise auf einer gewissen Riemann'schen Fläche auszubreiten. Doch wird das Charakteristische der ganzen Methode einfacher und deutlicher hervortreten, wenn wir uns dabei auf specielle Fälle beschränken. Und dies soll in den beiden nächsten Paragraphen geschehen.

§ 11.

Betrachtung der Function $\sqrt[3]{\dfrac{z-c}{z-\gamma}}$. Ausbreitung derselben auf einer Riemann'schen Kugelfläche.

Wir betrachten die Horizontalebene als eine um $z = 0$ beschriebene, unendlich grosse Kreisfläche $\mathfrak{K}$, und führen in dieser den *Schnitt* $c\gamma\delta$ aus. Oder genauer ausgedrückt: Wir sondern von $\mathfrak{K}$ einen schmalen Flächenstreifen ab, welcher die Punkte c, γ enthält, welcher nämlich bei c beginnt, und über γ fortlaufend bis zum Rande von $\mathfrak{K}$, etwa bis δ sich erstreckt. *Nach* Absonderung dieses Streifens bezeichnen wir die Fläche mit $\mathfrak{K}'$.

Sodann markiren wir irgendwo innerhalb $\mathfrak{K}'$ einen Punkt z_0. Die drei diesem Punkte entsprechenden Werthe f_0, ηf_0, $\eta^2 f_0$ der gegebenen Function



$$f = \sqrt[3]{\frac{z-c}{z-\gamma}} \tag{7.}$$

pflanzen wir in z_0 wirklich auf, und in der Umgebung von z_0 die benachbarten Werthe. In solcher Weise entstehen drei jenen Anfangswerthen f_0, ηf_0, $\eta^2 f_0$ entsprechende Werthsysteme $S(f_0)$, $S(\eta f_0)$, $S(\eta^2 f_0)$. Da die Punkte c und γ zu dem abgesonderten schmalen Streifen gehören, mithin *ausserhalb* $\mathfrak{K}'$ liegen,

so kann man die gemeinschaftliche Peripherie der drei Systeme innerhalb $\mathfrak{K}'$ sich beliebig ausdehnen, und schliesslich mit dem Rande von $\mathfrak{K}'$ zusammenfallen lassen, ohne dass dabei ein Contact respective eine Verwechselung zwischen den Systemen zu befürchten stünde. Mittelst der genannten Ausdehnung erhält man also drei die ganze Fläche $\mathfrak{K}'$ überdeckende Systeme $S(f_0)$, $S(\eta f_0)$, $S(\eta^2 f_0)$, die nirgends mit einander in Contact sind, deren Werthe also innerhalb $\mathfrak{K}'$ in jedwedem Punkte von einander verschieden sind. *Und demgemäss können z. B. aus dem Systeme $S(f_0)$ die beiden andern Systeme $S(\eta f_0)$*
(8.) *und $S(\eta^2 f_0)$ abgeleitet werden durch Multiplication mit η, respective mit η^2.*

Sind nun ferner [vgl. die Figur] k und $\varkappa$ zwei zu beiden Ufern der Schnittstrecke $(c\gamma)$ einander gegenüber liegende Punkte, und K und K die Werthe des Systems $S(f_0)$ in diesen beiden Punkten, so erhält man, unter Anwendung der Curve I und auf Grund des Satzes (6a.):

$$\mathsf{K} = K\eta. \tag{9.}$$

Gehören hingegen k, $\varkappa$ zur Schnittcurve $(\gamma\delta)$, so erhält man, mittelst der Curve II. und wieder unter Benutzung des Satzes (6a.):

$$\mathsf{K} = K. \tag{10.}$$

Wir denken uns jetzt die Fläche $\mathfrak{K}'$ in *drei* übereinander liegenden Exemplaren: $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{M}'$ gegeben, und bezeichnen die Uferpunkte der drei übereinander liegenden Schnittstrecken $(c\gamma)$ mit k, $\varkappa$, l, λ, m, μ. Lassen wir alsdann das System $S(f_0)$ auf $\mathfrak{K}'$ verharren, verpflanzen wir aber das System $S(\eta f_0)$ nach $\mathfrak{L}'$ und das System $S(\eta^2 f_0)$ nach $\mathfrak{M}'$, so ergeben sich für jene sechs Punkte, auf Grund der Sätze (9.) und (8.), Werthe von folgender Form:

$$\begin{array}{l|l} \text{in } k\text{: } K, & \text{in } \varkappa\text{: } \eta K, \\ \text{in } l\text{: } \eta K, & \text{in } \lambda\text{: } \eta^2 K, \\ \text{in } m\text{: } \eta^2 K, & \text{in } \mu\text{: } \eta^3 K = K. \end{array} \tag{11.}$$

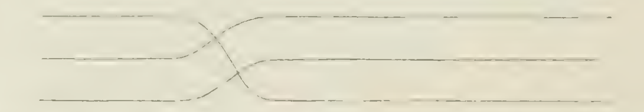
Heftet man also k mit μ, l mit $\varkappa$, und m mit λ zusammen, so stossen jedesmal von beiden Seiten her *gleiche* Werthe aneinander.

Gehören andererseits die Punkte k, $\varkappa$, l, λ, m, μ zur Schnittstrecke $(\gamma\delta)$, so ergeben sich in denselben, auf Grund der Sätze (10.) und (8.), Werthe von der Form:

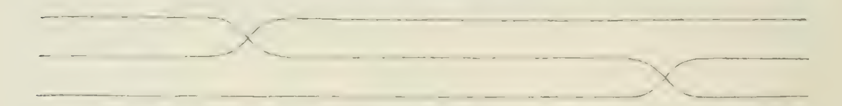
$$\begin{array}{l|l} \text{in } k\text{: } K, & \text{in } \varkappa\text{: } K, \\ \text{in } l\text{: } \eta K, & \text{in } \lambda\text{: } \eta K, \\ \text{in } m\text{: } \eta^2 K, & \text{in } \mu\text{: } \eta^2 K. \end{array} \tag{12.}$$

Und es werden also *gleiche* Werthe zusammenstossen, falls man k mit $\varkappa$, l mit λ, und m mit μ zusammenheftet.

Durch die genannten Zusammenheftungen entsteht eine *dreiblättrige* Fläche $(\mathfrak{K}' + \mathfrak{L}' + \mathfrak{M}')$, welche zwei Windungspunkte c, γ, und zwei von c nach γ laufende, *genau übereinander liegende* Uebergangslinien besitzt, entsprechend der in (11.) angegebenen Durchschnittsfigur, d. i. der Figur:



Doch kann man [vgl. den Satz p. 85] die eine dieser beiden Uebergangslinien, z. B. die untere, weiter nach rechts verschieben, wodurch alsdann die Durchschnittsfigur folgendes Aussehen erhält:



Alsdann laufen die beiden Uebergangslinien auf *verschiedenen* Wegen von c nach γ, wie solches z. B. angegeben ist in der nächstfolgenden Figur. — Schliesslich kann man die dreiblättrige Fläche in eine kugelförmige Gestalt versetzen, und gelangt so zu folgendem Resultat.

Der ganze Werthvorrath der Function

$$f = \sqrt[3]{\frac{z - c}{z - \gamma}} \tag{13.}$$

breitet sich in eindeutiger Weise aus auf einer gewissen dreiblättrigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$, welche zwei Windungspunkte zweiter Ordnung: c, γ, ferner zwei von c nach γ laufende Uebergangslinien besitzt. In der einen dieser Linien findet ein Uebergang vom oberen zum mittleren, in der andern ein Uebergang vom mittleren zum unteren Blatt statt.

Auf dieser Fläche $\mathfrak{R}$ ist die Function überall stetig, bis auf einen in γ befindlichen Pol.

§ 12.

Betrachtung der Function $\sqrt[3]{(z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)}$. Ausbreitung derselben auf einer Riemann'schen Kugelfläche.

Man wird, falls die Function

$$f = \sqrt[3]{(z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)} \tag{14.}$$

vorliegt, ähnlich wie vorhin operiren können, und auf diese Weise drei Werthsysteme $S(f_0)$, $S(\eta f_0)$, $S(\eta^2 f_0)$ erhalten, ausgebreitet auf drei übereinander liegenden Flächen $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{M}'$, deren jede mit einem *Schnitt* $c_1 c_2 c_3 d$ versehen ist. Es handelt sich im Wesentlichen nur noch um die Werthe, welche eines dieser Systeme, z. B. $S(f_0)$, an den Ufern des Schnittes besitzt. Hierüber giebt der Satz (6a, b.) Auskunft.

Sind z. B. k und $\varkappa$ zwei einander gegenüber liegende Uferpunkte der Schnittstrecke $(c_1 c_2)$ auf der Fläche $\mathfrak{K}'$, ferner K und K die Werthe des Systems $S(f_0)$ in diesen beiden Punkten, so erhält man, unter Anwendung der Curve I und auf Grund des Satzes (6a.):

$$\mathsf{K} = K\eta. \tag{15a.}$$

Gehören hingegen k, $\varkappa$ zur Strecke $(c_2 c_3)$, so erhält man mittelst der Curve II, und unter Anwendung eben desselben Satzes:

$$\mathsf{K} = K\eta^2. \tag{15b.}$$

Und gehören endlich k, $\varkappa$ zur Strecke $(c_3 d)$, so ergiebt sich mittelst der Curve III:

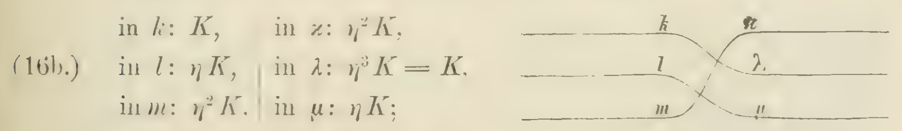
$$\mathsf{K} = K\eta^3 = K. \tag{15c.}$$

Sind also k, $\varkappa$, l, λ, m, μ die Uferpunkte der drei in $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{M}'$ übereinander liegenden Schnittstrecken $(c_1 c_2)$, so ergeben sich in diesen sechs Punkten Werthe von der Form:

(16a.)
in k: K, | in $\varkappa$: ηK,
in l: ηK, | in λ: $\eta^2 K$,
in m: $\eta^2 K$, | in μ: $\eta^3 K = K$;

so dass also *gleiche* Werthe zusammenstossen, falls man die Blätter so zusammenheftet, wie beistehende Figur zeigt.

Gehören ferner die Punkte $\varkappa$, k, l, λ, m, μ zur Strecke $(c_2 c_3)$, so erhält man in ihnen Werthe von der Form:



(16b.)
in k: K, | in $\varkappa$: $\eta^2 K$,
in l: ηK, | in λ: $\eta^3 K = K$,
in m: $\eta^2 K$, | in μ: ηK;

sodass also *gleiche* Werthe zusammenstossen bei den in der nebenstehenden Figur angegebenen Zusammenheftungen.

Gehören endlich die Punkte k, $\varkappa$, l, λ, m, μ zur Strecke $(c_3 d)$, so erhält man in ihnen Werthe von der Form:

(16c.)
$$\begin{array}{l|l} \text{in } k\colon K, & \text{in } \varkappa\colon K, \\ \text{in } l\colon \eta K, & \text{in } \lambda\colon \eta K, \\ \text{in } m\colon \eta^2 K, & \text{in } \mu\colon \eta^2 K; \end{array}$$

was den in beistehender Figur angegebenen Zusammenheftungen entspricht.

Durch Ausführung der genannten Zusammenheftungen entsteht eine *dreiblättrige* Fläche $(\mathfrak{K}' + \mathfrak{L}' + \mathfrak{M}')$, deren Form alsdann nachträglich noch verändert werden kann, theils durch Verschiebung der Uebergangslinien (16a. b.), theils durch kugelförmige Umgestaltung. Man gelangt zu folgendem Resultat:

Der ganze Werthvorrath der Function

$$f = \sqrt[3]{(z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)} \tag{17.}$$

breitet sich in eindeutiger Weise aus auf einer gewissen dreiblättrigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$, *welche drei Windungspunkte zweiter Ordnung:* c_1, c_2, c_3 *und zwei Uebergangslinien besitzt. Die eine derselben geht von* c_1 *über* c_2 *nach* c_3 *und vermittelt den Uebergang vom obern zum mittlern Blatt. Die andere* [welche in der Figur zur Unterscheidung punktirt angegeben ist] *geht ebenfalls von* c_1 *über* c_2 *nach* c_3 *und vermittelt den Uebergang vom mittlern zum untern Blatt.*

Auf dieser Fläche $\mathfrak{R}$ *ist die Function überall stetig bis auf drei Pole, die in den drei Blättern der Fläche bei* $z = \infty$ *gerade übereinander liegen.*

§ 13.

Ueber die Ausbreitung einer beliebigen algebraischen Function von z auf einer Riemann'schen Kugelfläche.

Die Riemann'schen Kugelflächen sind, wie die vorhergehenden Betrachtungen zeigen, anwendbar auf alle Functionen von der Form

$$f = \sqrt[n]{Z},$$

falls man nämlich unter Z irgend eine *rationale* Function von z, andererseits unter n eine *rationale* Zahl versteht. Doch sind, wie wir jetzt zeigen wollen, die Riemann'schen Kugelflächen nicht auf Functionen dieser Form beschränkt, sondern *anwendbar auf alle Functionen, die von* z *in algebraischer Weise abhängen.*

Es seien $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ beliebig gegebene *rationale* Functionen von z, und es mag unter f die Wurzel der Gleichung verstanden werden:

$$Z_0 + Z_1 f + Z_2 f^2 \ldots + Z_n f^n = 0;$$

so dass also f eine *algebraische* Function von z ist. Wir werden zeigen, dass man stets eine Riemann'sche Kugelfläche construiren kann, auf welcher der ganze Werthvorrath dieser Function f sich in eindeutiger Weise ausbreitet.

Es seien $z = A$, $z = B$, $z = C, \ldots z = P$ diejenigen Werthe des Argumentes z, für welche die Function f nicht n Werthe, sondern *weniger* als n Werthe besitzt. Solches festgesetzt, betrachten wir die Horizontalebene als eine um $z = 0$ beschriebene, unendlich grosse Kreisfläche $\mathfrak{K}$, und führen in dieser Fläche $\mathfrak{K}$ einen Schnitt aus: $ABC \ldots PQ$. Oder genauer ausgedrückt: Wir sondern von $\mathfrak{K}$ einen schmalen Flächenstreifen ab, welcher die Punkte $ABC \ldots P$ in sich enthält, welcher nämlich bei A beginnt und über $B, C, \ldots P$ fortlaufend bis zum Rande von $\mathfrak{K}$, etwa bis Q, sich hinerstreckt. Innerhalb der durch Absonderung dieses Streifens entstandenen Fläche $\mathfrak{K}'$ markiren wir irgend einen Punkt z_0 und pflanzen in diesen Punkt z_0 diejenigen n Werthe auf, welche die Function f für $z = z_0$ besitzt. Durch stetigen Anschluss an diese n Werthe ergeben sich alsdann ebenso viele Werthsysteme, die, *ohne* mit einander in *Contact* zu gerathen, einer Ausbreitung über die ganze Fläche $\mathfrak{K}'$ fähig sind, und die also innerhalb $\mathfrak{K}'$ in jedwedem Punkte z *lauter verschiedene* Werthe haben.

Sind mithin z. B. k und $\varkappa$ zwei zu beiden Ufern der Schnittstrecke (AB) einander gegenüber liegende Punkte, so werden die genannten n Systeme in k lauter verschiedene Werthe haben, und ebenso auch in $\varkappa$. Die Punkte k und $\varkappa$ liegen aber einander unendlich nahe, und es müssen daher die n Werthe in k, in irgend welcher Reihenfolge, identisch sein mit denen in $\varkappa$. Denkt man sich also die Fläche $\mathfrak{K}'$ in n übereinander liegenden Exemplaren $\mathfrak{K}_1', \mathfrak{K}_2', \ldots \mathfrak{K}_n'$ gegeben, ferner die Punkte $(k, \varkappa)$ in diesen n Flächen mit $(k_1, \varkappa_1)$. $(k_2, \varkappa_2), \ldots (k_n, \varkappa_n)$ bezeichnet und jedes der vorhin genannten n Werthsysteme auf je einer dieser n Flächen ausgebreitet, so werden auf die Punkte $k_1, k_2, \ldots k_n$ Werthe fallen, die in irgend welcher Reihenfolge mit denen in $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$ identisch sind. Man kann daher in den Flächen $\mathfrak{K}_1', \mathfrak{K}_2', \ldots \mathfrak{K}_n'$ die auf der *einen* Seite der Schnittstrecke (AB) liegenden n Ufer mit den auf der *andern* Seite befindlichen n Ufern, je eines der einen mit je einem der andern Seite, in solcher Weise zusammenheften, dass in jeder Zusammenheftungslinie von beiden Seiten her *gleiche* Werthe zusammenstossen.

Analoges gilt für die Schnittstrecke (BC), sowie für (CD) u. s. w.,

endlich für (PQ). Auf der durch all' diese Zusammenheftungen entstehenden n-blättrigen Fläche

$$\mathfrak{K}_1' + \mathfrak{K}_2' + \ldots + \mathfrak{K}_n'$$

wird alsdann der ganze Werthvorrath der Function f in eindeutiger Weise ausgebreitet sein. Denkt man sich also schliesslich diese n-blättrige Fläche in kugelförmige Gestalt versetzt, so gelangt man zu folgendem Satz:

Versteht man unter $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ beliebig gegebene rationale Functionen von z, ferner unter f die durch die Gleichung

$$Z_0 + Z_1 f + Z_2 f^2 + \ldots + Z_n f^n = 0 \tag{1.}$$

definirte algebraische Function von z, so kann der ganze Werthvorrath dieser Function f in eindeutiger Weise ausgebreitet werden auf einer gewissen n-blättrigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$.

Auch unterliegt es wohl kaum einem Zweifel, dass die Function f
(2.) *auf dieser Fläche $\mathfrak{R}$ bis auf einzelne Pole stetig sein wird. Doch wird der Beweis hierfür erst später (im sechsten Capitel) geliefert werden.*

Bemerkung. — Im Allgemeinen kann eine Riemann'sche Kugelfläche an ein und derselben Stelle *mehrere übereinander liegende* Windungspunkte haben. Denkt man sich z. B. zwei Functionen f und f', jede definirt durch eine Gleichung von der Form (1.), und bezeichnet man die zur Ausbreitung dieser Functionen erforderlichen Flächen respective mit $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$, so wird die ebenfalls algebraische Function

$$F = ff'$$

in eindeutiger Weise sich ausbreiten auf der Fläche

$$\mathfrak{R} + \mathfrak{R}',$$

d. i. auf derjenigen Riemann'schen Kugelfläche, die aus den Flächen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ — ohne gegenseitige Verbindung — durch blosse Ineinanderschachtelung entsteht. Diese neue Fläche $\mathfrak{R} + \mathfrak{R}'$ kann nun aber sehr wohl zwei *gerade übereinander liegende* Windungspunkte haben; denn es kann ein Windungspunkt von $\mathfrak{R}$ gerade über einem von $\mathfrak{R}'$ sich befinden. *Q. e. d.*

§ 14.

Ueber die Zerschneidung einer Riemann'schen Kugelfläche in einzelne Flächenstücke, und über die Versetzung eines jeden solchen Flächenstücks in seinen natürlichen Zustand.

Es sei irgend eine Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}$ [die also z. B. auch genau übereinander liegende Windungspunkte besitzen kann, vgl. die vorhergehende Bemerkung] in bestimmter Weise gegeben.

Zerschneidet man diese Fläche $\mathfrak{R}$ in eine beliebig grosse Anzahl kleiner Stücke, der Art, dass jedes derselben nur *eine* Randcurve besitzt und nicht mehr als höchstens *einen* Windungspunkt enthält, so wird jedes solches Flächenstück als eine kleine *sphärisch gekrümmte Windungsfläche* zu bezeichnen sein. Denn auch diejenigen dieser Stücke, welche *keinen* Windungspunkt enthalten, mithin *einblättrig* sind, können jenem Namen subsumirt, nämlich als Windungsflächen 0ter Ordnung angesehen werden [vgl. pg. 69]; wobei alsdann unter dem Windungspunkt eines solchen Flächenstücks irgend ein *beliebiger* Punkt desselben zu verstehen ist.

Irgend eins unter den kleinen Stücken, in welche $\mathfrak{R}$ zerlegt ist, mag nun mit

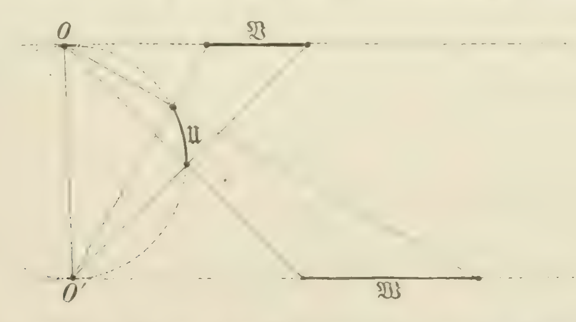
$$\mathfrak{U} \text{ oder } \mathfrak{U}(c, z)$$

benannt werden. Es sei nämlich c der Windungspunkt, und z Collectivbezeichnung für alle übrigen Punkte des Flächenstücks. Ueberdies sei m die Anzahl seiner Blätter, also c ein Windungspunkt $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Dieses Flächenstück $\mathfrak{U}$ kann nun, und zwar in sehr verschiedener Weise, durch stetige Umformung in eine *ebene einblättrige* Fläche verwandelt werden, wobei von Wichtigkeit namentlich zwei Methoden sind.

Erste Methode. — Man lässt die zum Flächenstück

$$\mathfrak{U}(c, z)$$

gehörigen Punkte z auf geradlinigen, von O' ausstrahlenden Bahnen so weit fortwandern, bis sie auf die *Horizontalebene* fallen, und ver-



wandelt in solcher Weise das Flächenstück in eine *ebene* Windungsfläche, die mit

$$\mathfrak{V}(c, z)$$

bezeichnet werden mag. Sodann aber verwandelt man diese letztere in eine *ebene einblättrige* Fläche

$$\mathfrak{A}(\gamma, \zeta),$$

in bekannter Weise, nämlich unter Anwendung des Correspondenzgesetzes:

$$z - c = (\zeta - \gamma)^m \quad \text{[vgl. pg. 74].} \tag{1.}$$

Man kann übrigens von den drei aufeinander folgenden Zuständen 𝔘, 𝔚, 𝔄 den mittleren ganz bei Seite lassen und also sagen, *dass* 𝔘 *in* 𝔄 *übergeht mittelst des Correspondenzgesetzes* (1.).

Zweite Methode. — Man lässt [vgl. die vorstehende Figur] die Punkte des gegebenen Flächenstücks

$$\mathfrak{U}(c, z)$$

auf geradlinigen, von O ausstrahlenden Bahnen so weit fortwandern, bis sie sämmtlich auf die *Antipodenebene* fallen, und bezeichnet die in solcher Weise entstehende *ebene* Windungsfläche mit

$$\mathfrak{W}(c', z'),$$

wo $cc' = 1$ und ebenso $zz' = 1$ ist. Sodann verwandelt man diese letztere Fläche in eine *ebene einblättrige* Fläche:

$$\mathfrak{A}(\gamma, \zeta).$$

und zwar, wiederum wie vorhin, mittelst des Correspondenzgesetzes:

$$z' - c' = (\zeta - \gamma)^m. \tag{2.}$$

Will man den mittlern Zustand 𝔚 eliminiren, so hat man in (2.) für c', z' ihre Werthe $c' = \frac{1}{c}$, $z' = \frac{1}{z}$ zu substituiren, wodurch sich ergiebt:

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{c} = (\zeta - \gamma)^m. \tag{2a.}$$

Mittelst dieser Formel verwandelt sich alsdann 𝔘 *direct in* 𝔄.

Zusammenfassung. — *Das gegebene m-blättrige Flächenstück*

$$\mathfrak{U} \text{ oder } \mathfrak{U}(c, z)$$

kann also in stetiger Weise umgeformt werden in eine gewöhnliche einblättrige Fläche:

$$\mathfrak{A} \text{ oder } \mathfrak{A}(\gamma, \zeta),$$

und zwar nach Belieben, entweder mittelst des Correspondenzgesetzes:

$$z - c = (\zeta - \gamma)^m, \tag{I.}$$

oder mittelst des Correspondenzgesetzes:

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{c} = (\zeta - \gamma)^m. \tag{II.}$$

Allerdings ist die Wahl zwischen diesen beiden Gesetzen nicht unter allen Umständen in unser Belieben gestellt. Enthält z. B. das Flächenstück 𝔘 *einen bei* $z = 0$ *liegenden Punkt, so wird der Anforderung*

der stetigen Umformung nur durch die erste Methode [vgl. die Figur p. 95], *also nur durch die Formel* (I.), *nicht aber durch* (II.) *entsprochen. Und umgekehrt wird, falls* $\mathfrak{U}$ *einen bei* $z = \infty$ *liegenden Punkt enthält, jener Anforderung der stetigen Umformung nur durch* (II.), *nicht aber durch* (I.) *entsprochen werden.*

(3.) *Der Zustand* $\mathfrak{U}$ *mag hinfort der ursprüngliche, und der aus diesem durch stetige Umformung, vermittelst einer der beiden Formeln* (I.), (II.), *entspringende neue Zustand* $\mathfrak{A}$ *der natürliche Zustand des betrachteten Flächenstücks genannt werden.*

Bemerkung. — Die geometrische Anschauung [Figur p. 95] zeigt, dass einer *positiven* Umlaufung von $\mathfrak{U}$ eine ebenfalls *positive* Umlaufung von $\mathfrak{B}$ und ebenso von $\mathfrak{W}$ entspricht; falls man nur festhält an den früher gegebenen Determinationen über die *oberen* Seiten der Kugelfläche, der Horizontal- und der Antipodenebene [pg. 55 und 56]. Einer *positiven* Umlaufung von $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{W}$ entspricht aber eine ebenfalls *positive* Umlaufung der jedesmaligen Fläche $\mathfrak{A}$ [vgl. die Bemerkung p. 74]. Also der Satz:

Denkt man sich das Flächenstück $\mathfrak{U}$ *oder* $\mathfrak{U}(c, z)$ *in seinen natürlichen Zustand* $\mathfrak{A}$ *oder* $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$ *versetzt, und in dieser Weise also jedweden Punkt* z *der Fläche* $\mathfrak{U}$ *in einen gewissen Punkt* ζ *der Fläche* $\mathfrak{A}$ *verwandelt, so wird, falls man* z *positiv um* $\mathfrak{U}$ *herumlaufen lässt, gleichzeitig* ζ *ebenfalls positiv um* $\mathfrak{A}$ *herumlaufen.*

Sind also z. B. f und φ zwei auf dem Flächenstück ausgebreitete Functionen, so wird das über seinen Rand in *positiver* Richtung erstreckte Integral:

$$\int f\, d\varphi$$

ein und denselben Werth haben, einerlei, ob man jene Integration während des *ursprünglichen*, oder während des *natürlichen* Zustandes bewerkstelligt; was angedeutet werden mag durch die Formel:

$$\int_{\mathfrak{U}} f\, d\varphi = \int_{\mathfrak{A}} f\, d\varphi.$$

§ 15.

Allgemeine Bemerkungen über die stetige Umformung einer Fläche.

(4.) *Unter der stetigen Umformung einer Fläche soll eine Veränderung derselben verstanden werden, welche durch blosse Anwendung von Dehnungen und Biegungen, nämlich mit Vermeidung von Zerreissungen und Zusammenheftungen, zu Stande kommt.*

Um von irgend zwei beliebig gegebenen Flächen die eine in die andere umzuformen, bedarf es (sobald eine solche Umformung überhaupt möglich ist) nur der Auffindung eines Gesetzes, nach welchem jeder Punkt der einen Fläche mit einem bestimmten Punkte der andern correspondirt, jedoch eines Gesetzes, welches so beschaffen

ist, dass demselben zufolge *benachbarte* Punkte der einen Fläche auch immer mit *benachbarten* Punkten der andern in Correspondenz stehen. Ist nämlich ein solches Gesetz gefunden, so wird man dann, wie leicht zu übersehen ist, durch Anwendung von Dehnungen und Biegungen es in der That dahin bringen können, dass die eine Fläche mit der andern, und zwar jeder Punkt der einen mit dem correspondirenden Punkte der andern zur Deckung kommt.

Ein *Quadrat* kann als stetige Umformung eines *Rechtecks*, ebenso aber auch als eine stetige Umformung der *Kreisfläche* angesehen werden. Andererseits würde sich die Kreisfläche als die stetige Umformung einer *Halbkugelfläche*, oder auch als die einer *Kegelfläche* ansehen lassen.

Und so lassen sich überhaupt, falls *eine* Fläche gegeben ist, immer *mehrere* und von einander sehr verschiedene Flächen finden, von denen jede als eine stetige Umformung der gegebenen Fäche aufgefasst werden kann.

Jedoch kann man keineswegs die gegebene Fläche als die stetige Umformung jeder *beliebig* gewählten andern Fläche ansehen. Sollen nämlich zwei Flächen einer solchen Auffassung fähig sein, so ist dazu, wie man sofort erkennt, zunächst schon erforderlich, dass in beiden die Anzahl der Randcurven ein und dieselbe ist. Und zu dieser Bedingung treten noch andere Bedingungen hinzu. Denn bei einer *Kugelfläche* z. B. und bei einer *Ringfläche**) ist die Anzahl der Randcurven gleich gross, nämlich bei beiden $= 0$; und trotzdem lässt sich, wie man leicht übersieht, die eine keineswegs als eine Umformung der andern auffassen. Wir gehen einstweilen auf die hier erforderlichen Bedingungen nicht näher ein.

Wir wollen uns im Raume irgend eine Fläche denken von beliebiger Krümmung und überhaupt von ganz beliebiger Gestalt; und auf dieser Fläche wollen wir uns die Werthe irgend welcher Function ausgebreitet denken. Jene Fläche mag nun einer stetig fortschreitenden Veränderung unterworfen und in solcher Weise, von ihrem *Anfangszustande* aus, in einen bestimmten *Endzustand* übergeführt werden. Während diese Veränderung aber vor sich geht, während also die Fläche durch *stetige Umformung* in andere und andere Gestalten übergeht, mögen die einzelnen Punkte der Fläche mit den ihnen einmal zuertheilten Functionswerthen unlöslich verbunden bleiben.

War die Function während des Anfangszustandes der Fläche auf derselben überall *eindeutig*, d. h. war damals jeder Punkt der Fläche immer nur mit je *einem* Werthe der Function belastet, so

*) Unter einer *Ringfläche* ist die Oberfläche eines körperlichen Ringes, also z. B. diejenige Rotationsfläche zu verstehen, welche von einem Kreise erzeugt wird, sobald man denselben um eine Achse, die in der Ebene des Kreises liegt und den Kreis nicht schneidet, rotiren lässt.

wird Gleiches offenbar auch dann noch stattfinden, wenn dieselbe in ihren Endzustand übergegangen ist.

War ferner die Function zur Zeit des Anfangszustandes auf der Fläche allenthalben *stetig*, so wird sie nach Eintritt des Endzustandes ebenfalls überall stetig sein.

War die Function zur Zeit des Anfangszustandes der Fläche in einzelnen Punkten oder Linien *unstetig*, so wird sie nach Eintritt des Endzustandes nach wie vor, und zwar in *eben denselben* Punkten oder Linien unstetig sein.

Insbesondere wollen wir unsere Aufmerksamkeit auf diejenigen Unstetigkeitspunkte richten, welche wir früher (pg. 38) als *polare Unstetigkeitspunkte*, oder kürzer als *Pole* bezeichnet haben, also auf diejenigen, in welchen die Function selber — sie mag f genannt werden — *unstetig* ist, in deren Bereich aber der reciproke Werth der Function, nämlich der Werth von $\frac{1}{f}$, *stetig* bleibt. Jene Unstetigkeit von f und jene Stetigkeit von $\frac{1}{f}$ werden, falls sie in irgend einem Punkte der Fläche einmal vorhanden sind, ungeändert fortbestehen, welches auch die stetige Umformung sein mag, der die Fläche unterworfen wird.

(5.) *Besitzt also die auf der Fläche ausgebreitete Function zur Zeit des Anfangszustandes in irgend einem Punkt der Fläche einen Pol, so wird sie in jenem Punkt nach Eintritt des Endzustandes ebenfalls einen Pol besitzen.*

Gleiches wird offenbar auch von den Nullpunkten gelten. Denn es ist ja nach unserer Annahme jeder Punkt der Fläche mit dem ihm einmal zuertheilten Functionswerthe unlöslich verbunden. Ist also irgend ein Punkt der Fläche mit dem Werthe Null belastet, so wird er, mag sich nun die Gestalt der Fläche verändern, wie sie wolle, diesen Werth Null beständig behalten. Wir gelangen somit zu folgendem allgemeinen Satz:

(6.) *Sind die Werthe der Function auf irgend welcher Fläche ausgebreitet, so tritt hinsichtlich der auf jener Fläche vorhandenen Stetigkeitspunkte, Nullpunkte und Pole keine Aenderung ein, mag man nun die Fläche in ihrem ursprünglichen Zustande verharren, oder mag man dieselbe durch stetige Umformung in irgend welchen andern Zustand übergehen lassen. In jedem einzelnen Punkt der Fläche wird die Function sich zur Zeit des neuen Zustandes genau ebenso verhalten, wie zur Zeit des ursprünglichen Zustandes; in jedem einzelnen Punkt der Fläche wird sie zur Zeit des neuen Zustandes stetig oder*

unstetig, Null oder von Null verschieden, mit einer polaren oder nichtpolaren Unstetigkeit behaftet sein, je nachdem zur Zeit des ursprünglichen Zustandes das Eine oder das Andere der Fall war.

Ebenso verhält es sich auch mit der Eindeutigkeit. In jedem einzelnen Punkt der Fläche wird die Function zur Zeit des neuen Zustandes eindeutig oder mehrdeutig sein, je nachdem zur Zeit des ursprünglichen Zustandes das Eine oder das Andere der Fall war.

Die Eigenschaften der Eindeutigkeit, der Stetigkeit, der polaren Unstetigkeit u. s. w. sind also permanent während des Verlaufs einer stetigen Umformung.

Bemerkung. — All' diese Sätze sind ohne Weiteres anwendbar auf *diejenigen* stetigen Umformungen, von denen vorhin pg. 95—97 die Rede war, also z. B. anwendbar auf den Uebergang von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{A}$, und ebenso umgekehrt auf den Uebergang von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{U}$.

Fünftes Capitel.

Ueber Functionen, die auf einer Riemann'schen Kugelfläche ausgebreitet sind. Definition der regulären Functionen.

Ebenso wie wir im dritten Capitel Functionen $f(z)$ betrachtet haben, die auf der *gewöhnlichen einblättrigen* Kugelfläche ausgebreitet waren, ebenso wollen wir im gegenwärtigen Capitel solche Functionen $f(z)$ in Untersuchung ziehen, die auf einer *Riemann'schen mehrblättrigen* Kugelfläche ausgebreitet sind. Dabei mag diese letztere *ganz willkürlich* gegeben sein, von beliebig vielen Blättern, mit beliebig vielen und beliebig gelegenen Windungspunkten und Uebergangslinien.

Wir werden dabei zu Resultaten gelangen, die denen des dritten Capitels einigermassen analog sind. Ebenso wie wir nämlich damals gefunden hatten, dass jede Function $f(z)$, die auf der *einblättrigen* Kugelfläche *eindeutig* und *bis auf einzelne Pole stetig* ist, eine *rationale* Function von z sein muss, ebenso werden wir gegenwärtig finden, dass jede Function $f(z)$, welche die genannten Eigenschaften auf einer *Riemann'schen n-blättrigen* Kugelfläche besitzt, *die Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades sein muss, deren Coefficienten rationale Functionen von z sind.*

Die zu betrachtende, *willkürlich* gegebene Riemann'sche Kugelfläche werden wir mit $\mathfrak{R}$, und irgend einen *Theil* derselben mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen.

§ 1.

Uebertragbarkeit früher gefundener Sätze auf die Riemann'schen Kugelflächen.

Einige der im zweiten Capitel erhaltenen Sätze sind sofort auf die Riemann'schen Kugelflächen übertragbar, so z. B. der Satz pg. 35. In der That kann man sagen:

(1.) *Ist eine Function $f = f(z)$ auf irgend einem Theile $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so*

kann auf $\mathfrak{S}$ kein auch noch so kleines Curven- oder Flächenelement existiren, auf welchem die Function constant wäre, — es sei denn, dass sie auf $\mathfrak{S}$ allenthalben constant ist.

Beweis. — Wir wollen annehmen, der Satz sei *nicht* richtig, es existire also eine auf $\mathfrak{S}$ eindeutige und bis auf einzelne Pole stetige Function $f = f(z)$, welche auf irgend einer Curve oder Fläche λ *constant*, in den übrigen Punkten von $\mathfrak{S}$ aber *inconstant* ist. Man bezeichne nun all' diese übrigen Punkte zusammengenommen mit λ', grenze auf $\mathfrak{S}$ ein kleines, theils aus Punkten λ, theils aus Punkten λ' bestehendes Flächenstück $\mathfrak{U}$ ab, und versetze dasselbe in seinen *natürlichen* Zustand $\mathfrak{A}$. Alsdann wird die Function f [vgl. d. Bemkg. pg. 100] auf dieser ebenen einblättrigen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig sein. Gleichzeitig wird alsdann auf $\mathfrak{A}$ eine Curve resp. Fläche existiren, auf welcher die Function constant ist, während sie in den übrigen Punkten von $\mathfrak{A}$ inconstant ist. Dies aber widerspricht dem früher p. 35 gefundenen Satze. U. s. w.

Ist mithin die Function f auf $\mathfrak{S}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so werden die Punkte, in denen f einen vorgeschriebebenen Werth K annimmt, auf $\mathfrak{S}$ immer nur *vereinzelt* vorkommen können, ebenso also z. B. auch diejenigen Punkte, in denen sie *Null* wird. Also der Satz:

Ist die Function $f = f(z)$ auf irgend einem Theil $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ stetig, und bezeichnet man ihre Nullpunkte auf $\mathfrak{S}$ mit $\beta_1, \beta_2, \ldots$, so werden all' diese Punkte

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \beta_1, \beta_2, \ldots \tag{2.}$$

vereinzelt liegen. D. h.: Je zwei derselben werden stets durch irgend welchen (wenn auch noch so kleinen) Zwischenraum von einander getrennt sein.

§ 2.

Ueber die Ordnungszahlen der auf einer Riemann'schen Kugelfläche ausgebreiteten Functionen.

Wir haben früher, als wir uns mit den Flächen einfachster Art (nämlich mit *ebenen einblättrigen Flächen*) beschäftigten, den Polen und Nullpunkten der darauf ausgebreiteten Functionen gewisse *Ordnungszahlen* beigelegt. Mit andern Worten: Wir haben damals *verschiedene Grade* des Unendlich- und Null-Werdens constatirt. Es ist von Wichtigkeit, derartige Unterscheidungen auch dann eintreten zu lassen, wenn die Function auf einer *Riemann'schen Kugelfläche* ausgebreitet ist.

Es sei eine Riemann'sche Kugelfläche von beliebiger Beschaffenheit gegeben; auf dieser sei irgend eine gegebene Function ausge-

breitet; und diese Function besitze auf der Fläche irgend welche Nullpunkte und irgend welche Pole.

Wir betrachten zunächst die *Nullpunkte*. Hinsichtlich der Werthe, welche die Function in diesen Punkten *selber* besitzt, kann offenbar keinerlei Verschiedenheit stattfinden; denn diese Werthe sind sämmtlich Null, mithin unter einander *identisch*. Sollen also jene Punkte in verschiedene Arten oder Ordnungen eingetheilt werden, so kann eine solche Eintheilung sich nicht stützen auf diejenigen Functionswerthe, welche in den Punkten *selber* vorhanden sind, sondern nur auf diejenigen, welche in der *Nähe* jener Punkte, nämlich in den *Bereichen* derselben sich vorfinden.

Nun können die Bereiche der einzelnen Nullpunkte, je nach der Lage, welche sie auf der Riemann'schen Kugelfläche besitzen, von sehr verschiedener *Form* sein. Denn das Bereich eines solchen Punktes wird, je nachdem derselbe in einem *gewöhnlichen* oder in einem *Windungs*punkte der Fläche liegt, bald durch eine kleine Fläche von *einblättriger* Form, bald durch eine kleine *Windungsfläche* von *mehrblättriger* Form dargestellt sein.

Sollen daher die Bereiche jener Nullpunkte hinsichtlich der von ihnen getragenen Functionswerthe mit einander verglichen werden, so wird man, falls etwa das eine Bereich *ein*blättrig, ein anderes *fünf*blättrig, ein drittes *zwölf*blättrig, u. s. w. sein sollte, eine solche Vergleichung gar nicht vorzunehmen im Stande sein, falls man nicht zuvor all' jene Bereiche durch Umgestaltung in *gleiche* Form gebracht hat. Ebenso etwa, wie es bei einer physikalischen Untersuchung, wenn mehrere Körper hinsichtlich ihrer Dimensionen mit einander verglichen werden sollen, nothwendig ist, dieselben zuvor in *gleiche Temperatur*, etwa in eine gewisse, ein für allemal festgesetzte *Normal-Temperatur* zu versetzen; ebenso wird es hier, wo die Bereiche mehrerer Punkte hinsichtlich der von ihnen getragenen Functionswerthe unter einander in Vergleich gestellt werden sollen, erforderlich sein, all' jene Bereiche zuvor in *gleiche Form*, etwa ebenfalls in eine gewisse, ein für allemal festgesetzte *Normalform* zu bringen.

Welche Form dabei als Normalform festgesetzt werden soll, ist im Grunde ziemlich gleichgültig. Doch wird es gut sein, eine möglichst einfache zu wählen. Es mag dazu die Form einer *gewöhnlichen einblättrigen ebenen Fläche*, nämlich diejenige Form genommen werden, welche das Bereich des betrachteten Punktes in seinem *natürlichen Zustande* besitzt [pg. 97].

Auf Grund dieser Ueberlegungen dürfte es also zweckmässig sein, folgende Definition zu adoptiren:

Definition. — *Ist eine Riemann'sche Kugelfläche mit den Werthen irgend welcher Function belastet, so soll im Allgemeinen jeder Punkt* (3.) *der Fläche mit einer gewissen Ordnungszahl versehen werden. Unter dieser Zahl soll jederzeit diejenige Ordnungszahl verstanden werden, welche dem Punkte zukommt, sobald man das ihm zugehörige Bereich in seinen natürlichen Zustand versetzt.*

Handelt es sich also darum, die Ordnungszahl irgend eines Punktes der gegebenen Riemann'schen Kugelfläche wirklich zu bestimmen, so wird man zuvörderst das kleine Flächenstück, durch welches das Bereich des Punktes dargestellt wird, in seinen natürlichen Zustand versetzen, dasselbe also verwandeln in ein ebenes einblättriges Flächenstück. Ist solches geschehen, so wird alsdann die Ordnungszahl des Punktes unmittelbar zu Tage treten, falls man nur die früher gefundenen Sätze [pg. 41—43] *in Anwendung bringt.*

Dabei gelangt man z. B. auf Grund des Satzes pg. 41 sofort zu folgender Bemerkung:

(4.) *Ist eine Function $f(z)$ auf irgend einem Theile einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so wird ihre Ordnungszahl in jedem Punkte jenes Flächentheiles eine endliche ganze Zahl sein.*

Und zwar wird diese Zahl positiv sein in jedem Nullpunkte, negativ in jedem Pole, und Null sein in jedem andern Punkte, d. i. in jedem Punkte, der weder Nullpunkt noch Pol ist.

Um die Ordnungszahl eines gegebenen Punktes nach der hier gegebenen Vorschrift zu ermitteln, wird man das Bereich des Punktes zuerst in seinen *natürlichen* Zustand versetzen müssen. Dieser *natürliche* Zustand ist aber kein völlig bestimmter. Denn im Allgemeinen wird es unter den Zuständen, in welche man jenes Bereich durch stetige Umformung versetzen kann, immer *zwei* geben, von welchen nach Belieben der *eine*, und ebenso gut auch der *andere* als der *natürliche* Zustand des Bereiches angesehen werden kann. (Vgl. pg. 96, 97.) Man könnte daher die Besorgniss hegen, dass sich vielleicht, jenachdem von diesen beiden Zuständen der *eine* oder der *andere* gewählt wird, für die Ordnungszahl des gegebenen Punktes jedesmal ein *anderer* Werth ergeben möchte. Aus der Formel (9.) des folgenden Paragraphs wird man aber erkennen, dass diese Besorgniss eine unbegründete ist, dass sich nämlich in beiden Fällen *ein und dieselbe* Ordnungszahl herausstellt, und dass also die hier für die Ordnungszahl eines Punktes gegebene Definition eine *völlig bestimmte* ist.

§ 3.

Fortsetzung. Darstellung der Ordnungszahlen durch Integrale.

Die Function $f = f(z)$ sei auf irgend einem Theil $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig. Zerlegt man $\mathfrak{S}$ mittelst irgend welcher Curven σ in kleine Stücke:

$$\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3, \ldots \mathfrak{U}_q,$$

und bezeichnet die *natürlichen* Zustände derselben respective mit

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots \mathfrak{A}_q,$$

so besitzt f auf $\mathfrak{U}_\varkappa$ *genau dieselben* Ordnungszahlen, wie auf $\mathfrak{A}_\varkappa$ [vgl. (3.)]. Bezeichnet man nun die Summe dieser auf $\mathfrak{U}_\varkappa$ oder $\mathfrak{A}_\varkappa$ vorhandenen Ordnungszahlen mit $\mathsf{M}_\varkappa$, so ist [nach Satz pg. 43]:

$$\mathsf{M}_\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}_\varkappa}\frac{df}{f},$$

oder was dasselbe ist [vgl. die Bemerkung pg. 97]:

$$\mathsf{M}_\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{U}_\varkappa}\frac{df}{f}, \tag{5.}$$

wo die Integration in der einen wie in der andern Formel positiv hinläuft über den Rand von $\mathfrak{A}_\varkappa$ respective $\mathfrak{U}_\varkappa$. Summirt man jetzt die Formel (5.) über $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots q$, d. i. über all' diejenigen Flächenstücke $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3, \ldots \mathfrak{U}_q$, in welche $\mathfrak{S}$ zerlegt wurde, so werden sich dabei die den Zerlegungscurven σ zugehörigen Integraltheile gegenseitig zerstören; sodass man also erhält:

$$\mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_2 + \mathsf{M}_3 \ldots + \mathsf{M}_q = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{S}}\frac{df}{f}, \tag{6.}$$

die Integration positiv erstreckt über den Rand von $\mathfrak{S}$. Die linke Seite dieser Formel (6.) repräsentirt aber offenbar die Summe sämmtlicher Ordnungszahlen, welche f auf $\mathfrak{S}$ besitzt. Also der Satz:

Ist die Function $f = f(z)$ auf irgend einem Theil $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so wird die Summe M ihrer sämmtlichen auf $\mathfrak{S}$ vorhandenen Ordnungszahlen den Werth haben:

$$\mathsf{M} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{S}} d\log f, \tag{7.}$$

die Integration positiv erstreckt über den Rand von $\mathfrak{S}$. Besitzt dieser Flächentheil $\mathfrak{S}$ nicht eine, sondern mehrere, etwa ϱ Randcurven, so wird das angegebene Integral eine Summe von ϱ Integralen sein, deren jedes über je eine Randcurve erstreckt ist.

Markirt man auf $\mathfrak{S}$ irgend einen Punkt c, so wird derselbe entweder ein *Pol* der Function f, oder ein *Nullpunkt* derselben, oder keines von beiden sein. Wie dem auch sei, — jedenfalls wird man, weil die Pole und Nullpunkte immer nur *vereinzelt* vorkommen [vergl. (2.)], um c herum ein Flächenstück $\mathfrak{U}$ abgrenzen können, welches, abgesehen von c selber, keinen weitern Pol oder Nullpunkt beherbergt. Alsdann aber ist die Summe der auf $\mathfrak{U}$ vorhandenen Ordnungszahlen [vgl. (4.)] nichts Anderes, als die in c selber vorhandene Ordnungszahl μ; sodass sich also nach (7.) die Formel ergiebt:

$$\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{U}} d \log f.$$

Also der Zusatz: *Ist die Function $f = f(z)$ auf irgend einem Theile $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so wird ihre Ordnungszahl μ in irgend einem Punkt c des Flächentheils $\mathfrak{S}$ den Werth besitzen:*

$$\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{U}} d \log f, \tag{8.}$$

die Integration positiv erstreckt über den Rand irgend eines um c herum abgegrenzten Flächenstückes $\mathfrak{U}$. Dabei ist indessen vorausgesetzt, dieses Flächenstück $\mathfrak{U}$ sei von solcher Beschaffenheit, dass dasselbe, abgesehen von c selber, keinen Pol oder Nullpunkt der Function in sich enthält. Dieser Bedingung wird stets dadurch genügt werden können, dass man $\mathfrak{U}$ *hinreichend klein* macht. Ein um c herum abgegrenztes hinreichend kleines Flächenstück wird aber kurzweg das *Bereich* von c genannt. Also der Satz:

Ist die Function $f = f(z)$ auf irgend einem Theil $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so wird ihre Ordnungszahl μ in irgend einem Punkt c der Fläche $\mathfrak{S}$ den Werth haben:

$$\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{U}} d \log f, \tag{9.}$$

die Integration positiv herumlaufend gedacht um das Bereich $\mathfrak{U}$ des Punktes c.

Man kann also sagen: *Wächst der $\log f$, wenn man das Bereich des Punktes c in positiver Richtung umläuft, um $\mu \cdot 2\pi i$ an, so ist μ die Ordnungszahl, welche f in c besitzt.* Man könnte diesen Satz benutzen, um die Ordnungszahl zu *definiren*. Solches hat *Riemann* gethan. Denn in seiner Abhandlung [Borch. Journal f. Math. Bd. 54, S. 117; und Gesamm. Werke pg. 96] heisst es: „Zur Vereinfachung des Folgenden heisse eine Function für einen Punkt — — — unendlich klein von der *ersten* Ordnung, wenn ihr Logarithmus bei einem positiven Umlauf um ein diesen Punkt umgebendes Flächenstück — — — um $2\pi i$ anwächst."

Das in (7.) erhaltene Resultat bezieht sich auf irgend einen *Theil* einer Riemann'schen Kugelfläche. Wendet man genau dieselbe Methode an, um die Summe aller Ordnungszahlen zu ermitteln, welche auf der *ganzen* Riemann'schen Kugelfläche vorhanden sind, so gelangt man zu einem analogen Resultat, welches, wie leicht zu übersehen, so lautet:

(10.) *Ist eine Function $f(z)$ auf einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so ist die Summe sämmtlicher Ordnungszahlen, welche sie auf jener Fläche besitzt, gleich Null.*

(11.) *Oder mit andern Worten: Bei einer solchen Function ist die Summe der in den Polen vorhandenen Ordnungszahlen ihrem absoluten Betrage nach jederzeit ebenso gross, als die Summe der in den Nullpunkten vorhandenen.*

In jedem Nullpunkt ist die Ordnungszahl der Function gleich einer positiven, und in jedem Pol gleich einer negativen ganzen Zahl [vgl. (4.)]. Man kann demgemäss die Nullpunkte, je nachdem ihre Ordnungszahl gleich 1, 2, 3 u. s. w. ist, einfache, zweifache, dreifache u. s. w. nennen; und andererseits die Pole, je nachdem ihre Ordnungszahl gleich -1, -2, -3 u. s. w. ist, ebenfalls als einfache, zweifache, dreifache u. s. w. Pole bezeichnen. Auch dürfte es zweckmässig sein, jeden n-fachen Nullpunkt als eine Superposition von n *elementaren* Nullpunkten, und jeden n-fachen Pol als eine Superposition von n *elementaren* Polen aufzufassen. [Vergl. Riemann's Abhandlung, Borch. Journal Bd. 54, S. 118. Gesamm. Werke pg. 96.] Thut man dies, so lässt sich der Satz (11.) auch so aussprechen:

(12.) *Ist eine Function $f(z)$ auf einer Riemann'schen Kugelfläche allenthalben eindeutig und mit Ausnahme einzelner Pole allenthalben stetig, so ist die Anzahl ihrer elementaren Pole jederzeit ebenso gross wie die Anzahl ihrer elementaren Nullpunkte.*

Bemerkung. — Die gewöhnliche *einblättrige* Kugelfläche, von welcher das dritte Capitel handelte, ist offenbar nur ein Specialfall der Riemann-schen *mehrblättrigen* Kugelfläche. *Demgemäss sind also die vorstehenden Sätze unmittelbar auch anwendbar auf die gewöhnliche einblättrige Kugelfläche.*

§ 4.

Ueber die Reihenentwicklungen einer auf einer Riemann'schen Kugelfläche ausgebreiteten Function.

Die Function $f = f(z)$ sei auf irgend einem Theil $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig;

ferner sei c ein auf $\mathfrak{S}$ beliebig markirter Punkt. Bezeichnet man das *Bereich* dieses Punktes in seinem *ursprünglichen* Zustande mit

(13.) $$\mathfrak{U} \text{ oder } \mathfrak{U}(c, z),$$

und andererseits in seinem *natürlichen* Zustande [vgl. pg. 96] mit

(14.) $$\mathfrak{A} \text{ oder } \mathfrak{A}(\gamma, \zeta),$$

so wird sie auf dieser ebenen, einblättrigen Fläche $\mathfrak{A}$ [Satz pg. 41] darstellbar sein durch die Formel:

(15.) $$f = (\zeta - \gamma)^\mu E, \quad (\text{auf } \mathfrak{A}),$$

wo μ die Ordnungszahl von f im Punkt γ, zugleich also auch [vgl. die Definition (3.)] die Ordnungszahl von f im Punkte c bezeichnet, während $E = E(\zeta)$ eine Function vorstellt, die auf $\mathfrak{A}$ eindeutig, stetig und nichtverschwindend ist.

Dabei ist lediglich vorausgesetzt, dass die Grenze von $\mathfrak{U}$ *hinreichend* nahe um c, oder (was auf dasselbe hinauskommt) dass die Grenze von $\mathfrak{A}$ *hinreichend* nahe um γ herumläuft. Dieser Begriff des *Hinreichendnahen* ist aber im Vorhergehenden bereits dadurch eingeführt worden, dass $\mathfrak{U}$ als das **Bereich** von c bezeichnet wurde.

Uebrigens kann man über die Art und Weise, wie $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{A}$ zu construiren sind, damit die Formel (15.) für sämmtliche Punkte ζ der Fläche $\mathfrak{A}$ gültig sei, leicht nähere Auskunft erhalten, indem man statt des Satzes pg. 41 den Satz (31.) pg. 48 anwendet. Man findet alsdann, dass die Formel (15.) für alle Punkte von $\mathfrak{A}$ gültig sein wird, falls nur $\mathfrak{U}$, mit etwaiger Ausnahme von c selber, keinen Pol oder Nullpunkt der Function f enthält. Selbstverständlich ist überdies vorauszusetzen, dass das Flächenstück $\mathfrak{U}$, mit etwaiger Ausnahme von c, keine Windungspunkte enthalte; denn andernfalls würde die in (13.), (14.) genannte Umformung des Flächenstücks gar nicht möglich sein, mithin $\mathfrak{A}$ gar nicht existiren.

Man kann nun die Bereiche $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{A}$ nachträglich noch weiter verkleinern, also z. B. $\mathfrak{A}$ zusammenschrumpfen lassen zu einer kleinen um γ beschriebenen Kreisfläche, während gleichzeitig $\mathfrak{U}$ die entsprechende Zusammenschrumpfung erleidet.

Alsdann ist E auf $\mathfrak{A}$ entwickelbar in die *Cauchy-Taylor*'sche Reihe [vgl. pg. 34]:

$$E = A_0 + A_1(\zeta - \gamma) + A_2(\zeta - \gamma)^2 + \dots,$$

wo $A_0, A_1, A_2, \dots$ Constanten sind. Auch ist die *erste* dieser Constanten, nämlich A_0, nothwendiger Weise *von Null verschieden*, denn sonst würde E im Mittelpunkt γ der Kreisfläche $\mathfrak{A}$ verschwinden, was dem Charakter dieser Function widerspricht. Durch Substitution dieses Werthes von E geht die Formel (15.) über in:

(16.) $$f = (\zeta - \gamma)^\mu [A_0 + A_1(\zeta - \gamma) + A_2(\zeta - \gamma)^2 + \dots], \quad (\text{auf } \mathfrak{A}).$$

Im Allgemeinen existiren nun für das Flächenstück $\mathfrak{U}(c, z)$ *zwei* natürliche Zustände. Und je nachdem man für $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$ den einen oder andern wählt, werden γ, ζ zu c, z entweder in der Beziehung stehen:

$$z - c = (\zeta - \gamma)^m, \tag{17.}$$

oder aber in der Beziehung:

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{c} = (\zeta - \gamma)^m, \quad \text{[vgl. pg. 96]}. \tag{18.}$$

Dabei repräsentirt m die Anzahl der im Punkte c mit einander zusammenhängenden Blätter. Oder mit andern Worten: Es wird dabei c als ein m-blättriger Windungspunkt, mithin $\mathfrak{U}$ als eine m-blättrige Winduugsfläche angesehen; so dass also z. B. $m = 1$ sein würde, falls c ein gewöhnlicher Punkt, mithin $\mathfrak{U}$ einblättrig sein sollte.

Man kann nun schliesslich den aus (17.) respective (18.) für $(\zeta - \gamma)$ entspringenden Werth in (16.) substituiren, ebenso auch in (15.). Und ebenso wie die Formeln (15.), (16.) gültig sind für die Punkte ζ der Fläche $\mathfrak{A}$, ebenso werden die durch die genannte Substitution sich ergebenden neuen Formeln gültig sein für die Punkte z der Fläche $\mathfrak{U}$. Alles zusammengefasst, gelangt man daher zu folgendem Satz:

Ist die Function $f = f(z)$ auf irgend einem Theil $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so lassen sich die Werthe, welche f im Bereich $\mathfrak{U}$ irgend eines auf $\mathfrak{S}$ liegenden Punktes c besitzt, durch die Formeln darstellen:

$$\begin{aligned} f &= (z - c)^{\frac{\mu}{m}} E, \\ f &= (z - c)^{\frac{\mu}{m}} [A_0 + A_1 (z - c)^{\frac{1}{m}} + A_2 (z - c)^{\frac{2}{m}} + \ldots], \end{aligned} \tag{19.}$$

oder auch durch folgende Formeln:

$$\begin{aligned} f &= \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c}\right)^{\frac{\mu}{m}} \mathsf{E}, \\ f &= \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c}\right)^{\frac{\mu}{m}} \left[\mathsf{A}_0 + \mathsf{A}_1 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{m}} + \mathsf{A}_2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c}\right)^{\frac{2}{m}} + \ldots\right]. \end{aligned} \tag{20.}$$

Dabei bezeichnet μ die Ordnungszahl der Function f im Punkte c, und m die Anzahl von Blättern, welche in c mit einander zusammenhängen. Es wird also z. B. $m = 1$ sein, falls c ein gewöhnlicher Punkt, hingegen $2, 3, 4$ etc. sein, falls c ein Windungspunkt erster, zweiter, dritter u. s. w. Ordnung ist. Ferner bezeichnen $E = E(z)$ und $\mathsf{E} = \mathsf{E}(z)$ Functionen, die auf $\mathfrak{U}$ eindeutig, stetig und nichtverschwindend

sind. Endlich bezeichnen A_0, A_1, A_2, . . . und A_0, A_1, A_2, . . . constante Coefficienten, von denen feststeht, dass A_0 und A_0 verschieden sind von Null.

Von diesen beiden Darstellungsweisen (19.) *und* (20.) *ist nur die erste gültig für $c = 0$, nur die zweite für $c = \infty$, hingegen gleichzeitig die erste und zweite, falls c weder 0 noch ∞ ist.* [Vgl. den Satz pg. 96, 97.]

Bemerkung. — Das Bereich $\mathfrak{U}$ des Punktes c ist kein festes, kein für alle vier Formeln (19.), (20.) gemeinschaftliches; sondern *ein der jedesmaligen Formel anzupassendes.* Denkt man sich z. B. $\mathfrak{U}$ so gewählt, dass die *erste* Formel (19.) für alle Punkte von $\mathfrak{U}$ gilt, so wird im Allgemeinen $\mathfrak{U}$ noch weiter zu verkleinern sein, falls man erreichen will, dass die *zweite* der Formeln (19.) für alle Punkte von $\mathfrak{U}$ Gültigkeit habe. Solches ergiebt sich unmittelbar aus der Ableitung dieser Formeln.

Bei der Bestimmung der Ordnungszahlen in gegebenen speciellen Fällen kann man entweder die Formeln (19.), (20.) benutzen, oder aber, was *bequemer* ist, direct auf die in (3.) gegebene Definition dieser Zahlen sich stützen, unter gleichzeitiger Anwendung des Satzes (4.).

Erstes Beispiel. — Die Function:

$$f = \sqrt{(z - c_1)(z - c_2) \ldots (z - c_{2n})} \tag{a.}$$

ist eindeutig auf einer *zweiblättrigen* Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ mit den Windungspunkten c_1, c_2, . . . c_{2n}. Auch ist sie daselbst überall stetig bis auf *zwei bei $z = \infty$ liegende Pole* [vgl. pg. 83]. Ueberdies besitzt sie auf $\mathfrak{R}$, wie der Ausdruck (a.) zeigt, im Ganzen $2n$ *Nullpunkte*, nämlich c_1, c_2, . . . c_{2n}. Folglich ist [Satz (4.)] ihre Ordnungszahl *negativ* in jenen beiden bei $z = \infty$ liegenden Punkten, ferner *positiv* in c_1, c_2, ... c_{2n}, und *Null* in allen *übrigen* Punkten der Fläche $\mathfrak{R}$.

Um nun die Ordnungszahl z. B. in c_1 näher zu bestimmen, versetzen wir das Bereich $\mathfrak{U}(c_1, z)$ dieses Punktes mittelst der Formel $z - c_1 = (\zeta - \gamma_1)^2$, oder (indem wir das willkürlich zu wählende $\gamma_1 = 0$ machen) mittelst der einfacheren Formel

$$z - c_1 = \zeta^2$$

in seinen natürlichen Zustand $\mathfrak{A}(0, \zeta)$; wobei der Ausdruck (a.) die Gestalt annimmt:

$$f = \zeta \sqrt{(c_1 - c_2 + \zeta^2)(c_1 - c_3 + \zeta^2) \ldots (c_1 - c_{2n} + \zeta^2)}. \tag{b.}$$

Die hier auftretende Wurzelgrösse ist, wie die Formel (b.) selber zeigt, $= \frac{f}{\zeta}$, also, ebenso wie f und ζ, auf $\mathfrak{A}$ *eindeutig*. Ueberdies ist sie, wie ihr blosser Anblick zeigt, *stetig*, und für hinreichend kleine Werthe von ζ auch *nichtverschwindend*. Nimmt man also $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{A}$ hinreichend klein, so hat die Wurzelgrösse auf $\mathfrak{A}$ den Charakter der Functionen E; sodass man also die Formel (b.) auch so schreiben kann:

$$f = (\zeta - 0)^1 \cdot E. \tag{c.}$$

Hieraus ersieht man aber [vgl. pg. 41], dass die Function f auf $\mathfrak{A}$ im

Punkte $\zeta = 0$ die Ordnungszahl 1 hat. Und dieselbe Ordnungszahl wird sie also, nach (3.), auch auf der Fläche $\mathfrak{U}$ in dem correspondirenden Punkt $z = c_1$ besitzen. *In solcher Weise ergiebt sich, dass die Ordnungszahl von f in jedem der Punkte $c_1, c_2, \ldots c_{2n}$ den Werth 1 hat.*

Um ferner die Ordnungszahl von f in einem der beiden Punkte $z = \infty$ zu bestimmen, versetzen wir das Bereich $\mathfrak{U}(\infty, z)$ eines solchen Punktes mittelst der Formel $\frac{1}{z} - \frac{1}{\infty} = (\zeta - \gamma)^1$, oder (indem wir $\gamma = 0$ machen) mittelst der einfacheren Formel

$$\frac{1}{z} = \zeta$$

in seinen natürlichen Zustand $\mathfrak{A}(0, \zeta)$; wobei der Ausdruck (a.) die Gestalt annimmt:

$$f = \zeta^{-n} \sqrt{(1 - c_1\zeta)(1 - c_2\zeta) \ldots (1 - c_{2n}\zeta)}. \tag{d.}$$

Die hier auftretende Wurzelgrösse ist, wie die Formel (d.) selber erkennen lässt, auf $\mathfrak{A}$ *eindeutig*, ferner, wie ihr blosser Anblick zeigt, auf $\mathfrak{A}$ *stetig* und für hinreichend kleine Werthe von ζ auch *nichtverschwindend*. Sie hat also im Bereich $\mathfrak{A}$, falls man dasselbe hinreichend klein sich vorstellt, den Charakter der Functionen E; und es kann daher die Formel (d.) auch so geschrieben werden:

$$f = (\zeta - 0)^{-n} E. \tag{e.}$$

Hieraus folgt [vgl. pg. 41], dass die Function f auf $\mathfrak{A}$ im Punkte $\zeta = 0$ die Ordnungszahl $(-n)$ hat, und dass sie also [nach (3.)] dieselbe Ordnungszahl auch auf der Fläche $\mathfrak{U}$ im correspondirenden Punkt $z = \infty$ besitzt. *So ergiebt sich, dass f auf der zweiblättrigen Fläche $\mathfrak{R}$ in jedem der beiden Punkte $z = \infty$ die Ordnungszahl $(-n)$ hat.*

Aus diesen Ergebnissen folgt nun weiter, dass die Summe sämmtlicher Ordnungszahlen von f auf der Fläche $\mathfrak{R}$ gleich *Null* ist; was in Einklang steht mit dem Satz (10.).

Zweites Beispiel. — Die Function

$$f = \sqrt{(z - c_1)(z - c_2) \ldots (z - c_{2n-1})} \tag{f.}$$

ist eindeutig auf einer gewissen *zweiblättrigen* Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$, welche $2n$ Windungspunkte: $c_1, c_2, \ldots c_{2n-1}, \infty$ besitzt. Auch ist sie auf dieser Fläche $\mathfrak{R}$ stetig bis auf einen im Windungspunkt $z = \infty$ liegenden Pol [vgl. pg. 84]. Ihre Nullpunkte befinden sich offenbar in $c_1, c_2, \ldots c_{2n-1}$.

Analog wie beim vorhergehenden Beispiel findet man nun leicht, *dass diese Function f in jedem der Punkte $c_1, c_2, \ldots c_{2n-1}$ die Ordnungszahl 1, und dass sie ferner im Windungspunkt $z = \infty$ die Ordnungszahl $[-(2n-1)]$ besitzt.*

§ 5.

Fortsetzung. Anwendung auf die gewöhnliche einblättrige Kugelfläche.

Die gewöhnliche *ein*blättrige Kugelfläche, von welcher das dritte Capitel handelte, ist offenbar nur ein Specialfall der Riemann'schen

*mehr*blättrigen Kugelflächen; sodass man also durch Anwendung des zuletzt erhaltenen Satzes (19.), (20.) zu folgendem Resultat gelangt:

Ist die Function $f(z)$ auf irgend einem Theile $\mathfrak{S}$ einer gewöhnlichen einblättrigen Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so sind die Werthe, welche f im Bereich $\mathfrak{U}$ irgend eines auf $\mathfrak{S}$ liegenden Punktes c besitzt, durch die Formeln darstellbar:

$$(21.)\qquad \begin{aligned} f &= (z-c)^{\mu} E, \\ f &= (z-c)^{\mu}[A_0 + A_1(z-c) + A_2(z-c)^2 + \ldots], \end{aligned}$$

oder auch durch folgende Formeln:

$$(22.)\qquad \begin{aligned} f &= \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c}\right)^{\mu} \mathsf{E}, \\ f &= \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c}\right)^{\mu}\left[\mathsf{A}_0 + \mathsf{A}_1\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c}\right) + \mathsf{A}_2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c}\right)^2 + \ldots\right]. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet μ die Ordnungszahl von f im Punkte c. Ferner sind $E = E(z)$ und $\mathsf{E} = \mathsf{E}(z)$ Functionen, die auf $\mathfrak{U}$ eindeutig, stetig und nichtverschwindend sind. Endlich sind $A_0, A_1, A_2, \ldots$ und $\mathsf{A}_0, \mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots$ constante Coefficienten, von denen feststeht, dass A_0 und A_0 verschieden von Null sind.

Von diesen beiden Darstellungsweisen (21.) und (22.) *gilt nur die erste, falls $c = 0$, ferner nur die zweite, falls $c = \infty$ ist, hingegen die erste und zweite, falls c weder 0 noch ∞ ist.*

Anwendung des Satzes. — Die Formeln (21.), (22.) können sofort dazu dienen, um die Ordnungszahlen einer gegebenen Function zu bestimmen. Wir wählen als Beispiel die Function

$$f = \frac{(z-A)^a\,(z-B)^b}{(z-C)^c},$$

wo a, b, c *positive ganze Zahlen* sein sollen. Alsdann ist f eine *rationale* Function von z, mithin auf der einblättrigen Kugelfläche *eindeutig* und *bis auf einzelne Pole stetig* [Satz pg. 59].

Die Nullpunkte und Pole dieser Function f liegen offenbar bei $z = A$, $z = B$, $z = C$, $z = \infty$. Und zwar sind $z = A$, $z = B$ sicherlich Nullpunkte, ferner $z = C$ sicherlich ein Pol, während es noch von der näheren Beschaffenheit der Zahlen a, b, c abhängt, ob $z = \infty$ ein Pol oder Nullpunkt oder keines von beiden ist. Jedenfalls ist, nach (4.), die Ordnungszahl von f in jedwedem Punkte $z = A$, $z = B$, $z = C$, $z = \infty$ eine *ganze* Zahl, und in allen *übrigen* Punkten der Kugelfläche gleich *Null*. Man kann nun die Function f ganz allgemein in folgende Gestalten versetzen:

$$(\alpha.)\qquad f = (z-A)^a\,[(z-B)^b(z-C)^{-c}],$$

$$(\beta.)\qquad f = (z-B)^b\,[(z-A)^a(z-C)^{-c}],$$

$$(\gamma.)\qquad f = (z - C)^{-c}\left[(z - A)^a (z - B)^b\right],$$

$$(\delta.)\qquad f = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\infty}\right)^{c-(a+b)}\left[\left(1 - \frac{A}{z}\right)^a\left(1 - \frac{B}{z}\right)^b\left(1 - \frac{C}{z}\right)^{-c}\right].$$

Bringt man diese Formeln respective auf die Bereiche 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 der Punkte $z = A$, $z = B$, $z = C$, $z = \infty$ in Anwendung, so sieht man z. B., dass der in $(\alpha.)$ in eckige Klammern eingeschlossene Ausdruck auf 𝔄 den Charakter einer Function E besitzt. Somit folgt aus $(\alpha.)$, mit Hinblick auf (21.), dass f im Punkte $z = A$ die Ordnungszahl a hat. Und gleichzeitig ergiebt sich in analoger Weise aus $(\beta.)$, $(\gamma.)$, $(\delta.)$, dass f in $z = B$, $z = C$, $z = \infty$ respective die Ordnungszahlen b, $(-c)$, $[c - (a + b)]$ besitzt.

Die Summe sämmtlicher Ordnungszahlen ist mithin $= 0$, was in Einklang steht mit dem allgemeinen Satz (10.).

§ 6.

Ueber die rationale Verbindung mehrerer Functionen, die auf ein und derselben Riemann'schen Kugelfläche ausgebreitet sind.

Ganz analog den früher gefundenen Sätzen pg. 46 ergeben sich für die Riemann'sche Kugelfläche folgende Sätze:

Sind die Functionen $f_1 = f_1(z)$, $f_2 = f_2(z)$, $\ldots f_n = f_n(z)$ auf irgend einem Theil 𝔖 einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so gilt Gleiches von jedwedem Ausdruck:

$$(23.)\qquad \Psi = \text{Ratf.}\,(f_1, f_2, \ldots f_n),$$

der aus $f_1, f_2, \ldots f_n$ auf rationale Weise zusammengesetzt ist, also z. B. auch von den Ausdrücken:

$$(24.)\qquad P = f_1 f_2 \ldots f_n \quad \textit{und} \quad Q = \frac{f_1 f_2 \ldots f_n}{F_1 F_2 \ldots F_p},$$

falls man nur über $F_1, F_2, \ldots F_p$ dieselben Voraussetzungen macht, wie über $f_1, f_2, \ldots f_n$.

Sind ferner $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ und $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \ldots \mathsf{M}_p$ die Ordnungszahlen der Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ und $F_1, F_2, \ldots F_p$ in irgend einem Punkt c des Flächentheils 𝔖, so werden die dortigen Ordnungszahlen von P und Q lauten:

$$(25.)\qquad (\mu_1 + \mu_2 \ldots + \mu_n) \quad \textit{und} \quad [(\mu_1 + \mu_2 \ldots + \mu_n) - (\mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_2 \ldots + \mathsf{M}_p)].$$

Zu den Functionen f, F, auf welche diese Sätze anwendbar sind, gehört selbstverständlich auch diejenige, deren Werth auf 𝔖 überall $= 1$, deren Ordnungszahl also daselbst überall $= 0$ ist; woraus z. B. folgt, dass Ψ und $\frac{1}{\Psi}$ überall entgegengesetzte Ordnungszahlen haben.

Der Beweis dieser Sätze ergiebt sich sofort aus dem Umstande, dass die Eigenschaften der *Eindeutigkeit*, der *Stetigkeit*, der *polaren Unstetig-*

stetigkeit, und ebenso auch die *Werthe der Ordnungszahlen* beim Uebergange vom ursprünglichen zum natürlichen Zustande, oder auch umgekehrt beim Uebergange vom natürlichen zum ursprünglichen Zustand *permanent* sind. [Vgl. die Bemerkung pg. 100.]

Es sei nun das Bereich des Punktes c in seinem ursprünglichen und natürlichen Zustande respective mit $\mathfrak{U}(c, z)$ und $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$ bezeichnet. Alsdann sind die Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ auf $\mathfrak{U}$ im Punkte c *eindeutig und stetig, respective polarunstetig*. Dieselben Eigenschaften besitzen daher diese Functionen, zufolge der genannten Permanenz, auch auf $\mathfrak{A}$ im Punkte γ. Dieselben Eigenschaften besitzt daher, zufolge des Satzes pg. 46, auf $\mathfrak{A}$ im Punkte γ auch der rationale Ausdruck:

$$\Psi = \text{Ratf.}\,(f_1, f_2, \ldots f_n).$$

Dieselben Eigenschaften besitzt daher dieses Ψ, zufolge der genannten Permanenz, auch auf $\mathfrak{U}$ im Punkte c. *Und hiermit ist der Satz* (23.) *bewiesen.*

Was den Satz über P in (24.) betrifft, so ist Folgendes hinzuzufügen: Da $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ die Ordnungszahlen der Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ auf $\mathfrak{U}$ im Punkte c sein sollen, so werden sie, zufolge der genannten Permanenz, zugleich auch die Ordnungszahlen dieser Functionen auf $\mathfrak{A}$ im Punkte γ vorstellen. Hieraus ergiebt sich, vermittelst des Satzes pg. 46, dass die Summe:

$$\mu_1 + \mu_2 \ldots + \mu_n$$

die Ordnungszahl des Productes

$$P = f_1 f_2 \ldots f_n$$

auf $\mathfrak{A}$ im Punkte γ vorstellt. Und hieraus ergiebt sich, zufolge der erwähnten Permanenz, dass jene Summe gleichzeitig auch die Ordnungszahl von P auf $\mathfrak{U}$ im Punkte c repräsentirt. *Hiermit ist der Satz* (24.), *so weit er P betrifft, bewiesen.* U. s. w.

Ist irgend eine n-blättrige Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}$ gegeben, so wird die durch z *selber* dargestellte Function, d. i. die Function $f = z$, in je n übereinander liegenden Punkten dieser Fläche $\mathfrak{R}$ einerlei Werth haben. Wie denn auch sei, — jedenfalls wird sie, falls man auf $\mathfrak{R}$ irgend einen *einzelnen* Punkt markirt, daselbst immer nur *einen* Werth haben, also auf $\mathfrak{R}$ *eindeutig* sein. Ueberdies ist sie auf $\mathfrak{R}$ überall *stetig*, ausser in den bei $z = \infty$ übereinander liegenden Punkten $A, B, C, \ldots$ (deren Anzahl, je nach Umständen, $= n$ oder $< n$ ist). In jedem dieser Punkte $A, B, C, \ldots$ ist die Function $f = z$ *unendlich*, also *unstetig*, jedoch in solcher Weise unstetig, dass ihr reciproker Werth $\frac{1}{z}$ im Bereich des Punktes stetig bleibt. Ihre Unstetigkeitspunkte $A, B, C, \ldots$ sind also *Pole*.

(26.) *Wir sehen somit, dass die Function $f = z$ auf jeder Riemann'schen Kugelfläche, mag diese nun beschaffen sein, wie sie wolle, eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig ist. Und Gleiches gilt daher* [zufolge (23.)] *auch von jedem Ausdruck*:

$$\Psi = \text{Ratf.}(z);$$

der von z auf r a t i o n a l e *Weise abhängt.*

Uebrigens sind die Ordnungszahlen einer solchen rationalen Function von z, je nachdem man sich dieselbe auf einer n-blättrigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ oder aber auf der gewöhnlichen *ein*blättrigen Kugelfläche $\mathfrak{r}$ ausgebreitet denkt, *wesentlich verschieden.* Es gilt nämlich, wie man leicht übersieht, folgender Satz:

(27.) *Sind P und p irgend zwei correspondirende Punkte von* $\mathfrak{R}$ *und* $\mathfrak{r}$, *d. i. zwei Punkte, die dieselben Coordinaten besitzen, und ist m die Anzahl der im Punkte P zusammenhängenden Blätter* [mithin P selber ein Windungspunkt $(m-1)$ter Ordnung], *so wird die Ordnungszahl einer beliebig gegebenen* r a t i o n a l e n *Function von z, bei ihrer Ausbreitung auf* $\mathfrak{R}$, *im Punkte P stets m-mal so gross sein, als sie, bei einer Ausbreitung der Function auf* $\mathfrak{r}$, *im Punkte p sein würde.*

In der That ergiebt sich der Beweis dieses Satzes unmittelbar durch Anwendung der früher gefundenen Formel (9.), pg. 106.

§ 7.

Ueber Functionen, die auf einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig sind. Reguläre Functionen.

Die Function $f = f(z)$ sei auf einer gegebenen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ *eindeutig* und *bis auf einzelne Pole stetig.* Zufolge der vorhergehenden Sätze [pg. 113] gilt alsdann, wenn A irgend welche Constante vorstellt, Gleiches von der Function

$$\varphi = f - A.$$

Diese neue Function φ wird stets und nur dann $= \infty$, wenn $f = \infty$ wird. Sie besitzt also mit f *dieselben* Unendlichkeitspunkte, d. i. *dieselben* Pole. Auch lässt sich leicht zeigen, dass φ und f in jedem solchen Pol *dieselbe* Ordnungszahl haben.

Ist nämlich c irgend ein Pol der Function f, ferner $(-p)$ ihre dortige Ordnungszahl, und bezeichnet man das Bereich des Punktes c in seinem ursprünglichen und natürlichen Zustande respective mit $\mathfrak{U}(c, z)$ und $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$, so wird die Function f auf $\mathfrak{A}$ darstellbar sein durch die Formel:

$$f = (\zeta - \gamma)^{-p} E, \quad (\text{auf } \mathfrak{A}),$$

wo E eine eindeutige, stetige und nichtverschwindende Function vorstellt. Hieraus folgt, was die *neue* Function betrifft:

$$\varphi = (\zeta - \gamma)^{-p} E - A, \quad (\text{auf } \mathfrak{A}),$$

oder anders geschrieben:

$$\varphi = (\zeta - \gamma)^{-p}[E - A(\zeta - \gamma)^p], \quad (\text{auf } \mathfrak{A}).$$

Der hier in der eckigen Klammer enthaltene Ausdruck reducirt sich für $\zeta = \gamma$ auf E, und besitzt also, ebenso wie E selber, im Punkte γ einen *von Null verschiedenen* Werth, mithin in der unmittelbaren Nachbarschaft von γ ebenfalls von Null verschiedene Werthe. Er repräsentirt daher, falls man $\mathfrak{A}$ hinreichend klein nimmt, eine Function, die auf $\mathfrak{A}$ eindeutig, stetig und nichtverschwindend ist. Bezeichnet man demgemäss diesen Ausdruck mit E, so ergiebt sich

$$\varphi = (\zeta - \gamma)^{-p}\mathsf{E}, \quad (\text{auf } \mathfrak{A}),$$

wobei allerdings das gegenwärtige Bereich $\mathfrak{A}$ im Allgemeinen kleiner ist, als das in der vorhergehenden Formel zu denkende $\mathfrak{A}$.

Wie dem auch sei, — jedenfalls ergiebt sich aus dieser letzten Formel, dass die Function φ auf $\mathfrak{A}$ im Punkte γ, mithin auch auf $\mathfrak{U}$ im Punkte c, die Ordnungszahl $(-p)$ besitzt. *Q. e. d.*

(28.) *Ist also die Function $f = f(z)$ auf einer Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so gilt Gleiches auch von der Function $\varphi = (f - A)$, falls A eine beliebig gegebene Constante vorstellt. Und zwar werden auf der Fläche $\mathfrak{R}$ die Pole und die Ordnungszahlen dieser Pole für die Function f genau dieselben sein, wie für die Function $\varphi = (f - A)$.*

Denkt man sich also [ebenso wie früher (11.), (12.)] die Pole in lauter *einfache* oder *elementare* Pole aufgelöst, so kann man sagen: *Die elementaren Pole der Function f sind, ihrer Anzahl und Lage nach, identisch mit den elementaren Polen der Function $(f - A)$.* Bezeichnet man diese den beiden Functionen f und $(f - A)$ gemeinschaftliche Anzahl elementarer *Pole* mit q, so ist [zufolge (12.)] die Anzahl der elementaren *Nullpunkte* für jede der beiden Functionen f und $(f - A)$ ebenfalls $= q$. Somit ergiebt sich der Satz:

(29.) *Ist die Function $f = f(z)$ auf einer Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so wird die Anzahl ihrer elementaren Pole ebenso gross sein, wie die Anzahl ihrer elementaren Nullpunkte, und auch ebenso gross sein, wie die Anzahl ihrer elementaren A-Punkte. Dabei sind unter diesen letztern die elementaren Nullpunkte der Function $(f - A)$ zu verstehen, wobei A eine willkürlich gegebene Constante vorstellt.*

Dieses System der A-Punkte, welches für $A = 0$ in das der Nullpunkte, und für $A = \infty$ in das der Pole oder Unendlichkeitspunkte übergeht, mag hinfort kurzweg als ein System von Niveaupunkten bezeichnet werden.

Ueberdies wird es zur Abkürzung zweckmässig sein, wenigstens hin und wieder, noch einen andern Ausdruck einzuführen, entsprechend der folgenden

Definition. — *Eine Function $f = f(z)$, die auf irgend einer Fläche* (30.) *eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig ist, soll als eine auf jener Fläche **reguläre Function** bezeichnet werden.*

Insbesondere sollen die auf einer Riemann'schen Kugelfläche regulären Functionen in Functionen erster, zweiter, dritter u. s. w. Ordnung eingetheilt werden, je nachdem die Anzahl ihrer elementaren Pole = 1, 2, 3 u. s. w. ist.

Dabei bleibt allerdings dahingestellt, ob z. B. eine reguläre Function *erster* Ordnung für eine beliebig gegebene Riemann'sche Kugelfläche stets existiren wird, — eine Frage, zu deren Beantwortung sich erst später die erforderlichen Mittel ergeben werden. — Unter Anwendung dieser neuen Ausdrucksweise lautet nun der Satz (29.) folgendermassen.

Ist die Function $f = f(z)$, mit Bezug auf eine gegebene Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}$, eine reguläre Function qter Ordnung, so (31.) *besteht jedwedes Niveaupunktsystem der Function aus q Punkten. D. h. sie besitzt auf $\mathfrak{R}$ q elementare Pole, ebenso q elementare Nullpunkte, und ebenso allgemein q elementare A-Punkte.*

§ 8.

Eine Function $f(z)$, die auf einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und stetig ist, wird nothwendiger Weise eine Constante sein.

Die Function $f = f(z)$ sei *eindeutig und stetig* auf einer n-blättrigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$. Ferner sei $\Phi(z)$ die Summe derjenigen Werthe $f_1, f_2, \ldots f_n$, welche f in je n übereinander liegenden Punkten z der Fläche $\mathfrak{R}$ besitzt:

$$\Phi(z) = f_1 + f_2 \cdots + f_n.$$

Verpflanzt man nun die Werthe, welche $\Phi(z)$ auf $\mathfrak{R}$ besitzt, nach den *correspondirenden* Punkten der *einblättrigen* Kugelfläche $\mathfrak{r}$ [wobei unter correspondirenden Punkten solche verstanden werden sollen, die einerlei Coordinaten besitzen], so wird $\Phi(z)$ auf $\mathfrak{r}$ überall *eindeutig*, und [zufolge der über f gemachten Voraussetzung] daselbst auch überall *stetig* sein. Folglich [Satz pg. 61] ist $\Phi(z)$ eine *Constante*. In solcher Art lässt sich zeigen, dass jeder der Ausdrücke:

$$f_1 + f_2 \cdots + f_n,$$
$$f_1^2 + f_2^2 \cdots + f_n^2,$$

$$f_1^3 + f_2^3 \cdots + f_n^3,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$f_1^n + f_2^n \cdots + f_n^n$$

constant ist. Gleiches gilt daher auch von $f_1, f_2, \ldots f_n$ selber, mithin von allen Werthen der Function f. Also der Satz:

(32.) *Ist die Function $f = f(z)$ auf einer Riemann'schen Kugelfläche überall eindeutig und stetig, so ist sie eine Constante.*

Um diesen Satz weiter anzuwenden, betrachten wir jetzt zwei Functionen $f = f(z)$ und $\varphi = \varphi(z)$, die auf ein und derselben Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ *eindeutig* und *bis auf einzelne Pole stetig* sein mögen. Gleiches gilt alsdann [nach (24.)] von dem Quotienten

$$\frac{f}{\varphi}.$$

Haben insbesondere f und φ auf $\mathfrak{R}$ überall *dieselben* Ordnungszahlen, so sind die Ordnungszahlen dieses Quotienten [zufolge (25.)] sämmtlich $= 0$. Es wird daher in diesem Falle jener Quotient *keine Pole* haben können, mithin auf $\mathfrak{R}$ allenthalben eindeutig und stetig, also [nach (32.)] eine Constante sein. Also der Satz:

(33.) *Es seien $f = f(z)$ und $\varphi = \varphi(z)$ zwei Functionen, die auf einer gegebenen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig sind. Besitzen nun diese beiden Functionen auf $\mathfrak{R}$ dieselben Pole und Nullpunkte, und überdies in jedem solchen Pol oder Nullpunkt dieselbe Ordnungszahl, so können sie sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden.*

Beispiel. — Die gefundenen Sätze sind selbstverständlich auch anwendbar auf die gewöhnliche *einblättrige* Kugelfläche, welche $\mathfrak{r}$ heissen mag. Es sei nun $f = f(z)$ auf $\mathfrak{r}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig. Ob diese Function f im Punkte $z = \infty$ einen Pol oder einen Nullpunkt oder keines von beiden hat, sei unbekannt. Ihre *sonstigen* Pole und Nullpunkte aber mögen *promiscue* mit $c_1, c_2, \ldots c_g$ und ihre dortigen Ordnungszahlen mit $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_g$ bezeichnet sein. Alsdann ist ihre Ordnungszahl M in jenem Punkte $z = \infty$ sofort angebbar; denn sie muss [zufolge des Satzes (10.)] der Relation entsprechen:

$$(\alpha.) \qquad \mu_1 + \mu_2 \cdots + \mu_g + \mathsf{M} = 0.$$

Bildet man jetzt die *rationale* Function:

$$\varphi = (z - c_1)^{\mu_1} (z - c_2)^{\mu_2} \ldots (z - c_g)^{\mu_g},$$

so wird dieselbe ebenfalls auf $\mathfrak{r}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig sein [zufolge des Satzes pg. 59]. Auch wird ihre Ordnungszahl in $c_1, c_2, \ldots c_g$ respective durch $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_g$, und im Punkte $z = \infty$ durch eine Zahl M′ dargestellt sein, die zu $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_g$ in der Beziehung steht:

$$(\beta.) \qquad \mu_1 + \mu_2 \cdots + \mu_g + \mathsf{M}' = 0.$$

In der That ergiebt sich diese Relation ($\beta.$) in genau derselben Weise, wie sich vorhin die Relation ($\alpha.$) ergab.

Aus ($\alpha.$) und ($\beta.$) folgt sofort: $\mathsf{M} = \mathsf{M}'$. Demgemäss haben die beiden Functionen f und φ überall *dieselben* Ordnungszahlen. Und hieraus folgt, mittelst des Satzes (33.), dass sie sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden können; sodass man zu folgendem Resultat gelangt:

Es sei $f = f(z)$ auf der gewöhnlichen einblättrigen Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig. Bezeichnet man alsdann, nach Ausschluss des Punktes $z = \infty$, alle übrigen Pole und Nullpunkte dieser Function promiscue mit $c_1, c_2, \ldots c_g$, und ihre dortigen Ordnungszahlen mit $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_g$, so wird die Function den Werth haben:

$$f = K(z - c_1)^{\mu_1}(z - c_2)^{\mu_2} \ldots (z - c_g)^{\mu_g}, \tag{$\gamma.$}$$

wo K eine Constante ist. — Man sieht, dass dieser Satz in Einklang steht mit dem früher auf pg. 63 erhaltenen Satz.

§ 9.

Eine Function $f(z)$, die auf einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig ist, wird stets eine algebraische Function von z sein.

Die Function $f = f(z)$ sei eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig auf einer n-blättrigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$; ferner sei $\Phi = \Phi(z)$ das Product derjenigen Werthe $f_1, f_2, \ldots f_n$, welche f in je n übereinander liegenden Punkten z der Fläche $\mathfrak{R}$ besitzt.

Verpflanzt man sämmtliche Werthe der Function f von den Punkten der Fläche $\mathfrak{R}$ nach den *correspondirenden* Punkten der gewöhnlichen *einblättrigen* Kugelfläche $\mathfrak{r}$, so wird offenbar das Product

$$\Phi = \Phi(z) = f_1 f_2 \ldots f_n \tag{34.}$$

auf $\mathfrak{r}$ überall *eindeutig* sein. Dabei sind [ähnlich, wie schon früher] unter correspondirenden Punkten solche zu verstehen, die *dieselben* Coordinaten, mithin auch *dasselbe* z besitzen.

Um die Stetigkeit resp. Unstetigkeit von Φ auf der Fläche $\mathfrak{r}$ zu untersuchen, nehmen wir für z irgend einen beliebigen Werth $z = c$, und markiren auf beiden Flächen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{r}$ die durch $z = c$ sich bestimmenden Punkte. Diese können auf $\mathfrak{R}$ zum Theil, oder vielleicht auch alle, Windungspunkte sein und mögen bezeichnet werden mit $P_1, P_2, \ldots P_\varrho$; und gleichzeitig mag die Anzahl der Blätter, welche in jedem dieser Punkte mit einander zusammenhängen, bezeichnet werden respective mit $m_1, m_2, \ldots m_\varrho$; sodass also $P_\varkappa$ ein Windungspunkt $(m_\varkappa - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist. Andererseits mag der durch $z = c$ auf $\mathfrak{r}$ sich bestimmende Punkt p heissen.

Sind nun $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots \mathfrak{U}_\varrho$ die Bereiche der Punkte $P_1, P_2, \ldots P_\varrho$, so wird die Function f, zufolge der Formel (19.) des Satzes pg. 109, auf $\mathfrak{U}_\varkappa$ darstellbar sein durch:

$$(35.) \qquad f = (z - c)^{\frac{\mu_\varkappa}{m_\varkappa}} E, \quad (\text{auf } \mathfrak{U}_\varkappa),$$

wo $\mu_\varkappa$ die Ordnungszahl von f im Punkte $P_\varkappa$ vorstellt.

Schreibt man diese Formel der Reihe nach hin für $m_\varkappa$ übereinander liegende Punkte z der Fläche $\mathfrak{U}_\varkappa$, so erhält man $m_\varkappa$ Gleichungen von der Gestalt:

$$f = (z - c)^{\frac{\mu_\varkappa}{m_\varkappa}} E,$$

$$f' = (z - c)^{\frac{\mu_\varkappa}{m_\varkappa}} E',$$

$$\text{etc.} \quad \text{etc.},$$

und aus diesen durch Multiplication:

$$(36.) \qquad (ff' \ldots) = (z - c)^{\mu_\varkappa} (EE' \ldots),$$

wo z. B. $f, f' \ldots$ die Werthe von f für jene $m_\varkappa$ übereinander liegenden Punkte z vorstellen, und Analoges in Bezug auf $E, E' \ldots$ zu bemerken ist.

Schreibt man jetzt diese speciell für $\mathfrak{U}_\varkappa$ gebildete Formel (36.) der Reihe nach hin für $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots \mathfrak{U}_\varrho$, so erhält man im Ganzen ϱ solche Formeln, und aus diesen durch Multiplication:

$$(37.) \qquad f_1 f_2 \ldots f_n = (z - c)^{\mu_1 + \mu_2 \cdots + \mu_\varrho} \mathsf{E},$$

wo $f_1, f_2, \ldots f_n$ die Werthe von f in den auf der Fläche $\mathfrak{R}$ übereinander liegenden n Punkten z vorstellen. Diese Formel (37.) nimmt daher mit Rücksicht auf (34.) die Gestalt an:

$$(38.) \qquad \Phi(z) = (z - c)^{\mu_1 + \mu_2 \cdots + \mu_\varrho} \mathsf{E},$$

wo das E eine Function von z bezeichnet, die (ebenso wie $E, E', \ldots$) *stetig* und *nichtverschwindend* ist.

Aus (38.) folgt nun sofort, dass im Bereich $\mathfrak{u}$ des Punktes p *entweder* Φ selber *oder* $\frac{1}{\Phi}$ *stetig* ist, je nachdem die ganze Zahl $(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\varrho)$ einen positiven oder negativen Werth hat. *Wir sehen somit, dass die Function Φ auf der einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{r}$ in jedwedem Punkt $p(z = c)$ entweder stetig, oder aber polarunstetig ist.*

Dabei ist allerdings stillschweigend vorausgesetzt, dass die den Punkt p bestimmende Constante c *endlich* sei. Für den Fall $c = \infty$

gelangt man aber, wie leicht zu übersehen ist, zu genau demselben Resultate, falls man nur bei Anwendung des Satzes pg. 109 nicht die Formel (19.), sondern die Formel (20.) benutzt. — Die Function $\Phi = \Phi(z)$ ist also auf der einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{r}$ überall eindeutig, und bis auf einzelne Pole daselbst auch überall stetig. Folglich ist sie [Satz pg. 63] eine *rationale* Function von z. Also der Satz:

Ist die Function $f = f(z)$ auf einer n-blättrigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, und versteht man unter $f_1, f_2, \ldots f_n$ die Werthe von f in je n übereinander liegenden Punkten der Fläche $\mathfrak{R}$, so wird das Product dieser n Werthe:

(39.) $$\Phi = f_1 f_2 \ldots f_n$$

stets eine rationale Function von z sein.

Die Ordnungszahlen dieser rationalen Function Φ stehen zu denen von f in einfacher Beziehung. Denkt man sich nämlich Φ auf der gewöhnlichen einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{r}$ ausgebreitet, so wird die Ordnungszahl von Φ in irgend einem Punkte $z = c$ der Fläche $\mathfrak{r}$ stets gleich der Summe derjenigen Ordnungszahlen sein, welche f auf der Fläche $\mathfrak{R}$ in den daselbst bei $z = c$ übereinander liegenden Punkten besitzt. (40.) Dieser Zusatz ergiebt sich nämlich sofort aus der in (38.) erhaltenen Formel.

Da f auf $\mathfrak{R}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig sein soll, so gilt [nach (28.)] Gleiches auch von $(f + A)$, $(f + B)$, ..., falls nämlich A, B, ... irgend welche Constanten sind. Durch Anwendung des Satzes (39.) ergiebt sich also, dass die Producte:

$$\Phi = (f_1 + A)(f_2 + A) \ldots (f_n + A),$$
$$\Psi = (f_1 + B)(f_2 + B) \ldots (f_n + B),$$
etc. etc. etc.

rationale Functionen von z sind. Setzt man jetzt zur Abkürzung:

(41.) $$\begin{aligned} F_1 &= f_1 + f_2 + \ldots + f_n, \\ F_2 &= f_1 f_2 + f_1 f_3 + \ldots f_{n-1} f_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n &= f_1 f_2 \ldots f_n, \end{aligned}$$

so kann man diese Grössen Φ, Ψ, ... auch so schreiben:

(42.) $$\begin{aligned} \Phi &= A^n + F_1 A^{n-1} + F_2 A^{n-2} \ldots + F_{n-1} A + F_n, \\ \Psi &= B^n + F_1 B^{n-1} + F_2 B^{n-2} \ldots + F_{n-1} B + F_n, \end{aligned}$$
etc. etc. etc.

Denkt man sich im Ganzen n solche Ausdrücke Φ, Ψ, ... gebildet,

und dabei die n Constanten $A, B, \ldots$ in beliebiger Weise fixirt, so kann man die n Gleichungen (42.) nach $F_1, F_2, \ldots F_n$ auflösen, und wird auf diese Weise für diese $F_1, F_2, \ldots F_n$ Werthe erhalten, welche, ebenso wie die $\Phi, \Psi, \ldots$, *rationale* Functionen von z sind. Also der Satz:

Ist die Function $f = f(z)$ auf einer n-blättrigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, und versteht man unter $f_1, f_2, \ldots f_n$ die Werthe, welche f in je n übereinander liegenden Punkten z der Fläche $\mathfrak{R}$ besitzt, so werden diese $f_1, f_2, \ldots f_n$ stets die Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades sein:

$$f^n - F_1 f^{n-1} + F_2 f^{n-2} - + \ldots + (-1)^n F_n = 0, \tag{43.}$$

deren Coefficienten $F_1, F_2, \ldots F_n$ rationale Functionen von z sind.

Oder kürzer ausgedrückt: *Ist die Function $f = f(z)$ auf irgend* (44.) *einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so wird sie jederzeit eine algebraische Function von z sein.*

§ 10.

Ueber die Differentialquotienten solcher Functionen $f(z)$, die auf einer Riemann'schen Kugelfläche ausgebreitet sind.

Der gegenwärtige Paragraph, welcher an und für sich wenig Interesse darbieten dürfte, soll hauptsächlich dienen als Stützpunkt für spätere Betrachtungen.

Die Function $f = f(z)$ sei auf irgend einem Theil $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche *eindeutig* und *bis auf einzelne Pole stetig*. Markirt man alsdann auf $\mathfrak{S}$ irgend einen Punkt c, und bezeichnet das Bereich dieses Punktes im ursprünglichen und natürlichen Zustande mit $\mathfrak{U}(c, z)$ respective mit $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$, so wird f auf der Fläche $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig sein. Gleiches gilt daher [Satz (1.) pg. 49] auf $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$ auch von der Function $\frac{df}{d\zeta}$. Denkt man sich also jene um c und γ beschriebenen Flächen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{A}$ hinreichend klein, so werden f und $\frac{df}{d\zeta}$ [zufolge des Satzes pg. 41] innerhalb $\mathfrak{A}$ durch folgende Formeln darstellbar sein:

$$f = (\zeta - \gamma)^\mu E, \quad (\text{auf } \mathfrak{A}), \tag{1.}$$

$$\frac{df}{d\zeta} = (\zeta - \gamma)^{\mu'} E', \quad (\text{auf } \mathfrak{A}), \tag{2.}$$

wo μ und μ' die *Ordnungszahlen* von f und $\frac{df}{d\zeta}$ im Punkte γ oder

(was dasselbe ist) im Punkte c vorstellen. Ueberdies repräsentiren E und E' zwei Functionen, die auf $\mathfrak{A}$ eindeutig, stetig und nichtverschwindend sind.

Für jene Ordnungszahlen μ und μ' gilt [Satz pg. 50] die Formel:

$$\mu' = \mu - 1, \quad \text{falls} \quad \mu \lessgtr 0, \tag{3.}$$

hingegen die Formel:

$$\mu' = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots, \quad \text{falls} \quad \mu = 0 \text{ ist.} \tag{4.}$$

Betrachtet man c als einen Windungspunkt $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, wo alsdann m eine der Zahlen 1, 2, 3, ... vorstellt, so findet, was die Zustände $\mathfrak{U}(c, z)$ und $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$ betrifft, zwischen z und ζ eine der beiden Relationen statt:

$$z - c = (\zeta - \gamma)^m, \tag{a.}$$

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{c} = (\zeta - \gamma)^m. \tag{b.}$$

Von diesen beiden Formeln (a.), (b.) ist nur die *erste* anwendbar, falls $c = 0$ ist; nur die *zweite*, falls $c = \infty$. Hingegen sind *beide* anwendbar, falls c weder 0 noch ∞ ist. Man kann also stets die Formel

(A.) $\qquad z - c = (\zeta - \gamma)^m$ benutzen, falls c *verschieden von* ∞ ist;

andererseits aber stets die Formel

(B.) $\qquad z = (\zeta - \gamma)^{-m}$ benutzen, falls c *gleich* ∞ ist.

Und durch Zusammenfassung dieser beiden Formeln (A.) und (B.) gelangt man zu folgendem Satz:

Bezeichnet man auf einer Riemann'schen Kugelfläche das Bereich irgend eines Punktes c in seinem ursprünglichen und natürlichen Zustande respective mit $\mathfrak{U}(c, z)$ *und* $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$, *so darf man stets annehmen, dass die zwischen z und* ζ *stattfindende Relation die Form habe:*

$$z + \text{Const.} = (\zeta - \gamma)^M. \tag{5.}$$

Dabei ist $M = \pm m$, *wo m die Anzahl der im Punkte c mit einander zusammenhängenden Blätter vorstellt. Und zwar ist* $M = + m$, *falls c verschieden von* ∞, *hingegen* $M = - m$, *falls c gleich* ∞. *Diese Zahl M mag in Zukunft die Signatur des Punktes c heissen.*

Aus (5.) folgt durch Differentiation:

$$\frac{dz}{d\zeta} = M(\zeta - \gamma)^{M-1}; \tag{6.}$$

und nunmehr folgt aus (2.) und (6.) durch Division:

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{M}\,(\zeta - \gamma)^{\mu' - M + 1} E', \tag{7.}$$

oder einfacher geschrieben:

$$\frac{df}{dz} = (\zeta - \gamma)^{\mu_1} E_1, \quad (\text{auf } \mathfrak{A}), \tag{8.}$$

wo der Exponent $\mu_1 = (\mu' - M + 1)$ [vgl. die in (3.), (4.) über μ' gemachten Angaben] den Werth hat:

$$\mu_1 = (\mu - M), \quad \text{falls } \mu \lessgtr 0, \tag{9.}$$

$$\mu_1 = (1 - M), (2 - M), (3 - M), \ldots, \quad \text{falls } \mu = 0. \tag{10.}$$

Diese Formeln (8.), (9.), (10.) führen nun sofort zu folgenden Sätzen:

Ist die Function $f = f(z)$ auf irgend einem Theil $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so gilt Gleiches auf $\mathfrak{S}$ auch von dem Differentialquotienten:

$$\frac{df}{dz}. \tag{11.}$$

Sind ferner μ und μ_1 die Ordnungszahlen von f und $\frac{df}{dz}$ in irgend einem Punkte c der Fläche $\mathfrak{S}$, so ist:

$$\mu_1 = (\mu - M), \quad \textit{falls } \mu \lessgtr 0, \tag{12.}$$

hingegen:

$$\mu = (1 - M), (2 - M), (3 - M), \ldots, \quad \textit{falls } \mu = 0. \tag{13.}$$

Hier bezeichnet M die [vorhin bei (5.) definirte] *Signatur des betrachteten Punktes c.*

Besitzt also die Ordnungszahl μ im Punkte c einen der Werthe

$$\mu = \quad \ldots -2, \qquad -1, \qquad 0, \qquad 1, \qquad 2, \ldots \tag{14.}$$

so wird der zugehörige Werth von μ_1 respective dargestellt sein durch:

$$\mu_1 = \ldots (-2 - M), \quad (-1 - M), \quad Q, \quad (1 - M), \quad (2 - M), \ldots \tag{15.}$$

wo das Q eine unbekannte Zahl aus der Reihe $(1 - M)$, $(2 - M)$, $(3 - M), \ldots$ repräsentirt.

Diese Formeln (14.), (15.) zeigen, dass μ_1 nicht blos für $\mu = -1$, -2, -3, ..., sondern auch für $\mu = 0, 1, 2, 3, \ldots$, *negativ* werden kann. Man gelangt in solcher Weise, mit Rücksicht auf die bei (5.) für M gegebene Definition, zu folgendem Satz:

(16.) *Die Pole der Function $\frac{df}{dz}$ können nur an solchen Stellen liegen, wo entweder f selber einen Pol besitzt, oder wo die betrachtete Riemann'sche Fläche einen von $z = \infty$ verschiedenen Windungspunkt hat.*

Sechstes Capitel.

Ueber die Stetigkeit mehrdeutiger Functionen.

Während man bisher bei den Stetigkeitsuntersuchungen mehrdeutiger Functionen zunächst die verschiedenen Werthe der Function von einander zu *separiren*, und sodann diese Werthe *einzeln* auf ihre Stetigkeit zu untersuchen bemüht gewesen ist, soll im Folgenden eine Methode dargelegt werden, mittelst deren man die in Rede stehenden Werthe *gleichzeitig*, und *ohne* vorgängige Separation, der genannten Untersuchung zu unterwerfen vermag.

Uebrigens werden die Untersuchtungen des gegenwärtigen Capitels [welche von mir in kurzem Abriss bereits in den Berichten der kgl. Sächsischen Gesellsch. der Wiss. vom 10. Decbr. 1883 publicirt worden sind] namentlich dazu dienen, um die Betrachtungen des vierten und fünften Capitels zu vervollständigen und weiter zu befestigen.

§. 1.

Allgemeine Ueberlegungen.

Zwischen den beiden complexen Variablen s und z mag die Gleichung festgesetzt sein:

$$F(s, z) = 0;$$

dabei mag, um die Vorstellung zu fixiren, unter $F(s, z)$ eine gegebene *ganze rationale* Function von s und z verstanden werden, n^{ten} Grades für s und m^{ten} Grades für z. Für jedwedes Argument z ergeben sich alsdann aus der vorstehenden Gleichung n elementare Wurzeln s, die, je nach dem Werthe des Argumentes z, bald *vereinzelt* liegen werden, bald aber auch *theilweise* respective *gruppenweise vereinigt* sein können. Bei den folgenden Betrachtungen wollen wir das Argument z als einen variablen Punkt in der *z-Ebene*, und ebenso die zugehörigen n elementaren Wurzeln s als Punkte in einer zweiten Ebene, in der *s-Ebene*, uns vorstellen.

Sind unter den n elementaren Wurzeln s der Gleichung $F(s, z) = 0$ einige, etwa ν vorhanden:

$$s_1, s_2, \ldots s_\nu,$$

die für das Argument $z = c$ ein und denselben Werth $s = k$ annehmen, und die andererseits für jedwedes sehr wenig von c abweichende Argument z Werthe annehmen, die sehr wenig von k verschieden sind, so werden diese ν Wurzeln als Functionen von z zu bezeichnen sein, die im Punkte $z = c$ *stetig* sind. Man gelangt in solcher Weise bei genauer Ueberlegung zu folgendem Satz:

Die Gleichung $F(s, z) = 0$ besitze für irgend ein specielles Argument $z = c$ eine ν-fache Wurzel $s = k$. Ferner bezeichne ε einen willkürlich zu wählenden Kleinheitsgrad.

(1.) *Kann man die Anzahl all' derjenigen elementaren Wurzeln s, welche die Gleichung $F(s, z) = 0$, für ein beliebiges Argument z, innerhalb eines um $s = k$ mit dem Radius ε beschriebenen Kreises besitzt, dadurch constant, $= \nu$ gemacht werden, dass man die Bewegung jenes beliebigen Argumentes z auf einen um $z = c$ beschriebenen hinreichend kleinen Kreis beschränkt; — so werden die in Rede stehenden ν elementaren Wurzeln s als Functionen von z zu bezeichnen sein, die im Punkte $z = c$ stetig sind.*

Ist nämlich die genannte Bedingung erfüllt, so werden die in Rede stehenden ν elementaren Wurzeln s:

$$s_1, s_2, \ldots s_\nu,$$

bei willkürlicher Wahl des Kleinheitsgrades ε, den Formeln

$$\begin{aligned} &\operatorname{mod}(s_1 - k) < \varepsilon, \\ &\operatorname{mod}(s_2 - k) < \varepsilon, \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\operatorname{mod}(s_\nu - k) < \varepsilon \end{aligned}$$

sich subordiniren, falls man nur das Argument z der Bedingung unterwirft:

$$\operatorname{mod}(z - c) < \varrho,$$

und dabei den Kleinheitsgrad ϱ, nach Maassgabe des jedesmaligen ε, *hinreichend klein* macht.

Für unsere weiteren Untersuchungen ist der Satz (1.) *ausreichend.* Doch sei beiläufig bemerkt, dass derselbe auch dann noch richtig bleibt, wenn man in ihm die Anforderung „$= \nu$" durch „$> \nu$" ersetzt, dass man nämlich dem Satz folgende *allgemeinere* Fassung geben kann.

(2.) *Besitzt die Gleichung $F(s, z) = 0$ für $z = c$ eine ν-fache Wurzel $s = k$, bezeichnet ferner ε einen willkürlich gegebenen Kleinheitsgrad, und kann die Anzahl all' derjenigen elementaren Wurzeln s, welche*

die Gleichung $F(s,z)=0$, für ein beliebiges Argument z, innerhalb eines mit dem Radius ε um $s=k$ beschriebenen Kreises besitzt, dadurch $>\nu$ gemacht werden, dass man die Bewegung jenes Argumentes z auf einen um $z=c$ beschriebenen hinreichend kleinen Kreis beschränkt, so werden ν der in Rede stehenden elementaren Wurzeln s als Functionen von z zu bezeichnen sein, die im Punkte $z=c$ stetig sind.

Nur der Bequemlichkeit willen ist bis jetzt die Function $F(s,z)$ als eine *ganze rationale* Function von s und z vorausgesetzt worden. Man übersieht nachträglich sofort, dass die Sätze (1.) und (2.) auf jede *beliebige* Gleichung

$$F(s,z)=0$$

anwendbar sind, welche Beschaffenheit die Function $F(s,z)$ auch immer besitzen mag, falls man nur den Charakter der *elementaren* respective *vielfachen* Wurzeln in bestimmter Weise und zwar in solcher Weise definirt, dass dieser Charakter jedesmal durch eine der Zahlen 1, 2, 3, ... sich ausdrückt.

Bei den nachfolgenden Untersuchungen beginnen wir mit dem einfachen Fall, dass die Function $F(s,z)$ die specielle Form

$$f(s)-z$$

besitzt.

§ 2.

Die Wurzeln einer Gleichung $f(s)=z$.

Die gegebene Function $f(s)$ sei auf irgend einem endlichen Theil $\mathfrak{S}$ der s-Ebene *eindeutig* und *stetig*. Gleiches gilt alsdann von der Function

$$f(s)-c, \tag{3.}$$

falls man nämlich unter c eine *Constante* versteht. Demgemäss werden die Nullpunkte dieser Function (3.) auf $\mathfrak{S}$ niemals ein Curven- oder Flächenelement stetig erfüllen können, sondern stets *vereinzelt* liegen [Satz (27.) pg. 35]. Uebrigens sind dieselben im Allgemeinen von verschiedener Ordnung.

Ein ν-facher Nullpunkt der Function (3.) mag bezeichnet werden als eine ν-fache Wurzel der Gleichung

$$f(s)-c=0; \tag{4.}$$

und ebenso mag jeder *elementare Nullpunkt* der Function (3.) bezeichnet werden als eine *elementare Wurzel* der Gleichung (4.). Die Anzahl N *sämmtlicher* auf $\mathfrak{S}$ vorhandenen elementaren Wurzeln der Gleichung (4.) hat alsdann [Satz (16.) pg. 43] den Werth:

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{S}} d \log [f(\sigma) - c],$$

d. i. den Werth:

$$N = \int_{\mathfrak{S}} \frac{d f(\sigma)}{2\pi i [f(\sigma) - c]}, \tag{5.}$$

die Integration positiv erstreckt über alle Randpunkte σ der Fläche $\mathfrak{S}$. Dabei wird [was sich stets durch eine geringe Deformation des Randes von $\mathfrak{S}$ erreichen lässt] vorausgesetzt, dass keine Wurzel *hart* am Rande von $\mathfrak{S}$ liegt. Sonst nämlich würde das Integral (5.) [durch Nullwerden des Nenners] seinen Sinn verlieren, und gleichzeitig auch die Bedeutung der Zahl N eine völlig unbestimmte werden; denn es würde zweifelhaft sein, ob eine hart am Rande von $\mathfrak{S}$ liegende Wurzel als eine innerhalb oder ausserhalb $\mathfrak{S}$ liegende Wurzel aufzufassen sei.

Aus der Voraussetzung nun, dass die Gleichung (4.) keine hart am Rande von $\mathfrak{S}$ liegende Wurzel besitzt, folgt sofort, dass für alle Punkte σ dieses Randes die Formel stattfindet:

$$\text{mod}\, [f(\sigma) - c] > 2\varrho, \tag{6.}$$

wo ϱ eine positive und von 0 verschiedene Constante vorstellt. Dabei sei noch Folgendes bemerkt: Führt man neben der Constanten c noch irgend welche andere Constante c_1 in die Betrachtung ein, so ergiebt sich aus der identischen Gleichung

$$[f(\sigma) - c] = [f(\sigma) - c_1] + (c_1 - c)$$

sofort:

$$\text{mod}\, [f(\sigma) - c] < \text{mod}\, [f(\sigma) - c_1] + \text{mod}\, (c_1 - c),$$

oder etwas anders geschrieben:

$$\text{mod}\, [f(\sigma) - c_1] > \text{mod}\, [f(\sigma) - c] - \text{mod}\, (c_1 - c),$$

oder mit Rücksicht auf (6.):

$$\text{mod}\, [f(\sigma) - c_1] > 2\varrho - \text{mod}\, (c_1 - c).$$

Diese letzte Formel aber gewinnt, falls man die neue Constante c_1 der Bedingung

$$\text{mod}\, (c_1 - c) < \varrho \tag{7.}$$

unterwirft, die einfachere Gestalt:

$$\text{mod}\, [f(\sigma) - c_1] > (2\varrho - \varrho) = \varrho. \tag{8.}$$

Diese Formel (8.) zeigt, dass die der neuen Constanten c_1 entsprechende Function

$$f(s) - c_1 \tag{9.}$$

am Rande von $\mathfrak{S}$ nirgends verschwindet, dass also die Gleichung

(10.) $$f(s) - c_1 = 0$$

keine hart am Rande von $\mathfrak{S}$ gelegene Wurzel besitzt. Demgemäss wird also die Anzahl N_1 all' derjenigen elementaren Wurzeln, welche diese *neue* Gleichung (10.) innerhalb $\mathfrak{S}$ besitzt, dargestellt sein durch die mit (5.) analoge Formel:

(11.) $$\mathsf{N}_1 = \int_{\mathfrak{S}} \frac{d\, f(\sigma)}{2\pi i\, [f(\sigma) - c_1]}.$$

Diese Formel (11.) gilt, zufolge ihrer soeben gegebenen Begründung, für jedwede der Bedingung (7.) entsprechende Constante c_1, und bleibt also in Kraft, falls man dieses c_1 innerhalb des Spielraums (7.) beliebig variiren lässt. Bei einer solchen Variation von c_1 wird also der Werth des Integrals (11.) von Augenblick zu Augenblick durch eine *ganze Zahl* dargestellt sein. Andererseits aber übersieht man sofort, dass der Werth des Integrals bei einer solchen innerhalb des Spielraums (7.) bleibenden Variation von c_1 nur in *stetiger* Weise sich ändern kann*). Demgemäss ist also die in Rede stehende ganze Zahl während dieser Variation fortdauernd *ein- und dieselbe.*

Die ganze Zahl N_1 bleibt also *constant*, falls man das c_1 innerhalb des Spielraums (7.) beliebig variiren, z. B. identisch mit c werden lässt. Somit folgt aus (11.) und (5.):

(12.) $$\mathsf{N}_1 = \mathsf{N}.$$

Man gelangt daher, indem man $(c + \Delta c)$ für c_1 setzt, zu folgendem Satz:

Erster Satz. — *Versteht man unter $f(s)$ eine Function, die auf irgend einem endlichen Theil $\mathfrak{S}$ der s-Ebene eindeutig und stetig ist, ferner unter c eine beliebig gegebene Constante, und setzt man voraus, dass unter den elementaren Wurzeln der Gleichung*

(13.) $$f(s) = c$$

keine hart am Rande von $\mathfrak{S}$ liegt, so wird die Anzahl der innerhalb $\mathfrak{S}$ befindlichen elementaren Wurzeln dieser Gleichung (13.) *bei einer beliebigen Variation der Constanten c ungeändert bleiben, falls man nur diese Variation Δc der Bedingung unterwirft:*

$$\operatorname{mod}(\Delta c) < \varrho$$

und dabei das (positive) ϱ hinreichend klein macht.

---

*) Denn so lange die Formel (7.) erfüllt bleibt, wird die Formel (8.) ebenfalls in Kraft bleiben, mithin der unter dem Integral vorhandene Nenner von 0 verschieden bleiben.

Man kann diesen Satz offenbar auch in Anwendung bringen auf einen *Theil* der Fläche $\mathfrak{S}$, z. B. auf eine innerhalb $\mathfrak{S}$ liegende *Kreisfläche*. Thut man dies, und bezeichnet man dabei die Grösse c, sobald sie variabel gedacht werden soll, mit dem Buchstaben z, so ergiebt sich folgender Zusatz: Besitzt die in (13.) genannte Gleichung

$$f(s) = c \tag{$\alpha.$}$$

eine innerhalb $\mathfrak{S}$ liegende ν-fache Wurzel $s = k$, und denkt man sich auf der Fläche $\mathfrak{S}$ um diesen Punkt $s = k$ einen Kreis beschrieben, dessen Radius ε beliebig klein, mindestens aber so klein sein soll, dass alle übrigen Wurzeln der Gleichung (α.) *ausserhalb* des Kreises liegen, — alsdann wird die Anzahl all' derjenigen elementaren Wurzeln s, welche die Gleichung

$$f(s) = z \tag{$\beta.$}$$

innerhalb jenes Kreises besitzt, *dadurch* constant, $= \nu$ gemacht werden können, dass man die Grösse z der Bedingung

$$\text{mod}\,(z - c) < \varrho$$

unterwirft, und dabei das (positive) ϱ hinreichend klein macht. *Die in Rede stehenden ν elementaren Wurzeln s, welche für $z = c$ in die ν-fache Wurzel $s = k$ zusammenschmelzen, sind daher* [Satz (1.) pg. 126] *als Functionen von z zu bezeichnen, die im Punkte $z = c$ stetig sind.*

Besitzt die Gleichung $f(s) = c$ *innerhalb* $\mathfrak{S}$ im Ganzen p Wurzeln:

$$s = k_1, \quad s = k_2, \ldots \quad s = k_p,$$

die etwa der Reihe nach ν_1-fach, ν_2-fach, u. s. w. ν_p-fach sind, so wird der soeben ausgesprochene Satz selbstverständlich für jede dieser Wurzeln gelten. Desgleichen wird der Satz auch dann noch anwendbar sein, wenn man, statt der Wurzeln der Gleichung $f(s) = c$, diejenigen der Gleichung $f(s) = C$ ins Auge fasst, wo C *irgend welche* andere Constante vorstellt. Somit gelangt man zu folgendem Resultat:

Zweiter Satz. — *Ist die Function $f(s)$ auf irgend einem endlichen Theile $\mathfrak{S}$ der s-Ebene eindeutig und stetig, so werden die elementaren Wurzeln s der Gleichung*

$$f(s) = z \tag{14.}$$

stetige Functionen von z sein, — selbstverständlich nur insoweit, als die Function $f(s)$ überhaupt charakterisirt ist, also nur insoweit, als jene Wurzeln s innerhalb der gegebenen Fläche $\mathfrak{S}$ liegen.

Wir gehen über zu dem Fall, dass die Function $f(s)$ auf $\mathfrak{S}$ eindeutig, aber nur *bis auf einzelne Pole* stetig ist. Bezeichnet man

diese Pole mit $s = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ und andererseits die Nullpunkte von $f(s)$ mit $s = \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$, so ist $f(s)$ auf der Fläche

$$\mathfrak{S}_\alpha = \mathfrak{S} - |\mathfrak{U}_{\alpha_1} + \mathfrak{U}_{\alpha_2} + \mathfrak{U}_{\alpha_3} + \ldots|,$$

und andererseits $\frac{1}{f(s)}$ auf der Fläche

$$\mathfrak{S}_\beta = \mathfrak{S} - |\mathfrak{U}_{\beta_1} + \mathfrak{U}_{\beta_2} + \mathfrak{U}_{\beta_3} + \ldots|$$

eindeutig und *stetig*. Dabei sollen $\mathfrak{U}_{\alpha_1}, \mathfrak{U}_{\alpha_2}, \mathfrak{U}_{\alpha_3}, \ldots$ die Bereiche der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ vorstellen; und demgemäss soll $\mathfrak{S}_\alpha$ dasjenige Flächenstück bezeichnen, welches von $\mathfrak{S}$ nach Absonderung dieser Bereiche noch übrig bleibt. Andererseits sollen $\mathfrak{U}_{\beta_1}, \mathfrak{U}_{\beta_2}, \ldots$ und $\mathfrak{S}_\beta$ die analogen Bedeutungen besitzen bezüglich der Punkte $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$

Der Satz (14.) ist daher innerhalb $\mathfrak{S}_\alpha$ unmittelbar anwendbar auf die Wurzeln s der Gleichung

$$f(s) = z, \tag{A.}$$

und andererseits innerhalb $\mathfrak{S}_\beta$ anwendbar auf die Wurzeln s der Gleichung:

$$\frac{1}{f(s)} = \frac{1}{z}. \tag{B.}$$

Es ist aber offenbar *ein und dasselbe*, ob man von den Wurzeln s der Gleichung (A.) oder von denen der Gleichung (B.) spricht. Wir gelangen somit zu dem Resultat, dass die innerhalb $\mathfrak{S}$ liegenden elementaren Wurzeln s der Gleichung

$$f(s) = z$$

stetige Functionen von z sind, soweit z endlich bleibt, und dass sie andererseits *stetige* Functionen von $\frac{1}{z}$ sein werden, soweit $\frac{1}{z}$ endlich bleibt. Oder einfacher ausgedrückt:

Dritter Satz. — *Ist die Function $f(s)$ auf einem endlichen Theile $\mathfrak{S}$ der s-Ebene eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, so werden die elementaren Wurzeln s der Gleichung*

$$f(s) = z \tag{15.}$$

Functionen von z sein, die auf der gewöhnlichen einblättrigen z-Kugelfläche überall stetig sind. — Selbstverständlich gilt dieser Satz wiederum nur insoweit, als die Function $f(s)$ überhaupt charakterisirt ist, also nur insoweit, als jene Wurzeln s innerhalb der gegebenen Fläche $\mathfrak{S}$ bleiben.

Ueber die Umkehrung der Gleichung $f(s) = z$. — Die Function $f(s)$ sei eindeutig und stetig auf einer in der s-Ebene um den Punkt $s = k$ be-

schriebenen Kreisfläche $\mathfrak{S}_k$, also innerhalb dieser Fläche $\mathfrak{S}_k$ darstellbar durch die Taylor'sche Reihe [(21.) pg. 34]:

$$f(s) = f(k) + \frac{s-k}{1} f'(k) + \frac{(s-k)^2}{1 \cdot 2} f''(k) + \ldots \tag{α.}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$f(k) = c, \tag{β.}$$

und macht man überdies die Annahme, dafs

$$f'(k) \text{ von 0 verschieden} \tag{γ.}$$

ist, so nimmt die Reihe die Gestalt an:

$$f(s) - c = (s-k)\left[f'(k) + \frac{s-k}{1 \cdot 2} f''(k) + \ldots\right], \tag{δ.}$$

und zeigt also [Satz p. 41], dass die Function $[f(s) - c]$ im Punkte $s = k$ einen Nullpunkt *erster* Ordnung hat. Die Nullpunkte dieser Function können aber [Satz (27.) pg. 35] nur *vereinzelt* vorkommen. Man kann daher um den genannten Nullpunkt $s = k$ (als Centrum) eine Kreisfläche $\mathfrak{S}_k^0$ von solcher Kleinheit beschreiben, dass alle übrigen Nullpunkte der Function *ausserhalb* $\mathfrak{S}_k^0$ liegen. Alsdann wird also, um dieselbe Sache mit etwas andern Worten zu wiederholen, von den elementaren Wurzeln s der Gleichung

$$f(s) = c \tag{ε.}$$

eine im Mittelpunkt $s = k$ der Kreisfläche $\mathfrak{S}_k^0$ liegen, während alle übrigen *ausserhalb* $\mathfrak{S}_k^0$ sich befinden.

Und diese Situation der elementaren Wurzeln s der Gleichung (ε.) wird [zufolge des vorhergehenden Satzes pg. 129] auch dann noch fortdauern, wenn man in jener Gleichung (ε.) an Stelle von c eine *andere* Constante eintreten lässt, falls nur diese neue Constante nicht zu stark von c abweicht. In der That gelangt man [auf Grund des citirten Satzes] zu folgendem Resultat:

Die Anzahl der innerhalb $\mathfrak{S}_k^0$ vorhandenen elementaren Wurzeln s der Gleichung

$$f(s) = z \tag{ζ.}$$

ist beständig $= 1$, falls man nur das Argument z der Bedingung unterwirft:

$$\text{mod}\,(z - c) < \varrho,$$

und dabei das ϱ hinreichend klein macht. Auch wird die in Rede stehende *eine* Wurzel für $z = c$ in den Mittelpunkt $s = k$ der Fläche $\mathfrak{S}_k^0$ hineinfallen; [vgl. (β.)].

Jedem Punkte z innerhalb der um $z = c$ mit dem Radius ϱ beschriebenen Kreisfläche entspricht alsdann nur *eine* innerhalb $\mathfrak{S}_k^0$ liegende elementare Wurzel s. Es ist mithin diese Wurzel s, so lange z innerhalb jenes Kreises (ϱ) bleibt, eine *eindeutige* Function von z, zugleich aber auch [nach Satz pg. 130] eine *stetige* Function von z, also entwickelbar in die Taylor'sche Reihe:

$$s = A + B(z - c) + C(z - c)^2 + \ldots \tag{η.}$$

Ueberdies wird, wie vorhin constatirt wurde, die in Rede stehende Wur-

zel s für $z = c$ in den Punkt $s = k$ hineinfallen. Die in (η.) auftretende Constante A ist daher $= k$. Also der Satz:

Die Function $f(s)$ sei in der s-Ebene auf einer um den Punkt $s = k$ beschriebenen Kreisfläche eindeutig und stetig. Ferner sei $f(k) = c$, und $f'(k)$ verschieden von 0. Alsdann wird unter den elementaren Wurzeln s der Gleichung

$$f(s) = z \tag{ϑ.}$$

eine vorhanden sein, deren Werth innerhalb eines in der z-Ebene um $z = c$ beschriebenen hinreichend kleinen Kreises darstellbar ist durch die nach Potenzen von $z - c$ fortschreitende Reihe:

$$s = k + B(z - c) + C(z - c)^2 + D(z - c)^3 + \ldots,$$

wo $B, C, D, \ldots$ constante Coefficienten vorstellen.

Dies ist im Wesentlichen derselbe Satz, der von *Thomae* — übrigens auf ganz *anderm* Wege — bewiesen ist in seiner *elementaren Theorie der analytischen Functionen*, Halle 1880. Vergl. daselbst pg. 107, § 136.

§ 3.

Weitere Untersuchungen über die Wurzeln einer Gleichung $f(s) = z$.

Man kann den letzterhaltenen Satz (pg. 131) auf solche Functionen $f(s)$ ausdehnen, die entweder auf der gewöhnlichen *einblättrigen s-Kugelfläche,* oder allgemeiner auf einer Riemann'schen *mehrblättrigen* s-Kugelfläche ausgebreitet sind. Um sogleich zum letztern Fall überzugehen, wollen wir annehmen, die Function $f(s)$ sei eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig auf irgend einem *Theil* $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen mehrblättrigen s-Kugelfläche.

Bezeichnet man den Werth der gegebenen Function $f(s)$ in irgend einem Punkte s der *mehrblättrigen* Fläche $\mathfrak{S}$ mit z:

$$f(s) = z, \tag{α.}$$

und denkt man sich dieses z geometrisch dargestellt als einen Punkt auf der gewöhnlichen *einblättrigen* z-Kugelfläche, so wird jedem Punkt s der Fläche $\mathfrak{S}$ immer nur *ein* Punkt z der genannten Kugelfläche entsprechen. Denn die Function $f(s)$ soll [nach unserer Voraussetzung] auf der Fläche $\mathfrak{S}$ *eindeutig* sein, und hat also in jedem Punkte s dieser Fläche immer nur *einen* Werth. — Umgekehrt aber werden einem Punkte z der einblättrigen z-Kugelfläche im Allgemeinen *mehrere* Punkte s der Fläche $\mathfrak{S}$ entsprechen. Denn für jedwedes z liefert die Gleichung (α.) im Allgemeinen *mehrere* Werthe oder Wurzeln s.

Um nun unseren Betrachtungen keine unnöthige Einschränkung aufzuerlegen, nehmen wir an, dass der gegebene mehrblättrige Flächentheil $\mathfrak{S}$ irgend welche an der Stelle $s = \infty$ übereinander liegende Punkte $S_1, S_2, \ldots S_p$ enthält, indem wir zugleich die Werthe der Function $f(s)$ in diesen Punkten respective mit $Z_1, Z_2, \ldots Z_p$ bezeichnen, so dass also die Formeln stattfinden:

$$(\beta.)\qquad \begin{cases} \text{in } S_1: f(S_1) = Z_1\,, \\ \text{in } S_2: f(S_2) = Z_2\,, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \text{in } S_p: f(S_p) = Z_p\,. \end{cases}$$

Dabei ist selbstverständlich:

$$(\gamma.)\qquad S_1 = S_2 = S_3 = \ldots = S_p = \infty$$

und es sollen also die Buchstaben $S_1, S_2, \ldots S_p$ nur dazu dienen, um die in der Fläche $\mathfrak{S}$ bei $s = \infty$ übereinander liegenden Punkte in irgend welcher Weise von einander zu unterscheiden.

Will man nun, was die Wurzeln s der Gleichung $(\alpha.)$: $f(s) = z$ betrifft, das Argument z so einrichten, dass eine dieser Wurzeln in einen der Punkte $S_1, S_2, \ldots S_p$ hineinfällt, so muss man das genannte Argument z nothwendiger Weise identisch machen mit einer der Constanten $Z_1, Z_2, \ldots Z_p$. Umgekehrt kann man also sagen:

(δ.) *Die Wurzeln s der Gleichung $(\alpha.)$ werden nothwendiger Weise von S_1, $S_2, \ldots S_p$ verschieden, mithin, soweit sie auf $\mathfrak{S}$ liegen, nothwendiger Weise endlich bleiben, falls man nur das in jener Gleichung enthaltene Argument z verschieden erhält von $Z_1, Z_2, \ldots Z_p$.*

Für $z = Z_1$ hingegen wird *eine* jener Wurzeln s *unendlich gross* sein, nämlich in S_1 liegen; während die *übrigen* durch irgend welche *endliche Grössen* $E, E', E'', \ldots$ dargestellt sein werden. Dabei ist allerdings noch eine gewisse Correction erforderlich, — insofern, als möglicher Weise einige der Constanten $Z_1, Z_2, \ldots Z_p$ unter einander identisch sein können. Ist z. B. Z_2 identisch mit Z_1, während $Z_3, Z_4, \ldots Z_p$ von Z_1 verschieden sind, und macht man in diesem Fall das variable Argument z wiederum $= Z_1$, so werden offenbar *zwei* von jenen Wurzeln s unendlich gross, nämlich respective in S_1 und S_2 gelegen sein. Um die Hauptsache zusammenzufassen:

(ε.) *Bezeichnet man irgend eine specielle unter den Constanten $Z_1, Z_2, \ldots Z_p$ mit Z_j, ferner diejenigen der Punkte $S_1, S_2, \ldots S_p$, in denen die Fnnction $f(s)$ diesen speciellen Werth Z_j annimmt, mit $S_j, S_j', S_j'', \ldots$, so werden die aus der Gleichung $(\alpha.)$ für $z = Z_j$ resultirenden Wurzeln s, soweit sie innerhalb $\mathfrak{Z}$ liegen, theils durch die unendlichen Punkte:*

$$S_j,\ S_j',\ S_j'',\ \ldots,$$

theils vielleicht ausserdem durch irgend welche andere endliche Punkte:

$$E_j,\ E_j',\ E_j'',\ \ldots$$

dargestellt sein.

Die Wurzeln s, von denen die Sätze $(\delta.)$ und $(\varepsilon.)$ handeln, sind zerlegbar in *elementare* Wurzeln. Und diese letztern bilden den eigentlichen Gegenstand der weitern Betrachtungen. Die dabei zu Grunde zu legende *Definition* mag folgende sein.

Unter den *elementaren Wurzeln* s der Gleichung

$$(1.)\qquad f(s) - z = 0$$

sollen [bei festgehaltenem z] diejenigen *elementaren Nullpunkte* s verstanden werden, mit denen die Function

(2.) $$f(s) - z$$

auf der gegebenen *mehrblättrigen Fläche* $\mathfrak{S}$ behaftet ist.

Betrachtet man das Argument z als einen Punkt auf der *einblättrigen z-Kugelfläche*, und versetzt man daselbst diesen Punkt z in irgend welche Bewegung, so werden jene elementaren Nullpunkte oder Wurzeln s auf der mehrblättrigen Fläche $\mathfrak{S}$ ebenfalls in Bewegung gerathen. Die Stetigkeit, respective Unstetigkeit dieser Bewegung soll näher untersucht werden.

Wir markiren auf der einblättrigen z-Kugelfläche irgend einen *beliebigen* Punkt $z = c$, und ausserdem die festen Punkte $z = Z_1$, $Z_2, \ldots Z_p$, wobei unter $Z_1, Z_2, \ldots Z_p$ diejenigen Werthe verstanden sein sollen, welche die Function $f(s)$ auf der Fläche $\mathfrak{S}$ in den bei $s = \infty$ übereinander liegenden Punkten $S_1, S_2, \ldots S_p$ besitzt [vgl. (β.)]. Die Gleichung (1.) besitze nun für $z = c$ irgend welche auf $\mathfrak{S}$ gelegene Wurzeln $s = k_1$, $s = k_2$, ... $s = k_g$, die etwa der Reihe nach ν_1-fach, ν_2-fach u. s. w. ν_g-fach sind, wobei die $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_g$ irgend welche Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, ... vorstellen. Es handelt sich darum, *irgend eine* dieser Wurzeln zu untersuchen. Dieselbe mag schlechtweg mit $s = k$ bezeichnet und ν-fach sein, also eine Vereinigung von ν elementaren Wurzeln repräsentiren.

Denkt man sich den Coincidenzpunkt $s = k$ dieser ν elementaren Wurzeln auf der Fläche $\mathfrak{S}$ wirklich markirt, und sodann das Bereich $\mathfrak{U}(k, s)$ dieses Punktes mittelst einer der beiden Substitutionen:

(3). $$s - k = (\sigma - \varkappa)^m,$$
$$\frac{1}{s} - \frac{1}{k} = (\sigma - \varkappa)^m$$

in seinen *natürlichen* Zustand $\mathfrak{A}(\varkappa, \sigma)$ versetzt*), so verwandelt sich hierbei (z vorläufig als constant betrachtet) die Function

$$f(s) - z$$

in eine von σ abhängende Function

$$f[\sigma] - z;$$

und gleichzeitig verwandeln sich dabei die auf $\mathfrak{U}$ liegenden elementaren Nullpunkte $s_1, s_2, s_3, \ldots$ der einen Function in die auf $\mathfrak{A}$ be-

*) Die Buchstaben

$$\mathfrak{U},\ m,\ k,\ s \quad \text{und} \quad \mathfrak{A},\ \varkappa,\ \sigma$$

sind hier in analogem Sinn gebraucht, wie früher (pg. 96) die Buchstaben:

$$\mathfrak{U},\ m,\ c,\ z \quad \text{und} \quad \mathfrak{A},\ \gamma,\ \zeta.$$

findlichen elementaren Nullpunkte $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ der andern. Mit andern Worten: Die auf $\mathfrak{U}$ gelegenen elementaren Wurzeln $s_1, s_2, s_3, \ldots$ der Gleichung

$$f(s) - z = 0$$

verwandeln sich dabei in die auf $\mathfrak{A}$ liegenden elementaren Wurzeln $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ der Gleichung

$$f[\sigma] - z = 0.$$

Nach unserer Voraussetzung sollte aber $f(s)$ auf $\mathfrak{S}$, mithin auch auf $\mathfrak{U}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig sein. Gleiches gilt daher von $f[\sigma]$ auf der Fläche $\mathfrak{A}$. Zufolge des vorhergehenden Satzes (pg. 131) sind daher $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ Functionen von z, die auf der einblättrigen z-Kugelfläche *stetig* sind. Dies überträgt sich mittelst der Relationen (3.) auf die $s_1, s_2, s_3, \ldots$, und zwar entweder geradezu auf die $s_1, s_2, s_3, \ldots$ selber, oder aber auf ihre reciproken Werthe $\frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \frac{1}{s_3}, \ldots$, je nachdem von jenen beiden Relationen (3.) die erste oder zweite gültig ist.

Nun ist von den beiden Relationen (3.) stets die *erste* anwendbar, falls k *endlich* ist; während man im Falle eines *unendlichen* k die *zweite* zu benutzen hat. Die auf $\mathfrak{U}$ liegenden elementaren Wurzeln s der Gleichung (1.) repräsentiren also Functionen von z, welche auf der einblättrigen z-Kugelfläche *stetig* sind, falls k *endlich* ist. Und andererseits werden die reciproken Werthe dieser Functionen auf der genannten Kugelfläche *stetig* sein, falls k *unendlich gross* sein sollte.

Diese Resultate sind offenbar z. B. ohne Weiteres anwendbar auf *diejenigen* ν elementaren Wurzeln s, welche auf der Fläche $\mathfrak{U}$ für $z = c$ im Punkte $s = k$ coincidiren. D. h. *diese* ν *Wurzeln sind,* (4.) *als Functionen von* z *betrachtet, auf der einblättrigen* z*-Kugelfläche im Punkte* $z = c$ *stetig, falls* k *endlich ist, hingegen daselbst polar-unstetig, falls* k *unendlich gross ist.* Nun ist aber das k [nach Satz (δ.)] stets *endlich*, falls nur $z = c$ verschieden ist von den anfangs markirten festen Punkten $Z_1, Z_2, \ldots Z_p$; während andererseits k bald *endlich*, bald *unendlich* sein wird, falls der Punkt $z = c$ in einen jener festen Punkte $Z_1, Z_2, \ldots Z_p$ hineinfällt [vgl. den Satz (ε.)]. — Demgemäss gelangen wir zu folgendem Resultat:

Vierter Satz. — *Ist die Function* $f(s)$ *auf irgend einem Theil* $\mathfrak{S}$ *einer Riemann'schen mehrblättrigen* s*-Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig, und bezeichnet man die elementaren Wurzeln der Gleichung*

$$f(s) = z \tag{5.}$$

kurzweg mit s, so sind diese s, als Functionen von z betrachtet, auf der gewöhnlichen einblättrigen z-Kugelfläche bis auf einzelne Punkte Z_1, $Z_2, \ldots Z_p$ stetig. Im Punkte Z_1 hingegen sind diese Functionen theils stetig, theils polarunstetig, jenachdem sie daselbst endliche oder unendliche Werthe besitzen. Gleiches gilt für $Z_2, Z_3, \ldots Z_p$.

Die in Rede stehenden festen Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots Z_p$ sind dabei zu definiren als diejenigen Werthe, welche die gegebene Function $f(s)$ auf der Fläche $\mathfrak{S}$ in den bei $s = \infty$ übereinander liegenden Punkten besitzt. Ueberdies ist hinzuzufügen, dass der Satz selbstverständlich nur soweit gilt, als die Function $f(s)$ überhaupt charakterisirt ist, also nur insoweit, als jene Wurzeln s innerhalb der Fläche $\mathfrak{S}$ bleiben.

Man kann übrigens diesen Satz, wie direct aus (4.) folgt, auch folgendermassen aussprechen:

Andere Form des vierten Satzes. — *Die Function $f(s)$ sei auf irgend einem Theil $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen mehrblättrigen s-Kugelfläche eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig. Ferner besitze die Gleichung*

$$f(s) = z \tag{6.}$$

für irgend ein Argument $z = c$ im Ganzen $(\nu_1 + \nu_2 \ldots + \nu_g)$ auf $\mathfrak{S}$ gelegene elementare Wurzeln s, von denen ν_1 im Punkte $s = k_1$, ν_2 im Punkte $s = k_2$ u. s. w., ν_g im Punkte $s = k_g$ vereinigt sind. Denkt man sich alsdann auf der Fläche $\mathfrak{S}$ um diese Punkte $k_1, k_2, \ldots k_g$ beliebig kleine Kreislinien beschrieben, so werden die in Rede stehenden elementaren Wurzeln s der Gleichung (6.) innerhalb dieser Kreislinien verbleiben, falls man nur die Bewegung des Argumentes z auf einen Kreis beschränkt, der auf der einblättrigen z-Kugelfläche um den Punkt $z = c$ mit hinreichend kleinem Radius beschrieben ist.

Oder kürzer ausgedrückt: Die Lagen der elementaren Wurzeln
(7.) *s der Gleichung (6.) auf der Fläche $\mathfrak{S}$ werden stetige Functionen derjenigen Lage sein, welche das Argument z auf der einblättrigen z-Kugelfläche besitzt.*

Wir haben nun früher eine Function $f(s)$, die auf einer Riemann'schen s-Kugelfläche $\mathfrak{R}$ eindeutig und bis auf q elementare Pole stetig ist, kurzweg als eine auf $\mathfrak{R}$ *reguläre Funktion q^{ter} Ordnung* bezeichnet. Auch haben wir alsdann [pg. 116, 117] die q elementaren Wurzeln s der Gleichung

$$f(s) = \text{Const.}$$

kurzweg ein *Niveaupunktsystem* der Function $f(s)$ genannt. Demgemäss ergeben sich aus (7.) folgende Zusätze:

Erster Zusatz. — *Bezeichnet $\mathfrak{R}$ irgend eine mehrblättrige Riemann'sche s-Kugelfläche, und $f(s)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung, und denkt man sich ferner auf $\mathfrak{R}$ diejenigen Punkte $s_1, s_2, \ldots s_q$ markirt, in denen die Function $f(s)$ ein und denselben Werth z einnimmt, so wird dies dem Werthe z entsprechende Niveaupunktsystem $s_1, s_2, \ldots s_q$ seine Lage auf der Fläche $\mathfrak{R}$ Schritt für Schritt in stetiger Weise ändern, sobald man jenes z auf der einblättrigen z-Kugelfläche in irgend welche Bewegung versetzt.* (8.)

Zweiter Zusatz. — *Bezeichnet man ferner irgend ein Niveaupunktsystem der in Rede stehenden Function $f(s)$ auf der Fläche $\mathfrak{R}$ mit $s_1, s_2, \ldots s_q$, so wird stets ein zweites Niveaupunktsystem $t_1, t_2, \ldots t_q$ dieser Function existiren, welches seiner Lage nach von jenem ersten nur unendlich wenig verschieden ist.* (9.)

§ 4.

Die Wurzeln einer Gleichung $F(s, z) = 0$.

Es sei $F(s, z)$ eine gegebene Function der beiden complexen Argumente s und z. Ferner sei $\mathfrak{S}$ irgend ein endlicher Theil der s-Ebene, und $\mathfrak{Z}$ irgend ein endlicher Theil der z-Ebene. Und jene Function mag folgenden Bedingungen entsprechen:

(1.)

I. Bei festgehaltenem s soll $F(s, z)$ auf $\mathfrak{Z}$ eindeutig und stetig sein, falls nur jenes festgehaltene s innerhalb $\mathfrak{S}$ liegt.

II. Umgekehrt soll $F(s, z)$ bei festgehaltenem z auf $\mathfrak{S}$ eindeutig und stetig sein, falls nur das festgehaltene z auf $\mathfrak{Z}$ liegt.

III. Es soll eine *endliche* positive Constante M existiren von solcher Beschaffenheit, dass

$$\text{mod}\, F(s, z) \text{ stets } < M$$

ist, so lange s und z respective auf $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{Z}$ bleiben.

Versteht man also unter c einen innerhalb $\mathfrak{Z}$ beliebig markirten Punkt, so ist die Function

$$F(s, c) \tag{2.}$$

innerhalb $\mathfrak{S}$ eindeutig und stetig, also daselbst [Satz (27.) pg. 35] nur mit *vereinzelten* Nullpunkten behaftet. Die elementaren Nullpunkte dieser Function (2.) mögen nun bezeichnet werden als die *elementaren Wurzeln* der Gleichung

$$F(s, c) = 0. \tag{3.}$$

Alsdann erhält man [Satz (16.) pg. 43] für die Anzahl N all' derjenigen elementaren Wurzeln s, welche die Gleichung (3.) innerhalb $\mathfrak{S}$ besitzt, die Formel:

$$\mathsf{N} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{S}} d\log F(\sigma, c),$$

d. i. die Formel:

$$(4.)\qquad \mathsf{N} = \int_{\mathfrak{S}} \frac{d\,F(\sigma, c)}{2\pi i\, F(\sigma, c)},$$

die Integration positiv erstreckt über alle Randpunkte σ der Fläche $\mathfrak{S}$. Dabei ist vorausgesetzt, dass keine Wurzel s *hart* am Rande von $\mathfrak{S}$ liegt, — eine Voraussetzung, die, falls sie nicht von Hause aus schon erfüllt sein sollte, leicht durch eine kleine Deformation der Randcurve realisirbar sein wird.

Dieser Voraussetzung entsprechend, gilt für sämmtliche Randpunkte σ der Fläche $\mathfrak{S}$ die Formel:

$$(5.)\qquad \text{mod}\, F(\sigma, c) > 2A,$$

wo A eine positive und von 0 verschiedene Constante vorstellt. Markirt man nun innerhalb $\mathfrak{Z}$ irgend einen zweiten Punkt c_1, so ergiebt sich aus der identischen Gleichung

$$F(\sigma, c) = F(\sigma, c_1) - [F(\sigma, c_1) - F(\sigma, c)]$$

sofort:

$$\text{mod}\, F(\sigma, c) < \text{mod}\, F(\sigma, c_1) + \text{mod}\,[F(\sigma, c_1) - F(\sigma, c)],$$

oder anders geschrieben:

$$\text{mod}\, F(\sigma, c_1) > \text{mod}\, F(\sigma, c) - \text{mod}\,[F(\sigma, c_1) - F(\sigma, c)],$$

oder mit Rücksicht auf (5.):

$$(6.)\qquad \text{mod}\, F(\sigma, c_1) > 2A - \text{mod}\,[F(\sigma, c_1) - F(\sigma, c)].$$

Wir wollen uns nun den Punkt c_1 sehr nahe an c denken. Um c (als Centrum) beschreiben wir innerhalb $\mathfrak{Z}$ zwei concentrische Kreisperipherien $(\mathsf{\zeta})$ und (Z), der Art, dass c_1 innerhalb $(\mathsf{\zeta})$ liegt, und $(\mathsf{\zeta})$ kleiner als (Z) ist. Alsdann erhält man [Satz (10.) pg. 21] auf Grund der Voraussetzungen (1.) sofort die Formeln:

$$F(\sigma, c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathsf{Z})} \frac{F(\sigma, \mathsf{Z})\, d\mathsf{Z}}{\mathsf{Z} - c},$$

$$F(\sigma, c_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathsf{Z})} \frac{F(\sigma, \mathsf{Z})\, d\mathsf{Z}}{\mathsf{Z} - c_1},$$

und hieraus durch Subtraction

$$(7.)\qquad F(\sigma, c_1) - F(\sigma, c) = \frac{c_1 - c}{2\pi i}\int_{(\mathsf{Z})} \frac{F(\sigma, \mathsf{Z})\, d\mathsf{Z}}{(\mathsf{Z} - c)\,(\mathsf{Z} - c_1)},$$

die Integrationen durchweg positiv erstreckt gedacht über alle Randpunkte Z des Kreises (Z).

Sind nun ϱ und P die Radien der beiden Peripherien (ζ) und (Z), und beachtet man, dass c_1 innerhalb der *kleineren* Peripherie (ζ) liegt, hingegen Z einen Punkt der *grösseren* Peripherie (Z) bezeichnet, so ergiebt sich sofort, dass z. B. der gegenseitige Abstand der beiden Punkte c_1 und Z grösser als $(\mathsf{P} - \varrho)$ ist, dass also die Formel stattfindet: $\operatorname{mod}(Z - c_1) > (\mathsf{P} - \varrho)$, oder, was dasselbe, die Formel:

$$(\alpha.)\qquad \frac{1}{\operatorname{mod}(Z - c_1)} < \frac{1}{\mathsf{P} - \varrho}.$$

Da ferner c das Centrum der Peripherie (Z) vorstellt, so ist offenbar: $\operatorname{mod}(Z - c) = \mathsf{P}$, mithin:

$$(\beta.)\qquad \frac{1}{\operatorname{mod}(Z - c)} = \frac{1}{\mathsf{P}}.$$

In ähnlicher Weise erhält man ferner:

$$(\gamma.)\qquad \operatorname{mod}(c_1 - c) < \varrho,$$

und weiter:

$$(\delta.)\qquad \operatorname{mod}(dZ) = d\Pi,$$

falls man nämlich unter $d\Pi$ das Längenelement der Peripherie (Z) versteht. Ueberdies gilt nach (1.) für alle Lagen, welche die Punkte σ und Z respective am Rande (σ) und der Peripherie (Z) anzunehmen im Stande sind, die Formel:

$$(\varepsilon.)\qquad \operatorname{mod} F(\sigma, Z) < M,$$

wo M eine *endliche* positive Constante vorstellt.

Mit Rücksicht auf $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$, $(\delta.)$, $(\varepsilon.)$ folgt nun aus (7.):

$$\operatorname{mod}[F(\sigma, c_1) - F(\sigma, c)] < \frac{\varrho}{2\pi}\,\frac{M \,.\, 2\pi\mathsf{P}}{\mathsf{P}(\mathsf{P} - \varrho)},$$

d. i.

$$(8.)\qquad \operatorname{mod}[F(\sigma, c_1) - F(\sigma, c)] < \frac{M\varrho}{\mathsf{P} - \varrho},$$

eine Formel, deren rechte Seite offenbar durch Verkleinerung von ϱ *beliebig klein* gemacht werden kann.

(9.) *Wir wollen uns nun fortan den Radius ϱ der um c* (als Centrum) *beschriebenen und c_1 umschliessenden Peripherie (ζ) so klein denken*, dass jene rechte Seite der Formel (8.) kleiner als A ist, mithin die Formel selber übergeht in:

$$\operatorname{mod}[F(\sigma, c_1) - F(\sigma, c)] < A.$$

Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich alsdann aus (6.):

$$(10.)\qquad \operatorname{mod} F(\sigma, c_1) > (2A - A) = A.$$

Diese Formel zeigt, dass die der *neuen* Constante c_1 entsprechende Function $F(s, c_1)$ am Rande von $\mathfrak{S}$ nirgends verschwindet,

dass also die Gleichung $F(s, c_1) = 0$ keine hart am Rande von $\mathfrak{S}$ gelegene Wurzel besitzt. Demgemäss wird also die Anzahl N_1 all' derjenigen elementaren Wurzeln, welche diese *neue* Gleichung

$$F(s, c_1) = 0 \tag{11.}$$

innerhalb $\mathfrak{S}$ besitzt, dargestellt sein durch die zu (4.) analoge Formel:

$$\mathsf{N}_1 = \int_{\mathfrak{S}} \frac{dF(\sigma, c_1)}{2\pi i\, F(\sigma, c_1)}. \tag{12.}$$

Diese Formel (12.) gilt, zufolge ihrer soeben gegebenen Begründung, für jedweden innerhalb der Peripherie (ζ) gelegenen Punkt c_1, und bleibt also in Kraft, falls man diesen Punkt innerhalb (ζ) beliebig variiren lässt. Bei einer solchen Variation von c_1 wird also der Werth des Integrales (12.) von Augenblick zu Augenblick durch eine *ganze Zahl* ausgedrückt sein. Andererseits aber übersieht man sofort, dass der Werth des Integrales bei einer solchen Variation des Punktes c_1 nur in *stetiger* Weise sich ändern kann*). Demgemäss ist also die in Rede stehende ganze Zahl während dieser Variation stets *ein und dieselbe.*

Die ganze Zahl N_1 bleibt mithin *constant*, falls man den Punkt c_1 innerhalb der Peripherie (ζ) beliebig variiren, z. B. identisch werden lässt mit dem Centrum c dieser Peripherie. Somit folgt aus (12.) und (4.):

$$\mathsf{N}_1 = \mathsf{N}. \tag{13.}$$

Man gelangt daher, indem man $(c + \Delta c)$ für c_1 substituirt, zu folgendem Resultat:

Erster Satz. — *Es sei $\mathfrak{S}$ ein endlicher Theil der s-Ebene, ebenso $\mathfrak{Z}$ irgend ein endlicher Theil der z-Ebene. Entspricht nun die Function $F(s, z)$ auf $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{Z}$ den Bedingungen* (1.) pg. 138, *versteht man ferner unter c irgend einen Punkt innerhalb $\mathfrak{Z}$, und setzt man voraus, dass die Gleichung*

$$F(s, c) = 0 \tag{14.}$$

keine hart am Rande von $\mathfrak{S}$ gelegene Wurzel besitzt, so wird die Anzahl der i n n e r h a l b *$\mathfrak{S}$ befindlichen elementaren Wurzeln dieser Gleichung* (14.) *bei einer beliebigen Variation des Punktes c ungeändert bleiben, falls man nur diese Variation Δc der Bedingung unterwirft:*

$$\text{mod}\,(\Delta c) < \varrho,$$

und dabei das (positive) ϱ hinreichend klein macht.

---

*) Denn so lange c_1 innerhalb (ζ) bleibt, wird [vgl. (9.), (10.)] die Formel stattfinden: $\text{mod}\, F(\sigma, c_1) > A$, mithin der unter dem Integral stehende Nenner von 0 verschieden bleiben.

Gestützt auf diesen Satz kann man nun ebenso vorwärts gehen, wie im vorhergehenden Paragraph vom dortigen *ersten Satze* aus (pg. 129). An Stelle des dortigen *zweiten Satzes* (pg. 130) ergiebt sich alsdann, wie leicht zu übersehen ist, folgender:

Zweiter Satz. — *Es seien* 𝔖 *und* 𝔷 *irgend zwei endliche Theile der s- und z-Ebene. Ferner sei $F(s, z)$ eine Function, welche auf* 𝔖 *und* 𝔷 *den Bedingungen* (1.) pg. 138 *entspricht. Alsdann werden die elementaren Wurzeln s der Gleichung*

$$F(s, z) = 0$$

stetige Functionen von z sein, — selbstverständlich nur insoweit, als die Charakterisirung der Function $F(s, z)$ reicht, also nur insoweit, als die Punkte s und z innerhalb der gegebenen Flächen 𝔖 *und* 𝔷 *bleiben.*

Man könnte nun weiter solche Functionen $F(s, z)$ in Betracht ziehen, welche bei festgehaltenem z eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig sind auf einem gegebenen Theile 𝔖 einer mehrblättrigen Riemann'schen s-Kugelfläche, und welche andererseits bei festgehaltenem s dieselben Eigenschaften besitzen mit Bezug auf einen gegebenen Theil 𝔷 einer mehrblättrigen Riemann'schen z-Kugelfläche. Ohne uns hierauf weiter einzulassen, wollen wir im folgenden Paragraph sofort zu *specielleren* Betrachtungen übergehen.

§ 6.

Die Wurzeln der Gleichung $F(s, z) = 0$, unter der Voraussetzung, dass $F(s, z)$ eine ganze rationale Function von s und z ist.

Versteht man unter

$$F = F(s, z) = F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z})$$

eine *ganze rationale* Function der beiden complexen Variablen s und z, n^{ten} Grades für s, und m^{ten} Grades für z, so liefert die Gleichung

$$F = 0 \tag{1.}$$

für jedwedes z im Ganzen n elementare Wurzeln s, welche für besondere Werthe des Argumentes z *theilweise*, respective *gruppenweise* coincidiren können. Es soll untersucht werden, ob diese n Wurzeln s *stetige* Functionen von z sind.

Wir denken uns die Variable z als einen Punkt auf der *gewöhnlichen einblättrigen z-Kugelfläche*, und bezeichnen demgemäss diesen

(2.) Punkt bald mit z selber, bald mit z', wo $z' = \frac{1}{z}$ sein soll. Wird also $z = x + iy$ und $z' = x' + iy'$ gesetzt, so repräsentiren x, y die Coordinaten des Punktes in der *Horizontalebene*, und x', y' seine

Coordinaten in der *Antipodenebene*. Dementsprechend mögen die genannten Ebenen kurzweg als die Ebenen z und z' bezeichnet werden.

In analoger Weise mag die Variable s als ein Punkt auf der *einblättrigen s-Kugelfläche* angesehen, und dieser Punkt bald mit s,

(3.) bald mit s' bezeichnet werden, wo $s' = \frac{1}{s}$ sein soll. Die *Horizontal-* und *Antipodenebene* der s-Kugelfläche mögen respective als die Ebenen s und s' benannt werden.

Durch Einführung von s' und z' kann die Gleichung (1.) in *drei* neue Gestalten versetzt werden; so dass man im Ganzen *vier* Gestalten derselben erhält; nämlich einerseits die beiden Formen

$$(4\alpha.) \quad \ldots \, F(s, z) = 0, \qquad (4\beta.) \quad \ldots \, z'^m F\left(s, \frac{1}{z'}\right) = 0,$$

(4.) deren linke Seiten *ganze rationale* Functionen von s, z, respective von s, z' sind, und andererseits die beiden Formen:

$$(4\gamma.) \quad . \, s'^n F\left(\frac{1}{s'}, z\right) = 0, \qquad (4\delta.) \quad \ldots \, s'^n z'^m F\left(\frac{1}{s'}, \frac{1}{z'}\right) = 0,$$

deren linke Seiten *ganze rationale* Functionen von s', z respective von s', z' sind.

Die gegebene Gleichung $F = 0$ besitze für das Argument $z = c$ eine ν-fache Wurzel $s = k$, d. i. ν elementare Wurzeln s, die an *ein und derselben* Stelle $s = k$ liegen; so dass also c und k der Gleichung

$$(5.) \qquad F(k, c) = 0$$

entsprechen. Man bezeichne nun mit ε einen *ad libitum* gegebenen Kleinheitsgrad, und denke sich auf der s-Kugelfläche um den Punkt $s = k$ einen Kreis vom Radius ε, andererseits auf der z-Kugelfläche um den Punkt $z = c$ einen Kreis von noch *unbestimmtem* Radius ϱ beschrieben. *Es fragt sich, ob die Anzahl derjenigen elementaren Wurzeln s, welche die Gleichung*

$$(6.) \qquad F(s, z) = 0,$$

für ein beliebiges Argument z, innerhalb des kleinen Kreises (k, ε) besitzt, dadurch constant, $= \nu$ gemacht werden kann, dass man jenes beliebige Argument z in den Kreis (c, ϱ) einschliesst und dabei das ϱ hinreichend klein macht.

Welche Werthe k und c auch haben mögen, stets muss, falls $\frac{1}{k} = k'$ und $\frac{1}{c} = c'$ gesetzt wird, unter den vier Grössenpaaren:

$$(7.) \qquad \begin{array}{ll} (7\alpha.) \ \ldots \, k, c, & (7\beta.) \ \ldots \, k, c', \\ (7\gamma.) \ \ldots \, k', c, & (7\delta.) \ \ldots \, k', c', \end{array}$$

mindestens *eines* vorhanden sein, welches aus zwei *endlichen* Grössen besteht.

Sind, um mit dem Fall (7α.) zu beginnen, die Grössen k, c beide endlich, so beschreibe man in der s-Ebene um den Punkt $s = k$ eine kleine Kreisfläche $\mathfrak{S}$, und in der z-Ebene um den Punkt $z = c$ eine kleine Kreisfläche $\mathfrak{Z}$. Die Function $F(s, z)$ wird, weil sie für die Centra $s = k$ und $z = c$ dieser Kreisflächen verschwindet [vgl. (5.)], für zwei *beliebige* Punkte s und z der beiden kleinen Kreisflächen stets nur wenig von Null abweichen. Repräsentirt insbesondere M eine beliebig gegebene positive Constante, so wird man die beiden Kreisflächen stets so klein machen können, dass für alle Punkte s und z dieser Flächen die Formel stattfindet:

$$\text{mod}\, F(s, z) < M.$$

Alsdann aber ist z. B. der erste Satz pg. 141 direct anwendbar auf die Function $F(s, z)$ und die beiden Flächen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{Z}$. Zufolge dieses Satzes kann nun aber die Anzahl derjenigen elementaren Wurzeln s, welche die Gleichung

$$F(s, z) = 0,$$

für ein beliebiges Argument z, innerhalb eines auf $\mathfrak{S}$ um den Punkt $s = k$ mit dem Radius ε beschriebenen Kreises besitzt, *dadurch* constant, $= \nu$ gemacht werden, dass man jenes beliebige Argument z auf einen in der Fläche $\mathfrak{Z}$ um $z = c$ beschriebenen hinreichend kleinen Kreis beschränkt. Dabei bezeichnet ε einen *ad libitum* gewählten Kleinheitsgrad.

Analoges gilt offenbar auch dann, wenn die beiden Flächen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{Z}$ nicht als Theile der beiden Horizontalebenen s und z, sondern als Theile der beiden *Kugelflächen* aufgefasst werden. Demgemäss ist die Frage (6.) *affirmativ* zu beantworten, allerdings vorläufig nur erst für den Fall (7α.), dass k und c endlich sind.

Zu genau demselben Resultat gelangt man aber auch in den Fällen

$$(7\beta.), \quad (7\gamma.), \quad (7\delta.),$$

wobei alsdann die Gleichung $F = 0$ respective in den Formen

$$(4\beta.), \quad (4\gamma.), \quad (4\delta.)$$

anzuwenden ist, und statt der Hülfsebenen s und z respective die Hülfsebenen

$$s \text{ und } z', \quad s' \text{ und } z, \quad s' \text{ und } z'.$$

zu benutzen sind.

Die Frage (6.) ist also in *allen* Fällen affirmativ zu beantworten. Wir gelangen daher zu folgendem Satz:

Betrachtet man die n elementaren Wurzeln s, welche die Gleichung

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0 \tag{8.}$$

für ein beliebiges Argument z liefert, als Punkte auf der (einblättrigen) *s-Kugelfläche, so werden die Lagen dieser n Punkte s* ***stetige*** *Functionen derjenigen Lage sein, welche der Punkt z auf der einblättrigen z-Kugelfläche besitzt.*

Mit andern Worten: Die n elementaren Wurzeln $s_1, s_2, \ldots s_n$ sind, als Functionen von z betrachtet, auf der z-Kugelfläche allenthalben stetig, mit Ausnahme derjenigen singulären Punkte Z, in denen eine oder mehrere jener Wurzeln *unendlich* werden. In jedem solchen singulären Punkt Z sind alsdann allerdings die daselbst endlich bleibenden Wurzeln *stetig*, andererseits aber die daselbst unendlich werdenden Wurzeln *unstetig* und zwar *polarunstetig*. Demgemäss kann man den Satz (8.) auch so aussprechen:

Bezeichnet man die aus der Gleichung:

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0 \tag{9.}$$

für ein beliebiges z sich ergebenden n elementaren Wurzeln s mit

$$s_1 = \varphi_1(z), \quad s_2 = \varphi_2(z), \quad \ldots \quad s_n = \varphi_n(z),$$

so werden diese n Functionen auf der einblättrigen z-Kugelfläche bis auf einzelne Pole stetig sein.

(10.) Aus diesem Satze (9.) ergiebt sich nun nachträglich die Correctheit der im vierten Capitel angestellten Betrachtungen, und namentlich auch die Correctheit des daselbst in (2.) pg. 94 angegebenen Satzes.

Siebentes Capitel.

Geometrische Betrachtungen.

Es dürfte sehr schwer, oder vielmehr unmöglich sein, für *die Flächen im Allgemeinen* zuverlässige Sätze aufzustellen, so lange der Begriff der Fläche nicht näher determinirt ist. Auch dürften in dieser Beziehung blos *negative* Festsetzungen, wie z. B. die Riemann'sche Festsetzung, dass die Fläche keine Spaltung besitzen solle, wenig ausreichend sein.

Demgemäss habe ich im gegenwärtigen Capitel meine Betrachtungen auf solche Flächen eingeschränkt, die durch bestimmte *positive* Bedingungen determinirt sind. Man findet diese Determinationen näher angegeben im vierten Paragraph dieses Capitels.

§ 1.

Definition der Elementarfläche und der einfach zusammenhängenden Fläche.

Als Flächen einfachster Art betrachten wir die *ebenen* Flächen mit nur *einer* Randcurve, wie z. B. die Kreisfläche, Ellipsenfläche, Quadratfläche etc. Diese Flächen einfachster Art nennen wir *Elementarflächen.* Gleichzeitig aber führen wir noch einen etwas allgemeineren Begriff ein, indem wir jedwede Fläche, die durch *stetige Umformung* in eine Elementarfläche verwandelbar ist, eine *einfach zusammenhängende Fläche* nennen. Genauer ausgedrückt:

(1.) Definition. — *Jede ebene einblättrige Fläche, die nur eine Randcurve besitzt, soll eine Elementarfläche oder ein elementares Flächenstück heissen.*

(2.) Definition. — *Jede Fläche, die entweder geradezu eine Elementarfläche ist, oder aber durch stetige Umformung (also blos durch Dehnungen und Biegungen, ohne Zerreissungen oder Zusammenheftungen) in eine Elementarfläche verwandelt werden kann, soll eine einfach zusammenhängende Fläche genannt werden.*

Demgemäss ist z. B. die *Kugelcalotte* eine *einfach zusammenhängende* Fläche. Gleiches gilt aber z. B. auch von der *Windungs-*(2a.) *fläche.* Denn jede Windungsfläche kann durch stetige Umformung in eine Elementarfläche verwandelt werden; wie solches früher ausführlich dargelegt wurde [vgl. z. B. (2.) pg. 70].

Erste Bemerkung. — Jede gegebene Fläche kann im Allgemeinen (α.) durch irgend welche *Schnitte* in eine *einfach zusammenhängende Fläche* verwandelt werden. Als Beispiele mögen dienen die *Cylinderfläche* und die *ringförmige Rotationsfläche.*

Erstes Beispiel. — Wird eine Kreislinie sich selber parallel, und zwar (β.) senkrecht zu ihrer Ebene, um eine gegebene Strecke A fortbewegt, so entsteht durch diese Bewegung eine mit zwei kreisförmigen Randcurven versehene *Cylinderfläche* von der Länge A.

Durchschneidet man aber diese Cylinderfläche *längs irgend einer Kante*, so erhält man eine *einfach zusammenhängende Fläche.* In der That wird nämlich die durch einen solchen Schnitt entstandene Fläche der in (2.) gegebenen Definition entsprechen, nämlich durch stetige Umformung in die Gestalt eines Rechtecks d. i. in die Gestalt einer Elementarfläche versetzbar sein.

Zweites Beispiel. — Wird eine Kreislinie um eine in ihrer Ebene (γ.) liegende, die Kreislinie aber nicht schneidende Axe in Rotation versetzt, so entsteht eine *ringförmige Rotationsfläche.*

Diese ringförmige Rotationsfläche kann aber offenbar *durch zwei Schnitte*, von denen der eine längs eines Parallelkreises, der andere längs eines Meridiankreises fortgeht, in eine *einfach zusammenhängende Fläche* verwandelt werden. In der That wird nämlich die durch zwei solche Schnitte entstehende Fläche der in (2.) gegebenen Definition entsprechen.

Zweite Bemerkung. — Angesichts dieser Beispiele entsteht die Vermuthung, dass es möglich sein werde, alle überhaupt denkbaren Flächen nach der *Anzahl derjenigen Schnitte* zu classificiren, die zu ihrer Verwandlung in einfach zusammenhängende Flächen erforderlich sind. Jedenfalls wird man bei einem derartigen Versuch den Begriff des *Schnittes* zuvörderst schärfer zu determiniren haben. Und dies soll im folgenden Paragraph geschehen durch Einführung der sogenannten *Querschnitte* und *Rückkehrschnitte.*

Dritte Bemerkung. — Die beistehende Figur zeigt eine Linie, welche in ihrem Lauf von links nach rechts eine sogenannte (δ.) *Gabelung* oder *Spaltung* darbietet. Wird nun diese Linie in irgend welcher Richtung, etwa senkrecht zur Ebene des Papiers, sich selber parallel fortbewegt, so entsteht durch diese Bewegung eine Fläche von analoger Beschaffenheit, nämlich eine Fläche, die ebenfalls eine *Spaltung* darbietet. — Genau das-(ε.)selbe würde zu bemerken sein, wenn man zur erzeugenden Linie diejenige nehmen wollte, welche in Fig. II angegeben ist.

Fig. I.

Fig. II.

Wollte man die der Fig. I entsprechende Fläche durch irgend welche Schnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche zu verwandeln suchen, so würde man sich *vergeblich* bemühen. Diese Fläche documentirt also in

deutlicher Weise, dass der Satz $(\alpha.)$, wenn er auch im Allgemeinen gilt, *doch gewissen Ausnahmen unterworfen ist.*

Uebrigens erscheint es zweckmässig, derartige singuläre Flächen, wie die in Fig. I und II angedeuteten, von unserer Betrachtung ganz auszuschliessen; wie solches in einem der folgenden Paragraphen näher angegeben werden soll.

§ 2.

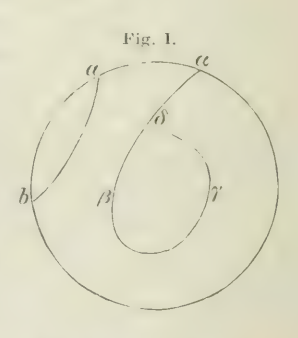
Definition des Querschnitts und Rückkehrschnitts.

Definition des Querschnitts. — *Ein Schnitt, welcher in irgend einem Randpunkte der Fläche beginnt, von hier aus in ununterbrochenem Zuge bis zu irgend einem andern Randpunkt fortläuft, dazwischen aber den Rand der Fläche weder berührt, noch überschreitet, soll ein* Querschnitt *genannt werden.* (3.)

Nach Ausführung eines Querschnittes sind die beiden Ufer desselben als neue Randgebiete der Fläche anzusehen. Ja es sind die auf diese Weise entstehenden neuen Randgebiete nicht erst *nach* Ausführung des Schnittes, sondern auch schon *während* der weiteren Fortführung desselben als solche zu betrachten. Daraus folgt unter Anderm, dass ein Querschnitt in einem Punkt seines früheren Laufes endigen kann; und ferner, dass ein Querschnitt bei seiner weitern Fortführung sich selber niemals durchkreuzen darf.

So wird z. B., wenn wir eine Kreisfläche betrachten, der Schnitt ab ein *Querschnitt* sein; ebenso aber auch der Schnitt $\alpha\beta\gamma\delta$. Jeder nimmt in einem Randpunkte seinen Anfang. Während aber der eine sein Ende in einem zweiten Randpunkt der Fläche erreicht, endigt der andere in einem Punkte seines früheren Laufes. Ein solcher Querschnitt, wie $\alpha\beta\gamma\delta$, mag in Zukunft [weil er ungefähr die Form eines griechischen σ besitzt] kurzweg ein *sigmaförmiger* Querschnitt genannt werden.

Fig. 1.

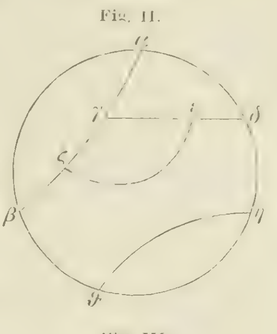


Ist *ein* Querschnitt bereits ausgeführt, und soll nun ein *zweiter* Querschnitt gezogen werden, so ist wiederum zu beachten, dass die Ufer des schon vorhandenen Schnittes bei Ausführung des zweiten als *Randgebiete* der Fläche anzusehen sind. Der zweite Querschnitt wird also nach Belieben in einem ursprünglichen Randpunkt der Fläche, ebenso gut aber auch in einem Uferpunkt des schon vorhandenen Querschnittes seinen Anfang nehmen können. Aehnliches

gilt für den Endpunkt des Querschnittes. Und Aehnliches gilt natürlich auch für einen *dritten*, *vierten* u. s. w. Querschnitt.

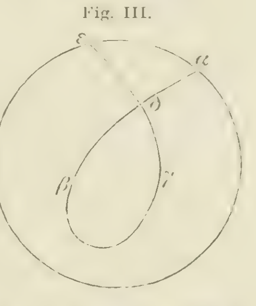
So wird z. B., in der nebenstehenden Kreisfläche, $\alpha\beta$ ein Querschnitt sein; sodann $\gamma\delta$ ein zweiter, $\varepsilon\zeta$ ein dritter, $\eta\vartheta$ ein vierter u. s. w.

Fig. II.



Ferner wird in Figur III der Schnitt $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ nicht als *ein* Querschnitt, sondern als ein Complex von *zwei* Querschnitten anzusehen sein. Der eine von diesen beiden läuft — ebenso wie der in Figur I betrachtete — von α über β, γ nach δ, und ist also als ein *sigmaförmiger* zu bezeichnen; während der andere von δ nach ε geht.

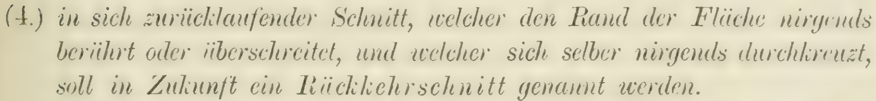
Fig. III.



Des bequemeren Ausdrucks willen wird es zweckmässig sein, ausser den Querschnitten auch noch eine gewisse andere Gattung von Schnitten, nämlich die der Rückkehrschnitte einzuführen. Diese sollen folgendermassen definirt sein:



Definition des Rückkehrschnittes. — *Ein*



(4.) *in sich zurücklaufender Schnitt, welcher den Rand der Fläche nirgends berührt oder überschreitet, und welcher sich selber nirgends durchkreuzt, soll in Zukunft ein Rückkehrschnitt genannt werden.*

Nach Ausführung eines Rückkehrschnittes sollen die beiden Ufer desselben wiederum als Randgebiete der Fläche angesehen werden. Wir können uns demnach den Schnitt $\alpha\beta\gamma\delta$ in Fig. I, wenn wir wollen, auch so entstanden denken, dass in der gegebenen Kreisfläche zuerst ein Rückkehrschnitt $\beta\gamma\delta\beta$, und sodann noch ein Querschnitt $\delta\alpha$ ausgeführt ist. Desgleichen werden wir z. B. in Fig. III den Schnitt $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ als zusammengesetzt ansehen können aus einem zuerst ausgeführten Rückkehrschnitt $\beta\gamma\delta\beta$, und aus zwei sodann ausgeführten Querschnitten $\delta\alpha$ und $\delta\varepsilon$.

Die (von Riemann eingeführten) Querschnitte repräsentiren eine für die Classificirung der Flächen wichtige Operation. Um diese Operation auch bei solchen Flächen, die *geschlossen*, mithin *ohne* Rand sind, ausführen zu können, erscheint es angemessen, jeder solchen geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ zuvörderst, durch Herausnahme eines einzelnen Punktes, einen Rand zu verleihen. Dabei mag alsdann die durch dieses Verfahren entstehende *neue* Fläche durch einen über

das $\mathfrak{F}$ gesetzten Punkt angedeutet, nämlich mit $\dot{\mathfrak{F}}$ bezeichnet, und kurzweg die *punktirte Fläche* genannt werden. Während also $\mathfrak{F}$ *gar* (5.) *keinen* Rand hat, wird andererseits $\dot{\mathfrak{F}}$ *eine einzige* unendlich kleine Randcurve besitzen, welche dargestellt ist durch die Umgrenzungslinie der durch die Herausnahme jenes Punktes hervorgebrachten unendlich kleinen Oeffnung.

Bemerkung. Ist z. B. $\mathfrak{F}$ eine *Kugelfläche*, so wird die zugehörige punktirte Fläche $\dot{\mathfrak{F}}$ im Wesentlichen eine *Kugelcalotte*, mithin *einfach zusammenhängend* sein [vergl. die vorhin bei (2.) genannten Beispiele].

§ 3.

Die Eigenschaften einer einfach zusammenhängenden Fläche.

Von der sogenannten *Elementarfläche* [vgl. die Definition (1.)] haben wir eine deutliche geometrische Anschauung. Aus dieser geometrischen Anschauung ergiebt sich z. B. sofort, dass die Elementarfläche durch jeden *Querschnitt* in zwei von einander getrennte Stücke zerfällt, ebenso auch durch jeden *Rückkehrschnitt*. Desgleichen übersehen wir sofort, dass von diesen beiden Stücken, je nachdem der Schnitt ein *Quer-* oder *Rückkehr*-Schnitt ist, entweder *jedes* oder wenigstens *eines* wiederum eine Elementarfläche sein wird.

Diese Eigenschaften der Elementarfläche übertragen sich leicht auf die *einfach zusammenhängenden Flächen*, falls man nur Rücksicht nimmt auf die für die letzteren gegebene Definition (2.).

Es sei z. B. $\mathfrak{F}$ eine beliebig gegebene einfach zusammenhängende Fläche, und gleichzeitig sei $\mathfrak{F}'$ diejenige Elementarfläche, in welche sich $\mathfrak{F}$ durch stetige Umformung verwandelt. Ist nun q irgend ein Querschnitt der Fläche $\mathfrak{F}$, und q' der correspondirende Schnitt auf $\mathfrak{F}'$, so wird offenbar q' ebenfalls ein Querschnitt sein. Die Fläche $\mathfrak{F}'$ ist aber eine Elementarfläche und wird also durch jeden Querschnitt in zwei getrennte Stücke zerlegt. Demnach wird $\mathfrak{F}'$ durch q', und *folglich auch $\mathfrak{F}$ durch q in zwei getrennte Stücke zerfallen.*

Wir bezeichnen diese beiden Stücke bei der ursprünglichen Fläche $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, und bei der Elementarfläche $\mathfrak{F}'$ mit $\mathfrak{f}'$, $\mathfrak{g}'$. Offenbar können alsdann $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ als zwei Flächenstücke angesehen werden, welche sich durch stetige Umformung in $\mathfrak{f}'$ und $\mathfrak{g}'$ verwandeln. Von den beiden Stücken $\mathfrak{f}'$ und $\mathfrak{g}'$ ist aber jedes eine Elementarfläche. Daraus folgt, dass *jedes der beiden Stücke* $\mathfrak{f}$ *und* $\mathfrak{g}$ *ein einfach zusammenhängendes ist.* Somit gelangen wir zu folgendem Resultat:

(6.) Erster Satz. — *Eine einfach zusammenhängende Fläche zerfällt durch einen Querschnitt immer in zwei getrennte Stücke: von diesen*

beiden Stücken ist jedes ein einfach zusammenhängendes. Durch ν aufeinander folgende Querschnitte wird demnach eine einfach zusammenhängende Fläche in ($\nu + 1$) *getrennte Stücke zerfallen, von welchen wiederum jedes ein einfach zusammenhängendes ist.*

Wiederum sei $\mathfrak{F}$ eine beliebig gegebene einfach zusammenhängende Fläche, und $\mathfrak{F}'$ die daraus durch stetige Umformung entstehende Elementarfläche. Ist nun s irgend ein Rückkehrschnitt der Fläche $\mathfrak{F}$, so wird offenbar der auf $\mathfrak{F}'$ gezogene correspondirende Schnitt s' ebenfalls ein Rückkehrschnitt sein. Demnach wird $\mathfrak{F}$ durch s, ebenso wie $\mathfrak{F}'$ durch s', in zwei von einander getrennte Stücke zerfallen. Von den beiden Stücken, in welche $\mathfrak{F}'$ durch s' zerlegt wird, ist aber eins eine Elementarfläche. Demnach muss von den beiden Stücken, in welche $\mathfrak{F}$ durch s getheilt wird, eins ein einfach zusammenhängendes sein. Also der Satz:

(7.) **Zweiter Satz.** — *Eine einfach zusammenhängende Fläche zerfällt durch einen Rückkehrschnitt immer in zwei getrennte Stücke; von diesen beiden Stücken ist jederzeit eins ein einfach zusammenhängendes.*

Eine Elementarfläche besitzt ihrer Definition zufolge immer nur *eine* Randcurve. Gleiches muss demnach auch von jeder Fläche gelten, die aus einer Elementarfläche durch stetige Umformung entstanden ist. Somit erhalten wir folgenden dritten Satz:

(8.) **Dritter Satz.** — *Eine einfach zusammenhängende Fläche besitzt immer nur eine Randcurve.*

§ 4.

Nähere Determination der zu betrachtenden Flächen.

Bei unsern weiteren Betrachtungen wollen wir uns durchweg auf solche Flächen beschränken, die folgenden beiden Anforderungen entsprechen:

(9.) **Erste Anforderung.** — *Die Fläche soll von solcher Beschaffenheit sein, dass das Bereich eines jeden Punktes der Fläche eine einfach zusammenhängende Fläche repräsentirt.* Durch diese Anforderung werden offenbar alle Flächen, die eine Spaltung zeigen [wie z. B. die Fläche (δ.), (ε.) pg. 147] von der Betrachtung excludirt.

(10.) **Zweite Anforderung.** — *Die Fläche soll von solcher Beschaffenheit sein, dass sie durch irgend welche Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden kann.* Durch diese zweite Anforderung, für sich allein betrachtet, würden offenbar die mit einer Spaltung behafteten Flächen noch nicht *sämmtlich* excludirt sein. [So z. B. würde durch sie von den beiden Flächen

(δ.) und (ε.) pg. 147 nur die erste, nicht aber die zweite excludirt werden.]

Die *erste* und *zweite* Anforderung decken einander theilweise, jedoch nicht so, dass durch eine derselben die andere überflüssig gemacht würde. So z. B. werden durch die *erste* Bedingung alle mit einer Spaltung behafteten Flächen excludirt, durch die *zweite* aber nicht. Andererseits aber werden durch die *zweite* Anforderung alle geschlossenen Flächen excludirt [weil in einer geschlossenen Fläche überhaupt keine Querschnitte möglich sind], durch die *erste* aber nicht.

Bemerkung. — Es ist wohl wahrscheinlich, dass jedwede *nichtgeschlossene* Fläche, falls sie der *ersten* Anforderung entspricht, nothwendiger Weise auch der *zweiten* genügen wird. Wäre solches *wirklich beweisbar*, so würde man gut thun, die zweite Anforderung ganz fallen zu lassen. Denn die *geschlossenen* Flächen würden trotzdem immerhin noch in *der* Weise in die Betrachtung hineingezogen werden können, dass man statt jeder solchen *geschlossenen* Fläche $\mathfrak{F}$ die zugehörige *punktirte* Fläche $\dot{\mathfrak{F}}$ [vgl. (5.)] ins Auge fasst.

§ 5.

Untersuchung eines beliebig gegebenen Flächensystems. Definition seiner Grundzahl.

Es sei $\mathfrak{S}$ ein aus beliebig vielen Flächen bestehendes System. Die Flächen mögen beliebig im Raume vertheilt, und jede derselben von beliebiger Gestalt sein. Nur mag jede derselben den Anforderungen (9.), (10.) entsprechen.

Wir wollen nun annehmen, dieses System $\mathfrak{S}$ könne durch gewisse ν' Querschnitte — sie mögen in ihrer Gesammtheit mit q' bezeichnet werden — in ein System $\mathfrak{S}'$ verwandelt werden, welches aus α' Flächenstücken besteht; und das System $\mathfrak{S}$ könne andererseits durch gewisse ν'' Querschnitte — sie mögen q'' genannt werden — in ein System $\mathfrak{S}''$ verwandelt werden, welches aus α'' Flächenstücken besteht. Ferner wollen wir annehmen, unter den Flächenstücken, aus welchen die Systeme $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}''$ bestehen, wäre jedes einzelne ein *einfach zusammenhängendes*. Es fragt sich, ob unter dieser Voraussetzung zwischen den Zahlen ν', α' und ν'', α'' irgend welche Beziehung stattfindet, oder ob dieselben von einander völlig unabhängig sind.

Um näher hierauf einzugehen, wird es nöthig sein, beide Querschnittsysteme, das der q' und das der q'', *gleichzeitig* zu ziehen. Der Einfachheit willen nehmen wir an, dass die beiden Schnittsysteme

bei einer solchen Superposition nur in *einzelnen Punkten* (nicht in Linien) einander decken. Die Anzahl dieser einzelnen Deckungspunkte mag δ heissen. Ferner nehmen wir, der Einfachheit willen, zuvörderst an, dass unter diesen δ Deckungspunkten oder Schnittpunkten keiner vorhanden ist, der gerade mit einem *End*punkte der Schnitte q' oder q'' zusammenfällt. Von den beiden Schnitten q' und q'', welche einander in einem jener δ Punkte schneiden, wird alsdann jeder durch den andern in *zwei Stücke* zerlegt werden.

Wir denken uns zuerst die Querschnitte q' gezogen, und hierdurch $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}'$ verwandelt. Ziehen wir jetzt einen der Schnitte q'', so wird ein solcher Schnitt nur dann einen *Querschnitt des Flächensystems* $\mathfrak{S}'$ vorstellen, wenn er die schon vorhandenen Schnitte q' nirgends berührt oder überschreitet, andernfalls aber einen *Complex von mehreren Querschnitten* vorstellen. Es fragt sich nun zunächst, wie gross die Anzahl derjenigen *Querschnitte* Q'' ist, welche in dem Flächensystem $\mathfrak{S}'$ entstehen, sobald wir darin sämmtliche Schnitte q'' ausführen. Offenbar werden sämmtliche Endpunkte der Q'' zum einen Theil durch die Endpunkte der q'' selber, zum andern Theil durch diejenigen Punkte dargestellt sein, in welchen die q'' von den q' geschnitten werden. Die Anzahl des ersten Theiles ist gleich der Anzahl der Endpunkte der q'', d. i. gleich $2\nu''$; die Anzahl des zweiten Theiles muss, da jeder der genannten Schnittpunkte zwei Endpunkte der Q'' repräsentirt, doppelt so gross als die Anzahl jener Schnittpunkte, also gleich 2δ sein. Im Ganzen wird daher die Anzahl der Endpunkte der Q'' gleich $(2\nu'' + 2\delta)$, folglich die Anzahl der Q'' selber gleich

$$\nu'' + \delta$$

sein.

Umgekehrt wird andererseits, wenn wir uns in dem Systeme $\mathfrak{S}$ zuerst die q'' gezogen, und hierdurch $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}''$ verwandelt denken, jeder nunmehr folgende Schnitt q' im Allgemeinen *mehrere* Querschnitte Q' des Systems $\mathfrak{S}''$ repräsentiren. Die Anzahl dieser Q' wird, wie man sofort übersieht, gleich

$$\nu' + \delta$$

sein.

Es sei A die Anzahl von Flächenstücken, in welche $\mathfrak{S}$ zerfällt, wenn gleichzeitig sowohl sämmtliche Schnitte q', als auch sämmtliche Schnitte q'' ausgeführt werden.

Offenbar kann diese Zahl A als die Anzahl derjenigen Stücke angesehen werden, in welche sich das Flächensystem $\mathfrak{S}'$ durch Aus-

führung der Querschnitte Q'' verwandelt. Nun besteht das System $\mathfrak{S}'$ der Voraussetzung zufolge aus α' Stücken, von welchen jedes *einfach zusammenhängend* ist. Es wird daher dieses System $\mathfrak{S}'$ [zufolge des Satzes (6.)] durch Ausführung der $(\nu'' + \delta)$ Querschnitte Q'' in $(\alpha' + \nu'' + \delta)$ Stücke zerfällt werden. So ergiebt sich:

$$A = \alpha' + \nu'' + \delta. \tag{11.}$$

Andererseits kann aber A auch als die Anzahl derjenigen Stücke angesehen werden, in welche das System $\mathfrak{S}''$ durch Ausführung der $(\nu' + \delta)$ Querschnitte Q' zerlegt wird; alsdann ergiebt sich:

$$A = \alpha'' + \nu' + \delta. \tag{12.}$$

Aus diesen beiden Formeln (11.) und (12.) folgt sofort:

$$\alpha' + \nu'' = \alpha'' + \nu',$$

d. i.

$$\nu' - \alpha' = \nu'' - \alpha''. \tag{13.}$$

Bei Ableitung dieser Formel wurde die beschränkende Voraussetzung gemacht, dass die beiden Schnittsysteme bei ihrer Superposition nur in *einzelnen Punkten* einander decken, und dass unter diesen δ einzelnen Deckungspunkten keiner vorhanden ist, welcher gerade mit einem *End*punkt der Schnitte zusammenfällt. Sollte diese Voraussetzung nicht erfüllt sein, so wird man es doch durch eine *unendlich kleine Verschiebung* des einen Schnittsystems, z. B. des Systems q', leicht dahin bringen können, dass sie in Erfüllung geht. Sobald diese unendlich kleine Verschiebung ausgeführt ist, wird dann die Formel (13.):

$$\nu' - \alpha' = \nu'' - \alpha''$$

wiederum gelten. Die Zahlen ν' und α' sind aber offenbar *nach* der Verschiebung des Systems q' eben dieselben, wie *vor* jener Verschiebung. Daraus folgt, dass die Formel auch schon *vor* der Verschiebung gültig ist, dass sie also *völlig allgemeine* Gültigkeit besitzt. Wir erhalten daher folgenden wichtigen Satz:

(14.) **Fundamentaltheorem.** — *Denkt man sich ein beliebiges Flächensystem $\mathfrak{S}$ zu verschiedenen Zeiten durch verschieden gewählte Querschnittsysteme zerlegt, und dadurch jedesmal in ein System von lauter einfach zusammenhängenden Flächenstücken*) verwandelt, so wird die Differenz $(\nu - \alpha)$, um welche die jedesmalige Anzahl ν der Querschnitte*

*) Unter einem *System einfach zusammenhängender Flächenstücke* ist selbstverständlich hier (und ebenso auch in Zukunft) stets ein System von Flächenstücken zu verstehen, deren jedes *für sich allein betrachtet* einfach zusammenhängend ist.

grösser als die jedesmalige Anzahl α der resultirenden Flächenstücke ist, in all' diesen Fällen ein und denselben Werth haben. Jene Differenz $(\nu - \alpha)$ ist demnach eine dem gegebenen Flächensystem $\mathfrak{S}$ eigenthümliche unveränderliche Zahl. Gleiches wird daher z. B. auch gelten von der Zahl $(\nu - \alpha + 2)$. Diese letztere soll in Zukunft die Grundzahl des Flächensystems genannt werden.

An diesen fundamentalen Satz schliessen sich unmittelbar einige weitere Bemerkungen an. Ein beliebig gegebenes Flächensystem $\mathfrak{S}$ verwandle sich, wenn man darin *irgend einen bestimmten Querschnitt* q ausführt, in ein Flächensystem $\mathfrak{S}'$. Um das ursprüngliche System $\mathfrak{S}$ aber in ein System von lauter *einfach* zusammenhängenden Flächenstücken zu verwandeln, mögen nach Ausführung jenes Querschnittes q noch ν weitere Querschnitte $q_1, q_2, \ldots q_\nu$ erforderlich sein; und gleichzeitig mag α die Anzahl der einfach zusammenhängenden Flächenstücke vorstellen, aus welchen das letztgenannte System besteht.

Alsdann wird also das System $\mathfrak{S}$ im Ganzen durch $(\nu + 1)$ Querschnitte in ein System von α Flächenstücken verwandelt, unter denen jedes einfach zusammenhängend ist. Und andererseits sehen wir, dass das System $\mathfrak{S}'$ bereits durch ν Querschnitte in ein System von α einfach zusammenhängenden Flächenstücken verwandelt wird. Zufolge des Satzes (14.) ist daher

$$(\nu + 1) - \alpha + 2$$

die Grundzahl von $\mathfrak{S}$, und

$$\nu - \alpha + 2$$

die Grundzahl von $\mathfrak{S}'$; die Grundzahl von $\mathfrak{S}'$ also um 1 kleiner als die von $\mathfrak{S}$. Somit ergiebt sich der Satz:

(15.) **Erster Satz.** — *Die Grundzahl eines Flächensystems wird durch jeden Querschnitt um* 1 *erniedrigt; durch ein System von ν Querschnitten also um ν erniedrigt.*

Aehnliche Betrachtungen lassen sich anstellen bei den Rückkehrschnitten. Ein Flächensystem $\mathfrak{S}$ verwandle sich durch *irgend welchen Rückkehrschnitt* s in $\mathfrak{S}'$. Ferner sei q ein in dem Systeme $\mathfrak{S}'$ gezogener Querschnitt, und zwar ein Querschnitt, welcher in einem Uferpunkte des Rückkehrschnittes s beginnt, und von hier aus nach irgend welchem Randpunkte desjenigen Flächenstückes hinläuft, in welchem s construirt ist. Endlich mag das durch Ausführung von s und q erhaltene Flächensystem mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet werden.

Das Flächensystem $\mathfrak{T}$ entsteht alsdann aus $\mathfrak{S}'$ durch Ausfüh-

rung des *einen* Querschnittes q. Zufolge des vorhergehenden Satzes ist daher *die Grundzahl von* $\mathfrak{T}$ *um* 1 *kleiner als die von* $\mathfrak{S}'$.

Andererseits ist zu bemerken, dass die Schnitte q und s zusammengenommen als ein einziger sigmaförmiger Querschnitt angesehen werden können [vgl. pg. 148]; und dass daher $\mathfrak{T}$ als ein Flächensystem angesehen werden kann, welches aus $\mathfrak{S}$ nur durch Ausführung *eines einzigen* Querschnittes entsteht. Zufolge des vorhergehenden Satzes wird also *die Grundzahl von* $\mathfrak{T}$ *um* 1 *kleiner als die von* $\mathfrak{S}$ *sein.*

Fasst man beide Ergebnisse zusammen, so sieht man sofort, dass die Grundzahlen von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ einander gleich sind, und gelangt also zu folgendem Satz:

(16.) **Zweiter Satz.** — *Die Grundzahl eines Flächensystems erleidet durch Ausführung eines Rückkehrschnittes keinerlei Aenderung, und erleidet also auch bei Ausführung von beliebig vielen Rückkehrschnitten keine Aenderung.*

Schliesslich noch folgende sehr einfache Bemerkung: Kann ein gegebenes Flächensystem durch ν Querschnitte in α einfach zusammenhängende Flächenstücke verwandelt werden, so ist nach unserer Definition [vgl. den Schluss des Satzes (14.)]

$$\nu - \alpha + 2$$

die Grundzahl des Systems. Besteht daher das System, bereits *von Hause aus*, aus α einfach zusammenhängenden Flächenstücken, so wird seine Grundzahl gleich

$$0 - \alpha + 2$$

sein. Also der Satz:

(17.) **Dritter Satz.** — *Die Grundzahl eines Systems, welches aus α einfach zusammenhängenden Flächenstücken besteht, ist stets $= (2 - \alpha)$.*

Setzt man beispielsweise $\alpha = 1$, denkt man sich also ein System, welches nur aus einer *einzigen* Fläche besteht, so gelangt man zu folgendem specielleren Resultat:

(17a.) **Vierter Satz.** — *Die Grundzahl einer beliebig gegebenen einfach zusammenhängenden Fläche ist stets* $= 1$.

§ 6.

Weitere Betrachtungen über ein beliebig gegebenes Flächensystem.

Es sei $\mathfrak{S}$ ein beliebig gegebenes Flächen*system* (oder auch eine beliebig gegebene *einzelne* Fläche), ferner sei N die Grundzahl von $\mathfrak{S}$.

Führen wir ν' beliebige Querschnitte aus, so entsteht ein Flächensystem, dessen Grundzahl gleich $N - \nu'$ ist. Lassen wir sodann zu jenen Querschnitten ϱ' Rückkehrschnitte hinzutreten, so entsteht ein Flächensystem, welches ebenso wie das vorhergehende die Grundzahl $N - \nu'$ besitzt. Lassen wir hierauf ν'' Querschnittte und ϱ'' Rückkehrschnitte zu den schon vorhandenen Schnitten hinzutreten, so entsteht ein Flächensystem, dessen Grundzahl gleich $N - \nu' - \nu''$ ist, u. s. w. All' dies ist eine unmittelbare Folge der Sätze (15.) und (16.).

Führen wir also in dem gegebenen Systeme $\mathfrak{S}$ in irgend welcher Reihenfolge im Ganzen ν Querschnitte und ϱ Rückkehrschnitte aus, so wird

$$N - \nu$$

die Grundzahl des resultirenden Flächensystems sein. Wir wollen nun annehmen, dieses letztere System bestände aus α Flächenstücken, von welchen jedes einfach zusammenhängend ist. Zufolge des Satzes (17.) wird sich in diesem Falle die Grundzahl dieses Systems noch in anderer Art, nämlich durch

$$2 - \alpha$$

ausdrücken lassen. Demnach wird bei der gemachten Annahme

$$N - \nu = 2 - \alpha,$$

d. i.

$$N = \nu - \alpha + 2$$

sein. Somit gelangen wir zu folgendem Ausspruch:

Fünfter Satz. — *Kann ein Flächensystem $\mathfrak{S}$ oder auch eine einzelne Fläche $\mathfrak{S}$ durch irgend welche ν Querschnitte und durch irgend welche*

(18.) *ϱ Rückkehrschnitte in α Flächenstücke verwandelt werden, von denen ein jedes einfach zusammenhängend ist, so wird jederzeit*

$$\nu - \alpha + 2$$

die Grundzahl von $\mathfrak{S}$ sein.

Dieser Satz ist von einer gewissen praktischen Bedeutung. Denn mittelst desselben kann man z. B. die Grundzahl einer *bestimmt gegebenen Fläche* selbst dann, wenn dieselbe sehr complicirter Gestalt ist, ziemlich leicht ermitteln.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Beschaffenheit einer *völlig unbekannten* Fläche $\mathfrak{F}$ näher zu untersuchen, falls die *Grundzahl* derselben gegeben, *und zwar* $= 1$ *ist.*

Da die Fläche $\mathfrak{F}$ selbstverständlich den beiden Anforderungen (9.), (10.) entsprechen soll, so ist sie [zufolge (10.)] durch irgend welche, *ihrer Zahl und Lage nach unbekannte* Querschnitte $q_1, q_2, \ldots q_r$

in eine *einfach zusammenhängende Fläche* verwandelbar. Zufolge des Fundamentaltheorems (14.) gilt alsdann für die Grundzahl N der Fläche $\mathfrak{F}$ die Formel

$$N = \nu - \alpha + 2,$$

oder, weil im gegenwärtigen Fall die Anzahl α der durch die Querschnitte $q_1, q_2, \ldots q_\nu$ erhaltenen einfach zusammenhängenden Flächenstücke $= 1$ ist:

$$N = \nu + 1.$$

Diese Formel aber nimmt, weil die Grundzahl N der Fläche $\mathfrak{F}$ gegeben und zwar $= 1$ ist, die Gestalt an:

$$1 = \nu + 1;$$

woraus folgt:

$$\nu = 0.$$

Jene unbekannte Fläche $\mathfrak{F}$ ist also durch 0 Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelbar. D. h. sie ist schon *von Hause aus* eine einfach zusammenhängende.

Wir sehen somit, *dass jedwede Fläche von der Grundzahl* 1 *eine einfach zusammenhängende ist.* Zufolge (17a.) gilt aber auch der umgekehrte Satz; sodass wir zu folgendem Resultat gelangen:

(19.) **Sechster Satz.** — *Jede Fläche von der Grundzahl* 1 *ist eine einfach zusammenhängende. Und umgekehrt wird jedwede einfach zusammenhängende Fläche die Grundzahl* 1 *besitzen.*

Repräsentirt $\mathfrak{F}$ irgend eine unbekannte Fläche, so wird dieselbe [weil die Anforderungen (9.), (10.) stets als erfüllt betrachtet werden sollen] zufolge (10.) durch irgend welche *ihrer Zahl und Lage nach unbekannte* Querschnitte $q_1, q_2, \ldots q_\nu$ in eine *einfach zusammenhängende Fläche* verwandelt werden können. Alsdann aber hat die Grundzahl N der Fläche $\mathfrak{F}$, zufolge des Fundamentaltheorems (14.), den Werth:

$$N = \nu - \alpha + 2,$$

d. i. den Werth:

$$N = \nu - 1 + 2 = \nu + 1;$$

denn im gegenwärtigen Falle ist die *Anzahl* α der durch die Querschnitte $q_1, q_2, \ldots q_\nu$ resultirenden einfach zusammenhängenden Flächenstücke $= 1$. Wir erhalten also: $N = \nu + 1$, oder, was dasselbe ist:

$$\nu = N - 1,$$

und gelangen daher zu folgendem Resultat:

(20.) **Siebenter Satz.** — *Eine beliebig gegebene* [selbstverständlich aber den Anforderungen (9.), (10.) entsprechende] *Fläche ist* [zufolge (10.)]

stets durch irgend welche Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelbar. Und wenn auch die Lage und Configuration der hierzu erforderlichen Querschnitte in mannigfaltiger Weise variirt werden kann, so wird doch ihre Anzahl stets ein und dieselbe, nämlich stets $= (N - 1)$ *sein, falls N die Grundzahl der gegebenen Fläche vorstellt.*

Hieraus folgt sofort, dass in einer Fläche von der Grundzahl N stets $(N - 1)$ *dieselbe nicht zerstückelnde* Querschnitte ausführbar sind. Denkt man sich aber *irgend welche* $(N - 1)$ die Fläche nicht zerstückelnde Querschnitte ausgeführt, so wird die Fläche dadurch *stets*, wie jene Querschnitte im Uebrigen auch immer beschaffen sein mögen, in eine Fläche von der Grundzahl 1 sich verwandeln; wie solches aus einem früheren Satz (15.) unmittelbar folgt. Beachtet man schliesslich, dass [nach (19.)] eine Fläche von der Grundzahl 1 stets eine *einfach zusammenhängende* Fläche ist, so gelangt man also zu folgendem Resultat:

(21.) **Vollständigere Form des siebenten Satzes.** — *In einer Fläche von der Grundzahl N sind stets* $(N - 1)$ *dieselbe nicht zerstückelnde Querschnitte ausführbar. Denkt man sich aber* $(N - 1)$ *derartige Querschnitte wirklich construirt, so wird dadurch die Fläche stets, wie diese Querschnitte im Uebrigen auch beschaffen sein mögen, in eine einfach zusammenhängende Fläche übergehen.*

Erste Bemerkung. — Jede [den Anforderungen (9.), (10.) entsprechende] Fläche ist durch Ausführung irgend welcher Querschnitte $q_1, q_2, \ldots q_\nu$ in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelbar. Die Anzahl ν dieser Querschnitte wird aber, zufolge des Satzes (20.) stets $= (N - 1)$ sein, falls N die Grundzahl der gegebenen Fläche vorstellt. Somit ergiebt sich: $N = (\nu + 1)$, oder, weil ν (seiner Bedeutung nach) eine der Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$ repräsentirt:

$$N = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

D. h.: *Die Grundzahl einer den Anforderungen* (9.), (10.) *entsprechenden Fläche wird stets durch eine der Zahlen* 1, 2, 3, 4, . . . *dargestellt sein.*

Zweite Bemerkung. — Durch den eigenthümlichen Gang der von uns in diesem Capitel angestellten Betrachtungen sind wir unwillkürlich zu einer Ausdrucksweise geführt worden, die von der *Riemann*'schen etwas abweicht. Doch entsteht in dieser Beziehung völlige Uebereinstimmung, wenn wir jedwede Fläche von der Grundzahl N eine *N-fach zusammenhängende Fläche* nennen; — was übrigens z. B. für den Fall $N = 1$ schon durch den Satz (19.) geboten ist.

Es seien α einzelne Flächen $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots \mathfrak{F}_\alpha$ gegeben respective mit den Grundzahlen $N_1, N_2, \ldots N_\alpha$. Zufolge (20.) respective (21.) ist alsdann z. B. $\mathfrak{F}_\varkappa$ durch $(N_\varkappa - 1)$ Querschnitte in eine ein-

fach zusammenhängende Fläche verwandelbar. Demnach kann das ganze System $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots \mathfrak{F}_\alpha)$ durch

$$(N_1 - 1) + (N_2 - 1) + \ldots + (N_\alpha - 1),$$

d. i. durch

$$(N_1 + N_2 + \ldots + N_\alpha) - \alpha$$

Querschnitte in α Flächen verwandelt werden, deren jede einfach zusammenhängend ist. Hieraus aber folgt [Satz (18.)], dass die Grundzahl jenes Systems $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots \mathfrak{F}_\alpha)$ den Werth hat:

$$(N_1 + N_2 + \ldots + N_\alpha) - 2\alpha + 2;$$

sodass man also zu folgendem Resultat gelangt:

Achter Satz. *Sind α einzelne Flächen gegeben respective mit* (22.) *den Grundzahlen $N_1, N_2, \ldots N_\alpha$, so wird die Grundzahl des aus all' diesen Flächen bestehenden Systems den Werth besitzen:*

$$(N_1 + N_2 + \ldots + N_\alpha) - 2\alpha + 2.$$

Ein Specialfall dieses Satzes ist der frühere Satz (17.)

Wir wollen uns jetzt irgend eine Fläche $\mathfrak{F}$ gegeben denken, auf derselben irgend einen Punkt markiren, und das Bereich $\mathfrak{U}$ dieses Punktes mittelst eines unendlich kleinen Rückkehrschnittes von der Fläche abtrennen. Das nach Absonderung des Bereiches $\mathfrak{U}$ von der Fläche $\mathfrak{F}$ noch übrig bleibende Stück mag $\dot{\mathfrak{F}}$ heissen. Ueberdies mögen die Grundzahlen von $\mathfrak{F}$, $\dot{\mathfrak{F}}$ und $\mathfrak{U}$ respective mit N, $\dot{N}$ und n bezeichnet werden.

Die Grundzahl des *Systems* $(\dot{\mathfrak{F}}, \mathfrak{U})$ lässt sich nun in doppelter Weise angeben. Einerseits ist dieselbe nämlich [nach (22.)]

$$= (\dot{N} + n) - 4 + 2;$$

und andererseits ist sie [zufolge des früheren Satzes (16.)] $= N$. Somit folgt:

$$N = (\dot{N} + n) - 2,$$

oder, weil [zufolge (9.) und (17a.)] die Zahl $n = 1$ ist:

$$\dot{N} = N + 1;$$

sodass man also zu folgendem Satze gelangt:

Neunter Satz. — *Eine Fläche von der Grundzahl N verwandelt* (23.) *sich, durch Herausnahme eines einzelnen Punktes, in eine Fläche von der Grundzahl $(N + 1)$.* Dabei ist unter der Herausnahme eines Punktes die Herausnahme eines beliebig kleinen den Punkt umgebenden Flächenstücks zu verstehen.

Eine einfach zusammenhängende Fläche bleibt, falls sie irgend- (24.) einer stetigen Umformung unterworfen wird, *fortdauernd* einfach zusammenhängend; wie solches aus der Definition der einfach zusammen-

hängenden Fläche [(2.) p. 146] unmittelbar folgt. Mit andern Worten [vgl. (19.)]: Eine Fläche von der Grundzahl 1 wird diese Grundzahl, auch bei irgend welcher stetigen Umformung, fortdauernd beibehalten. Dieser Satz lässt sich leicht erweitern.

Eine Fläche $\mathfrak{F}$ von der Grundzahl N ist nämlich stets [vgl. (20.), (21.)] durch gewisse $(N-1)$ Querschnitte $q_1, q_2 \ldots q_{N-1}$ in eine *einfach zusammenhängende* Fläche $\mathfrak{F}^{(1)}$ verwandelbar. Unterwirft man nun die Fläche $\mathfrak{F}$ irgend einer stetigen Umformung, und lässt man an dieser Umformung auch die genannten Querschnitte, mithin auch die Fläche $\mathfrak{F}^{(1)}$ participiren, so werden

$$\mathfrak{F},\ q_1,\ q_2,\ \ldots\ q_{N-1} \text{ und } \mathfrak{F}^{(1)}$$

irgend welche andere Gestalten

$$\mathfrak{G},\ r_1,\ r_2,\ \ldots\ r_{N-1} \text{ und } \mathfrak{G}^{(1)}$$

annehmen; und zwar wird $\mathfrak{G}^{(1)}$ [zufolge des Satzes (24.)], ebenso wie $\mathfrak{F}^{1)}$, eine *einfach zusammenhängende* Fläche sein. Da nun aber $\mathfrak{G}$ mittelst der $(N-1)$ Querschnitte $r_1, r_2, \ldots r_{N-1}$ in diese einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{G}^{(1}$ sich verwandelt, so folgt hieraus [mittelst des Satzes (20.)], dass $\mathfrak{G}$ selber eine Fläche von der Grundzahl N ist. Also der Satz:

Zehnter Satz. — *Eine Fläche von der Grundzahl N wird diese* (25.) *Grundzahl, auch bei irgend welcher stetigen Umformung, fortdauernd beibehalten. Oder mit andern Worten: Die Grundzahl einer Fläche erleidet durch stetige Umformung derselben keinerlei Abänderung.*

§ 7.

Ueber die Randcurven einer Fläche respective eines Flächensystems.

Es sei $\mathfrak{S}$ ein beliebig gegebenes Flächensystem oder auch eine beliebig gegebene einzelne Fläche. Wir führen in $\mathfrak{S}$ einen beliebigen Querschnitt aus. Was die Lage dieses Querschnittes anbelangt, so sind überhaupt nur drei Fälle denkbar.

Fig. I.

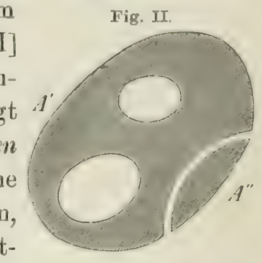
A B

Erster Fall: Der Querschnitt nimmt seinen Anfang in irgend einer Randcurve A und endigt in irgend einer *andern* Randcurve B. Alsdann werden sich die beiden genannten Curven A und B [vergl. Fig. I] mit den beiden Ufern des Querschnitts zu einer einzigen Randcurve vereinigen. An Stelle der beiden Randcurven A und B haben wir also in diesem Falle nach Ausführung des Querschnittes nur eine einzige Randcurve. Mit

andern Worten: Die Anzahl der Randcurven wird durch den Querschnitt um 1 *vermindert.*

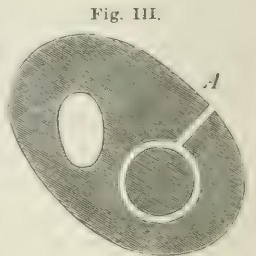
Zweiter Fall: Der Querschnitt nimmt seinen Anfang in irgend einer Randcurve A und endigt in irgend einem Punkt *derselben* Curve. Bezeichnen wir [Fig. II] die beiden Theile, in welche A durch den Anfangs- und Endpunkt des Querschnittes zerlegt wird, mit A' und A'', so wird A' mit dem *einen* Ufer des Querschnittes zusammengenommen eine einzige in sich zurücklaufende Randcurve bilden, und ebenso A'' mit dem *andern* Ufer jenes Schnittes zusammengenommen. In diesem Fall wird also die Anzahl der vorhandenen Randcurven durch Ausführung des Querschnittes *um* 1 *vermehrt* werden.

Fig. II.



Dritter Fall: Der Querschnitt ist ein *sigmaförmiger.* D. h. er nimmt seinen Anfang in irgend einer Randcurve A [Fig. III] und endigt in irgend einem Punkt seines früheren Laufes. Ein solcher sigmaförmiger Querschnitt kann als ein Complex von einem Rückkehrschnitt s und von einem Querschnitt q angesehen werden. Der letztere wird dann seinen Anfang in der Randcurve A, und sein Ende in dem einen Ufer des Schnittes s haben.

Fig. III.



Wir wollen uns nach einander zuerst s und sodann q ausgeführt denken. Durch den Rückkehrschnitt s wird die Anzahl der vorhandenen Randcurven offenbar *um* 2 *vermehrt*; denn das *eine* Ufer von s bildet für sich allein eine vollständige in sich zurücklaufende Randcurve; und Gleiches gilt auch von dem *andern* Ufer.

Lassen wir nun gegenwärtig den Querschnitt q sich anschliessen, so wird dieser, ebenso wie der im ersten Fall behandelte, zwei verschiedene Randcurven mit einander verbinden, folglich eine *Verminderung der Randcurven-Anzahl um* 1 verursachen.

Durch beide Schnitte s und q zusammengenommen tritt also eine Vermehrung der Randcurven um 1 ein. D. h. jene Anzahl wird durch den hier im dritten Falle betrachteten Querschnitt *um* 1 *vermehrt.*

Alle drei Fälle zusammengefasst, gelangen wir daher zu folgendem Resultat:

Erster Satz. — *Die Anzahl der bei irgend einem Flächensystem* (1.) *oder bei irgend einer einzelnen Fläche vorhandenen Randcurven wird durch jeden Querschnitt entweder um* 1 *vermehrt, oder um* 1 *vermindert.*

Bemerkung. — Die Figur III zeigt in deutlicher Weise, dass ein sigmaförmiger Querschnitt stets *zwei* Uferlinien besitzt, nämlich erstens eine *innere*, *geschlossene*, und andererseits eine *äussere*, *ungeschlossene* Uferlinie. Die beiden Endpunkte der letztern liegen einander unendlich nahe und befinden sich z. B. in jener Figur III beide auf der Curve A.

Eine beliebig gegebene Fläche $\mathfrak{F}$ von der Grundzahl N kann [nach (20.) pg. 158] durch $(N-1)$ Querschnitte in eine Fläche $\mathfrak{F}^{(1)}$ verwandelt werden, welche *einfach zusammenhängt*, deren Randcurven-Anzahl also [nach (8.) pg. 151] nothwendiger Weise $= 1$ ist.

Bezeichnet man nun die ursprüngliche Randcurven-Anzahl der Fläche $\mathfrak{F}$ mit R, so wird diese Zahl R [vergl. (1.)] durch jeden der in Rede stehenden $(N-1)$ Querschnitte um ε vermehrt, wo $\varepsilon = \pm 1$ ist. Bezeichnet man also die jenen $(N-1)$ Querschnitten entsprechenden Vermehrungen der Reihe nach mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{N-1}$, so muss

$$R + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{N-1}$$

gleich der Randcurven-Anzahl von $\mathfrak{F}^{(1)}$, d. i. gleich 1 sein. Somit ergiebt sich die Formel:

$$R + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{N-1} = 1.$$

Ist unter den Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{N-1}$ die Anzahl derjenigen, welche den Werth $+1$ haben, gleich ν, mithin die Anzahl derer, welche den Werth -1 besitzen, gleich $(N-1-\nu)$, so verwandelt sich die eben aufgestellte Gleichung in

$$R + \nu - (N - 1 - \nu) = 1,$$

d. i. in

$$R = (N - 2\nu).$$

Zufolge seiner Bedeutung ist ν irgend eine Zahl aus der Reihe

$$0, 1, 2, \ldots, (N-1),$$

mithin 2ν eine Zahl aus der Reihe

$$0, 2, 4, \ldots, (2N-2).$$

Aus der soeben erhaltenen Gleichung

$$R = (N - 2\nu)$$

ergiebt sich daher, dass R eine Zahl sein muss, welche zur Reihe

$$N, (N-2), (N-4), \ldots, (2-N)$$

gehört. Seiner Bedeutung zufolge kann natürlich R niemals negativ sein; jedenfalls aber haben wir folgenden Satz:

Zweiter Satz. — *Bezeichnet man für irgend eine Fläche die Grundzahl und die Randcurven-Anzahl respective mit* N *und* R, *so wird* R, *falls* N *gegeben ist, stets einen der Werthe haben:*

(2.) $R = N,\ (N-2),\ (N-4),\ (N-6)$, etc. etc.

Und umgekehrt wird also, falls R gegeben sein sollte, die Zahl N stets einen der Werthe

(3.) $N = R,\ (R+2),\ (R+4),\ (R+6)$, etc. etc.

besitzen.

Diesem Satze schliesst sich, was den Fall der *geschlossenen* Flächen betrifft, sofort folgende speciellere Bemerkung an:

Dritter Satz. — *Versteht man unter $\mathfrak{F}$ irgend eine geschlossene Fläche, mithin* [vgl. (5.) pg. 150] *unter $\dot{\mathfrak{F}}$ die zugehörige punktirte Fläche, so besitzt $\dot{\mathfrak{F}}$ nur eine einzige Randcurve. Folglich wird* [nach (3.)] *die Grundzahl $\dot{N}$ dieser Fläche $\mathfrak{F}$ einen der Werthe*

(4.) $\dot{N} = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$, etc. etc.

besitzen. Und hieraus folgt weiter [Satz (20.), (21.) pg. 158], *dass die Anzahl derjenigen Querschnitte, welche zur Umwandlung der Fläche $\mathfrak{F}$ in eine einfach zusammenhängende erforderlich sind, durch eine der Zahlen:*

(5.) 0, 2, 4, 6, 8, etc. etc.

dargestellt sein wird.

Den gegenwärtigen Betrachtungen schliessen sich einige weitere Sätze an, die hier nur deswillen aufgeführt werden sollen, weil sie bequeme Stützpunkte abgeben werden für unsere späteren Untersuchungen. So z. B. ergiebt sich folgender

Vierter Satz. — *Ist die Randcurven-Anzahl einer Fläche $\mathfrak{F}$ gleich zwei, so kann dieselbe durch irgend welchen von der einen zur andern*

(6.) *Randcurve laufenden Querschnitt niemals zerstückelt werden. Und zwar wird die so entstehende neue, in sich zusammenhängende Fläche nur noch eine einzige Randcurve besitzen.*

In der That schmelzen nämlich die beiden ursprünglichen Randcurven durch jenen Querschnitt zu *einer einzigen* zusammen [vgl. den ersten Fall p. 161]. Das Vorhandensein nur *einer einzigen* Randcurve ist aber ein sicheres Anzeichen dafür, dass die Fläche durch jenen Querschnitt nicht in getrennte Stücke zerfallen ist. Q. e. d.

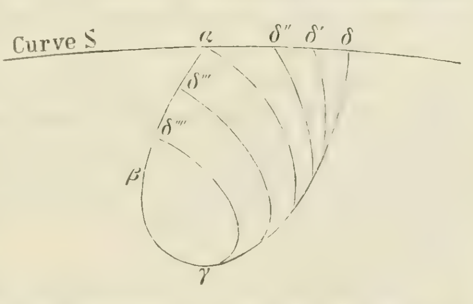
Um nun weiter zu gehen: Jede einem Flächensystem zugehörige *ganze Zahl*, wie z. B. seine *Grundzahl*, seine *Randcurven-Anzahl*, seine *Flächenindividuen-Anzahl* (d. i. die Anzahl der zum System gehörigen einzelnen Flächen), kann bei einer *stetigen* Deformation des Systems sich immer nur in *stetiger* Weise ändern, und muss also, weil ganze Zahlen einer stetigen Aenderung unfähig sind, während jener Deformation *constant* bleiben. Entsteht also z. B. aus einer gegebenen

Fläche $\mathfrak{F}$ durch irgend welchen Querschnitt ein Flächensystem von der Individuen-Anzahl α, so wird diese Anzahl, falls man den Querschnitt irgend welcher *stetig* fortschreitenden Deformation unterwirft, *constant*, $= \alpha$ bleiben. Hieraus ergiebt sich für den speciellen Fall: $\alpha = 1$ folgender Satz:

Fünfter Satz. — *Denkt man sich in einer gegebenen Fläche $\mathfrak{F}$ irgend einen dieselbe nicht zerstückelnden Querschnitt ausgeführt, so wird eine Zerstückelung auch dann nicht eintreten können, wenn man nachträglich jenen Querschnitt irgend welcher stetig fortschreitenden Deformation unterwirft.* (7.)

Der *Anfangspunkt* des in Rede stehenden Querschnittes liegt stets auf einer Randcurve der Fläche $\mathfrak{F}$; und durch eine stetige Deformation des Querschnitts wird man offenbar diesen Anfangspunkt längs jener Curve beliebig verschieben, also denselben nach einer *beliebig vorgeschriebenen* Stelle jener Curve hintransportiren können. Analoges gilt vom *Endpunkt* des Querschnittes.

Sind insbesondere der Anfangspunkt und der Endpunkt des Querschnitts beide auf *ein und derselben* Randcurve S der Fläche $\mathfrak{F}$ gelegen, so wird man den Querschnitt durch eine stetige Deformation z. B. auch in einen *sigmaförmigen* Querschnitt zu verwandeln im Stande sein. Repräsentirt z. B. in beistehender Figur der obere Bogen ein Bruchstück der Randcurve S, und $\alpha\beta\gamma\delta$ den in Rede stehenden Querschnitt, so wird man, durch eine stetige



Deformation des Querschnitts, seinen Endpunkt δ über δ', δ'' nach α, und hierauf weiter nach δ''' und δ'''' verschieben, und in solcher Weise den Querschnitt selber successive in die Gestalten:

$$\alpha\beta\gamma\delta',\quad \alpha\beta\gamma\delta'',\quad \alpha\beta\gamma\alpha,\quad \alpha\beta\gamma\delta''',\quad \alpha\beta\gamma\delta''''$$

versetzen können. Von diesen Gestalten sind aber die beiden letzten *sigmaförmige*. Und umgekehrt wird man den in Rede stehenden Querschnitt, falls er etwa zu *Anfang* die sigmaförmige Gestalt $\alpha\beta\gamma\delta''''$ haben sollte, durch stetige Deformation in die *gewöhnliche* Gestalt $\alpha\beta\gamma\delta$ zu versetzen im Stande sein. — Man gelangt daher auf Grund des Satzes (7.), und indem man (der Einfachheit willen) die betrachtete Fläche $\mathfrak{F}$ noch gewissen specielleren Voraussetzungen unterwirft, zu folgendem Resultat:

Sechster Satz. — *Es sei* $\mathfrak{F}$ *eine Fläche mit nur einer Randcurve. Ueberdies sei die Fläche* $\mathfrak{F}$ *keine einfach zusammenhängende, mithin ihre Grundzahl verschieden von* 1; *sodass also nothwendiger Weise irgend ein die Fläche nicht zerstückelnder Querschnitt construirbar ist. Alsdann kann man durch stetige Deformation diesen Querschnitt, falls er ein gewöhnlicher sein sollte, in einen sigmaförmigen, und umgekehrt, falls er ein sigmaförmiger sein sollte, in einen gewöhnlichen verwandeln, — ohne dass dabei eine Zerstückelung der Fläche* $\mathfrak{F}$ *zu befürchten stünde.* (8.)

Um die Hauptsache hervorzuheben: Entspricht die Fläche $\mathfrak{F}$ *den genannten Bedingungen, so kann man stets einen die Fläche nicht zerstückelnden Querschnitt ausführen, und dabei diesem Querschnitt — ganz nach Belieben — die gewöhnliche oder auch die sigmaförmige Gestalt verleihen. Auch kann man im erstern Fall, wenn* α *und* δ *zwei am Rande von* $\mathfrak{F}$ *willkürlich vorgeschriebene Punkte bezeichnen, dafür sorgen, dass der Anfangs- und Endpunkt des Querschnitts respective mit* α *und* δ *coincidiren. Desgleichen kann man im letztern Fall dafür sorgen, dass der Anfangspunkt des Querschnitts die vorgeschriebene Lage* α *erhält.*

Dabei sind schliesslich, auf Grund der früher pg. 162 angestellten Betrachtungen, noch folgende Bemerkungen zuzufügen:

Siebenter Satz. — *Hält man fest an den im vorhergehenden Satze über die Fläche* $\mathfrak{F}$ *gemachten Voraussetzungen — ihre Randcurve mag* S *heissen —, und denkt man sich irgend einen die Fläche* $\mathfrak{F}$ *nicht zerstückelnden Querschnitt* q *ausgeführt, so wird die so entstehende neue Fläche stets zwei Randcurven* S_1 *und* S_2 *haben, wobei zwei Fälle zu unterscheiden sind.* (9.)

Ist nämlich q *ein gewöhnlicher Querschnitt, so besteht* S_1 *aus dem einen Ufer von* q *und einem Theile von* S, *andererseits* S_2 *aus dem andern Ufer von* q, *und dem noch übrigen Theile von* S.

Ist hingegen q *ein sigmaförmiger Querschnitt, so ist* S_1 *dargestellt durch das innere Ufer von* q [vgl. die Bemerkung p. 163], *andererseits aber* S_2 *zusammengesetzt aus dem äussern Ufer von* q *und aus der Curve* S.

Die hier betrachtete Fläche $\mathfrak{F}$ sollte [nach (8.)] nur *eine* Randcurve haben. Folglich ist ihre Grundzahl [vgl. (3.)] eine der Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 etc. Andererseits aber sollte $\mathfrak{F}$ [nach (8.)] eine von 1 verschiedene Grundzahl besitzen. Also ist dieselbe nothwendiger Weise dargestellt durch eine der Zahlen:

$$3, 5, 7, 9, \text{ etc. etc.}$$

Bezeichnet man also für den Augenblick jede Fläche von der Grundzahl N und der Randcurven-Anzahl R mit

$$\mathfrak{F}_R^{(N)},$$

so hat man die betrachtete Fläche $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{F}_1^{(2p+1)}$ zu benennen. Diese verwandelt sich durch Ausführung des in (9.) genannten Querschnitts in eine Fläche $\mathfrak{F}_2^{(2p)}$. Diese letztere aber verwandelt sich alsdann mittelst eines neuen Querschnitts (6.) in eine Fläche $\mathfrak{F}_1^{(2p-1)}$; sodann diese mittelst eines abermaligen Querschnitts (9.) in eine Fläche $\mathfrak{F}_2^{(2p-2)}$; — sodass man also der Reihe nach erhält:

$$\mathfrak{F}_1^{(2p+1)},\ \mathfrak{F}_2^{(2p)},\ \mathfrak{F}_1^{(2p-1)},\ \mathfrak{F}_2^{(2p-2)},\ \mathfrak{F}_1^{(2p-3)},\ \text{etc. etc.},$$

wo die untern Indices alternirend 1 und 2 sind. Setzt man diese Operationen hinreichend weit fort, so erhält man schliesslich offenbar eine Fläche

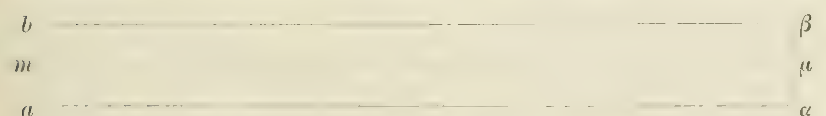
$$\mathfrak{F}_1^{(1)},$$

d. h. eine Fläche von der Grundzahl 1 und mit nur *einer* Randcurve.

Bemerkung. — In den *früheren* Paragraphen haben wir uns absichtlich auf unsere geometrische Anschaung nur bei Elementarflächen oder (was auf dasselbe hinauskommt) bei den einfach zusammenhängenden Flächen verlassen.

Im *gegenwärtigen* Paragraph hingegen haben wir der geometrischen Anschauung auch Vertrauen geschenkt bei ganz *beliebig* gegebenen Flächen; und das dürfte weniger sicher sein. Und in der That giebt es Flächen, für welche die Betrachtungen dieses Paragraphs *unrichtig* sind.

Man denke sich z. B. aus Papier ein langgestrecktes Rechteck $a\alpha\beta b$ verfertigt:



und gebe diesem Papierstreifen um seine Mittellinie $m\mu$ ein Torsion von 180^0; sodass die beiden kurzen Seiten ab und $\alpha\beta$ wieder parallel werden, aber einander entgegengesetzte Richtungen erhalten.

Solches ausgeführt gedacht, ist alsdann ab gleichgerichtet mit $\beta\alpha$ (nicht mit $\alpha\beta$). Diese gleichgerichteten Linien ab und $\beta\alpha$ nähere man jetzt einander, ohne dabei ihre Richtungen zu ändern, was mittelst einer geeigneten Biegung des Papierstreifens leicht zu bewerkstelligen ist; und hefte sie schliesslich aneinander, also a an β, und b an α.

Die in solcher Weise entstehende (ringförmig in sich zurücklaufende) Fläche, welche zuerst von *Möbius* untersucht wurde, hat, wie leicht zu übersehen, die *Grundzahl* 2 und die *Randcurven-Anzahl* 1. Sie widerspricht

daher den Sätzen (2.), (3.) und zeigt, dass denselben *keine* unumschränkte Gültigkeit zukommt.

Die Ableitung dieser Sätze muss daher mit irgend welchem Fehler behaftet sein. Und ein solcher Fehler zeigt sich in der That in den Betrachtungen des zweiten Falles pg. 162. Denn jene Möbius'sche Fläche z. B. besitzt nur *eine* Randcurve, verwandelt sich aber durch einen geeigneten Querschnitt in die Fläche eines Rechtecks, also in eine Fläche, die ebenfalls nur *eine* Randcurve hat; woraus hervorgeht, dass die dortigen Betrachtungen unter Umständen *unrichtig* sind. U. s. w.

Eine charakteristische Eigenschaft der soeben besprochenen Möbius-schen Fläche besteht darin, dass man bei ihr nicht mehr von *zwei verschiedenen* Seiten sprechen kann. Denn wollte man z. B. bei irgend einem Flächenelement derselben eine bestimmte Seite schwarz anstreichen, und mit diesem Anstrich der Continuität entsprechend von Element zu Element fortgehen, so würde schliesslich die ganze Fläche, und zwar *jedes Flächenelement auf beiden Seiten* schwarz angestrichen sein.

Demgemäss kann man alle überhaupt denkbaren Flächen in zwei Kategorien bringen, nämlich erstens in die Kategorie derjenigen Flächen, bei denen *zwei verschiedene Seiten* für die ganze Fläche in bestimmter Weise und ohne Verletzung der Continuität sich festsetzen lassen, und zweitens in die Kategorie derjenigen Flächen, bei denen (wie z. B. bei der Möbius'schen Fläche) solches nicht möglich ist. Man kann etwa die erstern als *bilaterale*, die letztern als *unilaterale* Flächen bezeichnen.

Eine genauere Ueberlegung zeigt nun, dass die Sätze des gegenwärtigen Paragraphs durchweg anwendbar sind auf bilaterale Flächen. Und da wir im Folgenden stets nur mit bilateralen Flächen zu thun haben werden, so werden wir dabei von diesen Sätzen, ohne irgend welche Restriction, Gebrauch machen dürfen.

§ 8.

Ueber die Grundzahl einer Riemann'schen Kugelfläche.

Es sei $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene Riemann'sche Kugelfläche, und n die Anzahl der in ihr über einander gelagerten Blätter. In dieser Fläche mögen im Ganzen π Windungspunkte vorhanden sein, von welchen der erste m_1-blättrig, der zweite m_2-blättrig u. s. w., endlich der letzte m_π-blättrig ist*). Ferner sei $\dot{\mathfrak{R}}$ die zugehörige *punktirte* Fläche [vgl. (5.) pg. 150]. *Es soll die Grundzahl N dieser Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$ ermittelt werden.*

Wir haben früher [vgl. (25.) pg. 161] gesehen, dass die Grundzahl einer Fläche durch irgend welche stetige Umformung der Fläche keinerlei Aenderung erfährt. Hiervon machen wir Gebrauch, um

*) Ein Windungspunkt ist m-blättrig, wenn in ihm m Blätter der Fläche mit einander zusammenhängen; also dann, wenn er von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist.

uns die gestellte Aufgabe zu erleichtern. Wir denken uns nämlich durch stetige Umformung die auf $\mathfrak{R}$ vorhandenen π Windungspunkte der Art verschoben, dass nirgends zwei solche Punkte gerade über einander liegen, und gehen nunmehr erst an die Berechnung von $\dot{N}$.

Wir führen auf der Kugelfläche $\mathfrak{R}$ *zwei* kreisförmige und π geradlinige, im Ganzen also $(\pi + 2)$ Schnitte aus, *von welchen jeder, seinem ganzen Laufe nach, alle n Blätter der Fläche durchdringt.* Durch die beiden Kreisschnitte soll die gegebene Kugelfläche $\mathfrak{R}$ in drei Theile zerlegt werden, in zwei äussere calottenförmige, und in einen mittleren gürtelförmigen Theil. Die beiden ersteren mögen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$, der letztere $\mathfrak{G}$ genannt werden; und die beiden Kreisschnitte mögen der Art ausgeführt gedacht werden, dass sämmtliche π Windungspunkte innerhalb $\mathfrak{G}$ liegen, dass mithin $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ von Windungspunkten völlig frei sind.

Die π geradlinigen Schnitte mögen dazu dienen, um den Gürtel $\mathfrak{G}$ in π Theile zu zerlegen, von welchen jeder immer nur je *einen* Windungspunkt in sich enthält; und jeder von diesen geradlinigen (oder genauer ausgedrückt bogenförmigen) Schnitten mag seinen Anfang in dem einen, und sein Ende in dem andern Kreisschnitt haben. Die π Theile, in welche $\mathfrak{G}$ auf diese Weise zerlegt wird, mögen mit $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_\pi$ bezeichnet werden, und zwar in solcher Weisse, dass $\mathfrak{G}_1$ den m_1-blättrigen, $\mathfrak{G}_2$ den m_2-blättrigen, u. s. w., endlich $\mathfrak{G}_\pi$ den m_π-blättrigen Windungspunkt in sich enthält.

Die Calotte $\mathfrak{C}$ besteht aus n von einander getrennten einblättrigen Flächenstücken, von welchen jedes durch stetige Umformung in eine Elementarfläche verwandelt werden kann, von welchen also jedes *einfach zusammenhängend* ist. Gleiches gilt von der Calotte $\mathfrak{C}'$.

Was ferner die π Theile anbelangt, in welche wir den Gürtel $\mathfrak{G}$ zerlegt haben, so besteht jeder derselben aus einer Windungsfläche und aus einer gewissen Anzahl einblättriger Flächenstücke. So besteht z. B. $\mathfrak{G}_\varkappa$ aus einer $m_\varkappa$-blättrigen Windungsfläche und aus $(n - m_\varkappa)$ einblättrigen Flächenstücken, im Ganzen also aus $(n - m_\varkappa + 1)$ Flächenstücken; jedes von diesen Flächenstücken kann durch stetige Umformung in eine Elementarfläche verwandelt werden, ist also *einfach zusammenhängend* [vgl. (2a.) pg. 147].

Durch unsere $(\pi + 2)$ Schnitte wird demnach die Fläche $\mathfrak{R}$ im Ganzen in

$$2n + (n - m_1 + 1) + (n - m_2 + 1) + \ldots + (n - m_\pi + 1),$$

d. i. in

$$(\pi + 2)\,n - (m_1 + m_2 + \ldots + m_\pi) + \pi \tag{1.}$$

einzelne Flächenstücke zerfallen, von welchen jedes einfach zusammenhängend ist.

Wir müssen nun ferner untersuchen, wie viel *Quer-* und *Rückkehrschnitte* durch unsere $(\pi + 2)$ Schnitte dargestellt werden. Die beiden kreisförmigen Schnitte bilden, weil sie alle n Blätter durchdringen, im Ganzen $2n$ in sich zurücklaufende Schnitte. Von diesen ist *einer* als ein *Querschnitt* anzusehen, nämlich als ein Querschnitt, dessen Anfang und Ende am Rande der in $\mathfrak{R}$ vorhandenen kleinen Oeffnung sich befinden. Die übrigen $(2n - 1)$ hingegen sind als *Rückkehrschnitte* aufzufassen. Was ferner die π geradlinigen Schnitte anbelangt, so ist jeder derselben als ein Aggregat von n Querschnitten anzusehen. *Es werden also durch unsere $(\pi + 2)$ Schnitte im Ganzen*
(2.) *$(n\pi + 1)$ Querschnitte und $(2n - 1)$ Rückkehrschnitte der Fläche $\mathfrak{R}$ dargestellt sein.*

Zerfällt nun aber eine gegebene Fläche durch ν Querschnitte und irgend welche Rückkehrschnitte in α einfach zusammenhängende Stücke, so ist [Satz (18.) pg. 157] die Grundzahl der Fläche $= (\nu - \alpha + 2)$. In unserm Falle ist nach (1.) und (2.):

$$\alpha = (\pi + 2)\,n - (m_1 + m_2 + \ldots + m_\pi) + \pi,$$
$$\nu = n\pi + 1.$$

Demnach ergiebt sich für die Grundzahl $\dot{N}$ unserer Fläche $\mathfrak{R}$ folgender Werth:

$$\dot{N} = 3 - 2n + (m_1 + m_2 + \ldots + m_\pi) - \pi. \tag{3.}$$

Die π auf $\mathfrak{R}$ vorhandenen Windungspunkte sind der Reihe nach von der $(m_1 - 1)^{\text{ten}}$, von der $(m_2 - 1)^{\text{ten}}$, u. s. w., endlich von der $(m_\pi - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Wir bezeichnen die Summe all dieser Ordnungszahlen mit w, also:

$$\mathrm{w} = (m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \ldots + (m_\pi - 1),$$

d. i.:

$$\mathrm{w} = (m_1 + m_2 + \ldots + m_\pi) - \pi.$$

Hierdurch verwandelt sich der für $\dot{N}$ erhaltene Werth (3.) in:

$$\dot{N} = 3 - 2n + \mathrm{w}; \tag{4.}$$

sodass wir also zu folgendem Satz gelangen:

Theorem. — *Besitzen die auf einer n-blättrigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ vorhandenen Windungspunkte Ordnungszahlen, deren Summe $=$ w ist, so wird die Grundzahl der Fläche $\mathfrak{R}$, oder vielmehr*

die Grundzahl $\dot{N}$ der zugehörigen punktirten Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$ den Werth haben:

(5.) $$\dot{N} = \mathrm{w} - 2n + 3.$$

Demgemäss sind [Satz (21.) pg. 159] *in der Fläche* $\dot{\mathfrak{R}}$

(6.) $$(\mathrm{w} - 2n + 2) \textit{ Querschnitte}$$

ausführbar, durch welche $\dot{\mathfrak{R}}$ nicht zerstückelt wird. Auch wird die Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$ [zufolge des citirten Satzes] *durch derartige* $(\mathrm{w}-2n+2)$ *Querschnitte nothwendiger Weise in eine einfach zusammenhängende Fläche übergehen.*

Uebrigens ist die Grundzahl $\dot{N}$ [nach Satz (4.) pg. 164] stets *ungerade*, also nach (5.) die Zahl w stets *gerade*, mithin die in (6.) erwähnte Querschnittanzahl:

$$\mathrm{w} - 2n + 2$$

ebenfalls stets *gerade*. Bezeichnet man dementsprechend diese letztere Zahl mit $2p$, so erhält man die Formel:

$$2p = \mathrm{w} - 2n + 2,$$

und gelangt also zu folgendem

Zusatz. — *Versteht man unter $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}$, ferner unter $\dot{\mathfrak{R}}$ die zugehörige punktirte Fläche, so wird diese Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$ stets durch eine gewisse gerade Anzahl von Querschnitten in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelbar sein. Und zwar wird diese gerade Anzahl — sie mag $2p$ heissen — nothwendiger Weise den Werth haben:*

(7.) $$2p = \mathrm{w} - 2n + 2,$$

wo w, *ebenso wie im vorhergehenden Theorem, die Summe der Ordnungszahlen der einzelnen Windungspunkte der Fläche $\mathfrak{R}$ repräsentirt.*

Dieser Satz (7.) ist von Riemann selber auf grossem Umwege (durch Ausführung einer gewissen conformen Abbildung) bewiesen worden [vgl. Riemann's Ges. Werke pg. 107, die drittletzte Formel des dortigen Artikels 7]. Der hier eingeschlagene äusserst einfache Weg ist von mir bereits 1865 in der ersten Auflage dieses Werkes angegeben worden. [Vgl. daselbst pg. 312.]

Beispiel. — Versteht man unter f eine der beiden Functionen:

(α.) $$f = \sqrt{(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_{2\nu-1})},$$
$$f = \sqrt{(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_{2\nu-1})(z-c_{2\nu})},$$

wo die c's Constanten sein sollen, so dient [vgl. pg. 83. 84] zur eindeutigen Ausbreitung der Function f eine *zwei*blättrige Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}$ mit 2ν Windungspunkten, von denen jeder *erster* Ordnung ist. Demgemäss haben die Zahlen n und w für diese Fläche $\mathfrak{R}$ die Werthe:

$$n = 2, \quad \mathrm{w} = 2\nu.$$

Bezeichnet man also die der Fläche $\mathfrak{R}$ zugehörige punktirte Fläche mit $\dot{\mathfrak{R}}$ und die Grundzahl von $\dot{\mathfrak{R}}$ mit $\dot{N}$, so ist nach (5.):

$$\dot{N} = 2\nu - 4 + 3 = 2\nu - 1. \tag{β.}$$

Zweites Beispiel. — Ist insbesondere $\nu = 1$, handelt es sich also um diejenige Fläche $\mathfrak{R}$, auf welcher eine der beiden Functionen

$$(\gamma.) \qquad \begin{aligned} f &= \sqrt{(z - c_1)}\,, \\ f &= \sqrt{(z - c_1)(z - c_2)} \end{aligned}$$

ihre eindeutige Ausbreitung findet, so folgt aus (β.):

$$\dot{N} = 1. \tag{δ.}$$

Die der Fläche $\mathfrak{R}$ zugehörige *punktirte* Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$ hat mithin die Grundzahl: $\dot{N} = 1$, und ist also [Satz (19.) pg. 158] eine *einfach zusammenhängende* Fläche.

§ 9.

Ueber die positive Umlaufung einer gegebenen Fläche.

Construirt man in der Horizontalebene die schon auf pg. 3 besprochene ringförmige Fläche $\mathfrak{A}$, und zieht man in derselben längs irgend eines Radius einen vom innern zum äussern Rande laufenden Querschnitt q, so wird sich die Fläche $\mathfrak{A}$ durch Ausführung dieses Querschnitts q in eine *neue* Fläche $\mathfrak{A}_q$ verwandeln, welche nur *eine einzige* Randcurve besitzt. Diese Randcurve besteht theils aus den ursprünglichen Kreisrändern der Fläche $\mathfrak{A}$, theils aus den beiden Uferlinien des Querschnitts q.

Will man nun die neue Fläche $\mathfrak{A}_q$ *positiv* umlaufen, so hat man offenbar fortzuschreiten in der Richtung der in nebenstehender Figur gezeichneten Pfeile, also z. B. jene beiden Uferlinien des Schnittes q in *entgegengesetzten* Richtungen zu durchwandern. In der That hat man, falls der Schnitt q als ein *Fluss* oder *Strom* angesehen wird, bei einer solchen positiven Umlaufung von $\mathfrak{A}_q$ das *linke* Ufer dieses Stromes q *stromabwärts**), hingegen sein *rechtes* Ufer *stromaufwärts* zu durchwandern.

Man bemerkt leicht, dass dieser Satz ganz allgemein gilt für

*) In der vorstehenden Figur ist die *linke* Uferlinie des Stromes q durch einen *stärkeren*, die rechte durch einen schwächeren Strich angegeben. Gleiches wird bei Figuren solcher Art in Zukunft *meistentheils* geschehen.

beliebige Flächen und *beliebige* Schnitte (nicht blos für Querschnitte), und gelangt so zu folgendem Ausspruch:

Erster Satz. — *Es sei $\mathfrak{F}$ eine beliebig gegebene Fläche, deren obere Seite in bestimmter Weise festgesetzt ist. Denkt man sich nun in dieser Fläche $\mathfrak{F}$ irgend welche Schnitte oder Ströme $a, b, c, \ldots s$ construirt, und die so entstehende neue Fläche mit*

(8.) $$\mathfrak{F}_{abc\ldots s}$$

bezeichnet, so wird man bei einer positiven Umlaufung dieser Fläche $\mathfrak{F}_{abc\ldots s}$ die linken Uferlinien der Ströme $a, b, c, \ldots s$ stromabwärts, die rechten stromaufwärts zu durchwandern haben.

Im Folgenden werden wir das Wort *Schnitt* sehr häufig durch *Strom* oder auch durch *Curve* respective *Linie* ersetzen, nämlich diese verschiedenen Ausdrucksweisen ganz *promiscue* anwenden, je nach der augenblicklichen Bequemlichkeit. So z. B. empfiehlt sich das Wort *Strom* ganz besonders *dann*, wenn der betrachtete Schnitt eine *bestimmt festgesetzte Richtung* besitzen soll. Und da Riemann selber von den *Ufern* eines Schnittes spricht, so sehe ich in der That (trotz erhobenen Widerspruchs) nicht ein, warum man nicht, in demselben Bilde bleibend, den Schnitt selber als *Strom* bezeichnen sollte. Dienen doch die alsdann ganz von selber sich ergebenden Ausdrücke *stromabwärts* und *stromaufwärts* wesentlich zur Abkürzung!

Ist eine beliebig gegebene *geschlossene* Fläche $\mathfrak{F}$ (z. B. eine mehrblättrige Riemann'sche Kugelfläche) durch irgend welche *Schnitte* oder *Ströme* $a, b, c, \ldots s$ in eine *einfach zusammenhängende* Fläche

(9.) $$\mathfrak{F}_{abc\ldots s}$$

verwandelt, so wird der Rand dieser letztern Fläche durch die Uferlinien jener Ströme $a, b, c, \ldots s$ dargestellt sein. Die in Rede stehende Fläche (9.) kann aber, weil sie *einfach zusammenhängend* sein soll, im Ganzen nur *eine einzige* Randcurve besitzen [Satz (8.) pg. 151]. Folglich werden die Uferlinien all' jener Ströme $a, b, c, \ldots s$ zusammengenommen *eine einzige in sich zurücklaufende Curve* ausmachen. Wir erhalten somit folgenden Satz:

Zweiter Satz. — *Es sei $\mathfrak{F}$ eine geschlossene Fläche mit bestimmt festgesetzter oberer Seite. Denkt man sich diese Fläche $\mathfrak{F}$ durch irgend welche Schnitte oder Ströme $a, b, c, \ldots s$ in eine einfach zusammenhängende Fläche*

(10.) $$\mathfrak{F}_{abc\ldots s}$$

verwandelt, so bilden die Uferlinien all' jener Ströme zusammengenommen eine einzige in sich zurücklaufende Curve.

(11.) *Diese Curve wird man, bei einer positiven oder negativen Umlaufung der Fläche (10.), ihrer ganzen Länge nach einmal zu durch-*

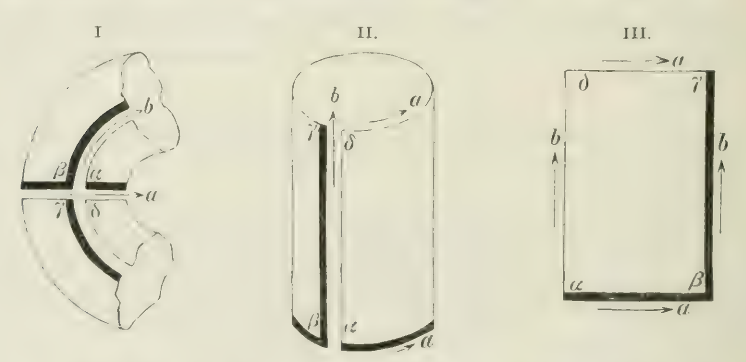
wandern haben. Und soll insbesondere die Umlaufung der Fläche (10.) *eine positive sein, so wird man dabei* [wie aus (8.) folgt] *die linken Uferlinien der einzelnen Ströme $a, b, c, \ldots s$ stromabwärts, die rechten stromaufwärts zu durchschreiten haben.*

Erläuterung durch ein Beispiel. — Es sei $\mathfrak{F}$ eine *Ringfläche* d. i. eine ringförmige Rotationsfläche mit kreisförmiger Meridiancurve [vgl. die Randnote pg. 98]. Wir ziehen in dieser Fläche $\mathfrak{F}$, deren Aussenseite als *obere* Seite festgesetzt sein mag, zwei in sich zurücklaufende Schnitte, den einen a längs eines Meridiankreises, den andern b längs eines Parallelkreises, und bezeichnen die durch Ausführung dieser beiden Schnitte entstehende *neue* Fläche mit

$$\mathfrak{F}_{ab}.$$

Diese Fläche findet sich in Figur I dargestellt, wobei allerdings der Raumersparniss wegen nur ein *Bruchstück* der Fläche angedeutet ist. Dabei sind, wie in der Figur durch Pfeile markirt ist, die Schnitte a, b als *Ströme von bestimmten Richtungen* gedacht, und die *linken* Uferlinien dieser Ströme mit *starken*, die rechten mit schwachen Strichen angegeben. Ueberdies sind die vier Punkte, in denen die vier Uferlinien zusammenstossen, mit α, β, γ, δ bezeichnet.

Man übersieht nun leicht, dass die Fläche $\mathfrak{F}_{ab}$ eine *einfach zusammenhängende* ist. Denn man kann dieselbe aus ihrer ursprünglichen Gestalt I. leicht, mittelst stetiger Umformung, nämlich mittelst gewisser Biegungen und Dehnungen respective Zusammenziehungen, zuerst in die Gestalt II., und sodann weiter in die Gestalt III. versetzen:



Mit andern Worten: Man kann die Fläche $\mathfrak{F}_{ab}$ durch stetige Umformung in eine *Elementarfläche* verwandeln. Folglich ist [vgl. die Definition pg. 146] $\mathfrak{F}_{ab}$ eine *einfach zusammenhängende* Fläche. Q. e. d.

Durch diese einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{F}_{ab}$ werden nun die allgemeinen Sätze (10.), (11.) in anschaulicher Weise bestätigt. Namentlich ersieht man z. B. aus den Figuren II. und III. [in denen die Buchstaben a, b, α, β, γ, δ genau in derselben Weise wie in der ursprünglichen Figur I. beibehalten sind], dass in der That die vier Uferlinien der Ströme a, b zusammengenommen *eine einzige in sich zurücklaufende Curve* bilden, und dass man bei einer *positiven* Umlaufung der Fläche $\mathfrak{F}_{ab}$ die

linken Uferlinien jener Ströme *stromabwärts*, die rechten stromaufwärts zu durchwandern hat.

Bemerkung. — Die der von Hause aus gegebenen *geschlossenen* Ringfläche $\mathfrak{F}$ zugehörige *punktirte* Fläche mag $\dot{\mathfrak{F}}$ heissen, und zwar mag die kleine punktförmige Oeffnung dieser Fläche $\dot{\mathfrak{F}}$ an der Stelle $\alpha\beta\gamma\delta$ gedacht werden. Alsdann können die Schnitte a und b als zwei aufeinander folgende *Querschnitte* der Fläche $\dot{\mathfrak{F}}$ angesehen werden. Denn jeder derselben hat alsdann seinen Anfang und sein Ende in einem Randpunkte jener kleinen Oeffnung.

Durch die beiden Querschnitte a, b verwandelt sich aber $\dot{\mathfrak{F}}$ in die *einfach zusammenhängende* Fläche $\mathfrak{F}_{ab}$. Bezeichnet man also die Grundzahl der Fläche $\dot{\mathfrak{F}}$ mit $\dot{N}$, so muss [nach Satz (20.) pg. 158] die Differenz $(\dot{N} - 1) = 2$ sein. Somit folgt: $\dot{N} = 3$.

§ 10.

Ueber die Verwandlung einer Riemann'schen Kugelfläche in eine einfach zusammenhängende Fläche. Erstes Beispiel.

Es seien g_1, h_1, g_2, h_2 beliebig gegebene, im Allgemeinen also *complexe* Constanten, und

$$f(z) = \sqrt{(z - g_1)(z - h_1)(z - g_2)(z - h_2)}\,. \tag{1.}$$

Sämmtliche Werthe dieser Function lassen sich bekanntlich [pg 83] in eindeutiger Weise ausbreiten auf einer gewissen *zweiblättrigen* Kugelfläche $\mathfrak{R}$, welche *vier* Windungspunkte: g_1, h_1, g_2, h_2 und *zwei* Uebergangslinien: g_1h_1 und g_2h_2 besitzt. Diese beiden Linien sind in der nachfolgenden Figur durch die vertikalen Striche g_1h_1 und g_2h_2 angedeutet. Bezeichnet man die zu $\mathfrak{R}$ gehörige *punktirte* Fläche mit $\dot{\mathfrak{R}}$, und die Grundzahl von $\dot{\mathfrak{R}}$ mit $\dot{N}$, so ist bekanntlich [vgl. (β.) pg. 172]

$$\dot{N} = 3. \tag{2.}$$

Die Fläche $\mathfrak{R}$ kann nun durch die in der nachfolgenden Figur angegebenen *Schnitte* oder *Ströme* a, b in eine Fläche

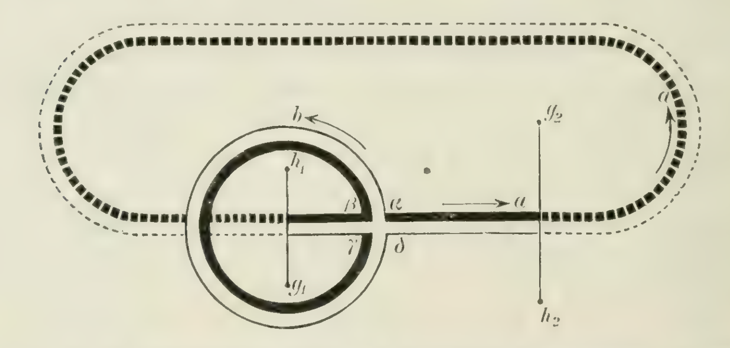
$$\mathfrak{R}_{ab} \tag{3.}$$

verwandelt werden, von der sich nachweisen lässt, dass sie *einfach zusammenhängend* ist. Vor Beginn dieses Nachweises wird es aber erforderlich sein, zuvörderst Näheres mitzutheilen über die Curven a, b.

Lage und Verlauf der Schnitte oder Ströme a, b. — Der Strom a soll fortfliessend gedacht werden theils im *untern*, theils im *obern* Blatt der Fläche $\mathfrak{R}$. Er mag entspringen an irgend einer Stelle des *obern* Blattes, etwa in der Mitte zwischen g_1h_1 und g_2h_2, und das obere Blatt durchschneidend zunächst so weit fortlaufen, bis er auf irgend welchem Wege zur Uebergangslinie g_2h_2 gelangt; bei Ueberschreitung dieser Linie wird er in das *untere* Blatt treten. In dem unteren Blatt mag er nun auf irgend

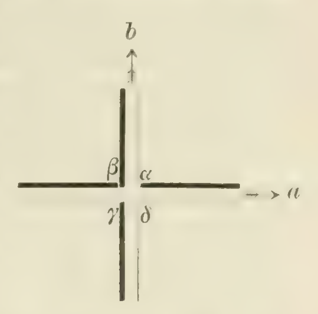
welchem Wege bis zur Uebergangslinie $g_1 h_1$ hinlaufen; bei Ueberschreitung derselben wird er von Neuem in das *obere* Blatt treten. Und hier in dem oberen Blatt mag er nun schliesslich bis zu seiner anfänglichen Quelle zurücklaufen. Der Strom a wird also ein in sich zurücklaufender sein; seine *Richtung* mag diejenige sein, in welcher wir ihn soeben haben fortfliessen lassen, also diejenige, welche in der untenstehenden Figur durch Pfeile angedeutet ist.

Der Strom b soll seinem ganzen Laufe nach im *oberen* Blatt der Fläche bleiben. Er mag an derselben Stelle entspringen, an welcher a entsprungen ist, nämlich an der Stelle $\alpha\beta\gamma\delta$. Von hier aus mag er die Uebergangslinie $g_1 h_1$ in irgend welcher Curve umkreisen und, während er also beständig im *oberen* Blatte bleibt, schliesslich wieder in seine Quelle zurückfliessen. Die *Richtung* des Stromes b soll diejenige sein, welche in der untenstehenden Figur durch einen Pfeil angedeutet ist, also der Art sein, dass Jemand, der an der gemeinsamen Quelle beider Ströme — nämlich bei $\alpha\beta\gamma\delta$ — steht, die Richtung, in welcher b fortfliesst, mit ausgestreckter Linken angeben wird, sobald er in derjenigen Richtung fortsieht, in welcher a fortfliesst. *Es soll also die anfängliche Richtung des Stromes b zu der anfänglichen Richtung des Stromes a ebenso liegen, wie* [nach unserer Festsetzung pg. 4] *die y-Achse des Coordinatensystems zur x-Achse desselben liegt.*



In der vorstehenden Figur sind diejenigen Stromstrecken, welche im *oberen* Blatt liegen, durch *ununterbrochene*, diejenigen hingegen, welche sich im unteren Blatt befinden, durch punktirte Linien angedeutet. Ferner sind daselbst die *linken* Ufer der Ströme mit *starken*, die rechten mit schwachen Strichen angegeben. Von Wichtigkeit ist zu bemerken, dass die beiden Ströme a und b einander nur an einer *einzigen* Stelle durchkreuzen, nämlich nur an der Stelle $\alpha\beta\gamma\delta$. Nach der vorstehenden Figur zu urtheilen, könnte man vermuthen, dass noch eine zweite Durchkreuzungsstelle existire. Das ist aber *nicht* der Fall. Denn an jener zweiten Stelle fliessen die beiden Ströme, ohne mit einander in irgend welche Berührung zu kommen, in verschiedenen Blättern über einander fort, getrennt von einander durch den — wenn auch nur unendlich kleinen — Zwischenraum, welcher sich überall zwischen den beiden Blättern der Fläche hinzieht.

Die Durchkreuzungsstelle $\alpha\beta\gamma\delta$ repräsentirt zugleich den Ort, wo beide Ströme entspringen, und ebenso auch den Ort, wo beide Ströme, nachdem sie die ihnen angewiesenen Wege durchlaufen haben, wieder einmünden. *Der Strom b, können wir demnach sagen, entspringt im linken Ufer des Stromes a, und mündet ein in das rechte Ufer von a. Der Strom a andererseits entspringt im rechten Ufer von b, und mündet ein in das linke Ufer von b.* Ob die Durchkreuzung unter rechtem Winkel, oder unter irgend welchem andern Winkel geschieht, ist völlig gleichgültig.



Die Fläche, in welche $\mathfrak{R}$ durch Ausführung der Schnitte oder Ströme a, b sich verwandelt, ist in (3.) mit $\mathfrak{R}_{ab}$ bezeichnet worden. Während also $\mathfrak{R}$ selber eine *geschlossene* Fläche ist, wird $\mathfrak{R}_{ab}$ eine *umrandete* Fläche vorstellen. Und zwar wird der Rand von $\mathfrak{R}_{ab}$ gebildet von den vier Uferlinien der beiden Ströme a und b.

Will man irgend eine Fläche in *positiver* Richtung umlaufen, so hat man längs ihres Randes — und zwar auf ihrer obern Seite — in solcher Richtung fortzuwandern, dass man die Fläche selber beständig zur *Linken* behält. Um demnach die Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$, etwa von der Ecke α aus, in *positiver* Richtung zu umlaufen, wird man von α aus [vgl. die beiden letzten Figuren] zuerst das *linke* Ufer von a *stromabwärts* durchwandern müssen, bis man nach β gelangt; sodann wird man von β aus das sich hier anschliessende *linke* Ufer von b, und zwar wiederum *stromabwärts*, durchschreiten müssen, bis man nach γ kommt. Von hier aus wird nun ferner das *rechte* Ufer von a *stromaufwärts* bis nach δ hin, und endlich von δ aus das *rechte* Ufer von b, wiederum *stromaufwärts*, zu durchlaufen sein, bis man schliesslich zum Ausgangspunkte α zurückgelangt.

Dass bei einer solchen positiven Umlaufung der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ die *linken* Ufer der Ströme a, b *stromabwärts*, die *rechten stromaufwärts* zu durchlaufen sind, kann als eine unmittelbare Folge des allgemeinen Satzes (8.) pg. 173 angesehen werden. Trotzdem ist es von Wichtigkeit, dass man jene Wanderung um die Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ herum in Gedanken wirklich ausführt. Denn man erkennt alsdann mit voller Bestimmtheit, *dass die genannten vier Uferlinien zusammengenommen eine einzige in sich zurücklaufende Curve bilden, dass also die Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ nur eine einzige Randcurve besitzt.* Daraus aber folgt — was bisher vielleicht bezweifelt werden konnte —, dass $\mathfrak{R}_{ab}$ nicht aus *mehreren* von einander getrennten Flächenstücken bestehen kann, sondern eine *einzige* zusammenhängende Fläche sein muss. Denn zwei oder mehrere von einander getrennte Flächenstücke werden zusammengenommen jederzeit mehr als *eine* Randcurve besitzen.

Die ursprünglich gegebene Fläche $\mathfrak{R}$ hat also durch Ausführung der beiden Schnitte oder Ströme a, b *keine Zerstückelung* erlitten.

Man kann nun offenbar den Strom a als einen *Querschnitt* der *punktirten Fläche* $\dot{\mathfrak{R}}$ auffassen, nämlich als einen Querschnitt, wel-

cher seinen Anfang und sein Ende in der kleinen in $\dot{\mathfrak{R}}$ vorhandenen Oeffnung hat. Sodann aber kann der Strom b als ein *zweiter Querschnitt* angesehen werden, der seinen Anfang in dem einen, sein Ende in dem andern Ufer von a hat.

Die Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ entsteht also aus $\dot{\mathfrak{R}}$ durch Ausführung von *zwei Querschnitten* a und b. Die Grundzahl $\dot{N}$ der Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$ war aber $= 3$ [vgl. (2.)]. Zufolge des Satzes (15.) pg. 155 ist daher die Grundzahl der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ nothwendig $= 1$, mithin $\mathfrak{R}_{ab}$ eine *einfach zusammenhängende* Fläche. Q. e. d.

Die Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ kann daher, weil sie einfach zusammenhängend ist, durch stetige Umformung in eine Elementarfläche von beliebiger Gestalt, z. B. in eine *Kreisfläche* oder auch in die *Fläche eines Quadrats oder Rechtecks* verwandelt werden. Dass eine derartige Umgestaltung möglich ist, wird häufig im Auge zu behalten sein, falls man sich durch die complicirte und wenig übersichtliche Gestalt, welche $\mathfrak{R}_{ab}$ von Hause aus besitzt, keine unnöthigen Schwierigkeiten bereiten will.

§ 11.

Fortsetzung. Zweites Beispiel.

Sind $g_1, h_1, g_2, h_2, g_3, h_3, g_4, h_4$ beliebig gegebene complexe Constanten, so sind sämmtliche Werthe der Function:

$$(1.)\quad f(z) = \sqrt{(z-g_1)(z-h_1)(z-g_2)(z-h_2)(z-g_3)(z-h_3)(z-g_4)(z-h_4)}$$

in eindeutiger Weise ausbreitbar auf einer gewissen *zweiblättrigen* Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$, welche *acht* Windungspunkte: $g_1, h_1, g_2, h_2, g_3, h_3, g_4, h_4$, und *vier* Uebergangslinien: g_1h_1, g_2h_2, g_3h_3, g_4h_4 besitzt [vgl. pg. 83]. Diese vier Uebergangslinien sind in der folgenden Figur durch vertikale Striche markirt. Bezeichnet man die Grundzahl der zu $\mathfrak{R}$ gehörigen *punktirten* Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$ mit $\dot{N}$, so ist bekanntlich [vgl. (β.) pg. 172]:

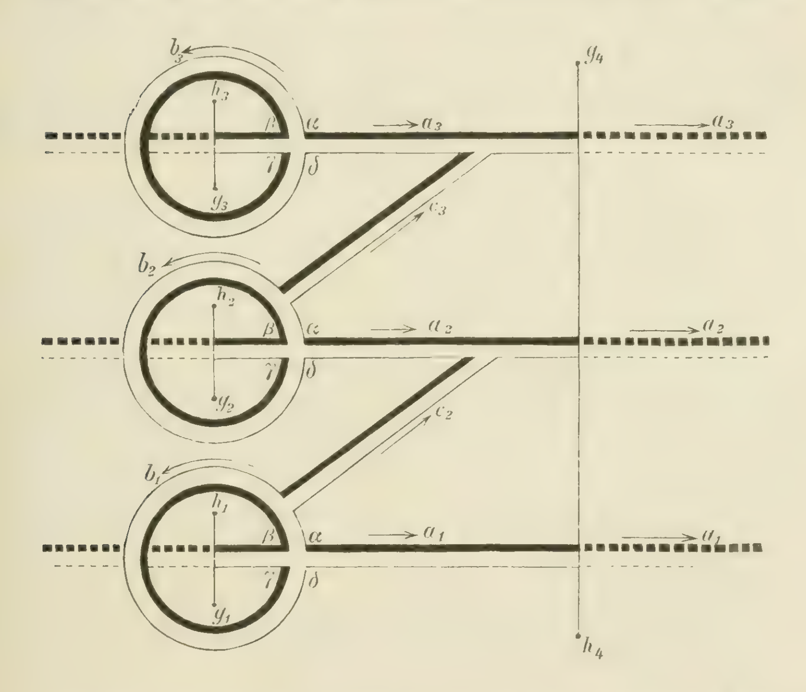
$$(2.)\quad \dot{N} = 7.$$

Die Fläche $\mathfrak{R}$ kann nun durch die in der nachfolgenden Figur angegebenen *Schnitte* oder *Ströme* a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_2, c_3 in eine Fläche

$$(3.)\quad \dot{\mathfrak{R}}_{a_1a_2a_3b_1b_2b_3c_2c_3} \text{ oder kürzer } \dot{\mathfrak{R}}_{abc}$$

verwandelt werden, von der sich nachweisen lässt, dass sie *einfach zusammenhängend* ist. Dabei ist zuvörderst vorauszuschicken

Einiges Nähere über die Schnitte oder Ströme a, b, c. — Jeder von den sechs Strömen a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 soll ein in sich zurücklaufender sein. Die Ströme a_1, a_2, a_3 fliessen zum Theil im oberen, zum Theil im unteren Blatt der Fläche. Der Strom a_1 z. B. tritt, während er die Uebergangslinie $g_4 h_4$ überschreitet, aus dem oberen Blatt in das untere; fliesst sodann hier in dem untern Blatt auf irgend welchem Wege fort, bis er zur Uebergangslinie $g_1 h_1$ gelangt; beim Ueberschreiten dieser Linie tritt er wieder in das obere Blatt und fliesst nun hier in dem oberen Blatt so weit fort, bis er schliesslich in seine eigene Quelle wieder einmündet. Die Ströme b_1, b_2, b_3 bleiben ihrem ganzen Laufe nach beständig im oberen Blatt der Fläche. In der untenstehenden Figur sind die *Richtungen* der Ströme a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 ebenso wie früher durch Pfeile angedeutet.



Betrachtet man also die Durchkreuzungsstelle $\alpha\beta\gamma\delta$ *der beiden Ströme* a_1 *und* b_1 *als die gemeinsame Quelle dieser beiden Ströme, so liegt wiederum* [nämlich ähnlich wie früher pg. 176] *die anfängliche Richtung von* b_1 *zur anfänglichen Richtung von* a_1 *wie die* y*-Axe zur* x*-Axe. Analoges gilt für* a_2, b_2, *ebenso für* a_3, b_3.

In unserer Figur sind übrigens die *linken* Uferlinien der Ströme durch *stärkere*, die rechten durch schwächere Striche angegeben. Endlich sind daselbst diejenigen Strecken der Ströme, welche im *oberen* Blatt liegen, durch *ununterbrochene*, diejenigen, welche im unteren Blatt sich befinden, durch punktirte Linien bezeichnet. Um die Figur nicht zu sehr zu überladen, sind dabei die Wege, welche die Ströme a_1, a_2, a_3 im unteren Blatt

verfolgen, nicht vollständig angegeben; man kann sich diese Wege etwa ebenso denken wie in der Figur pg. 176, jedoch der Art, dass dieselben nirgends mit einander in Berührung kommen. Dass die Punkte g_1, h_1, g_2, h_2, g_3, h_3 in unserer Figur in einer geraden Linie, und dass die Punkte g_4, h_4 in einer damit parallelen Linie liegen, ist durchaus unwesentlich. Es ist diese Annahme über die Lage jener Punkte nur deswegen geschehen, damit die Figur an Uebersichtlichkeit gewinne. Es versteht sich aber von selber, dass die Ströme oder Schnitte a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 in ganz analoger Weise auch dann ausgeführt werden können, wenn jene Punkte irgend welche andere Lage besitzen.

Die vier Uferlinien der beiden Ströme a_1 und b_1 bilden — ebenso wie früher in der Figur pg. 176 — zusammengenommen eine einzige in sich zurücklaufende Curve. Gleiches gilt von den vier Uferlinien der Ströme a_2 und b_2; und Gleiches endlich auch von denen der Ströme a_3 und b_3. Im Ganzen bilden also die zwölf Uferlinien der Ströme a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 drei von einander völlig gesonderte Curven, von denen jede eine in sich zurücklaufende ist. Die ursprünglich gegebene geschlossene Fläche $\mathfrak{R}$ verwandelt sich demnach durch Ausführung jener Ströme a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 in eine von *drei* Curven umrandete Fläche.

Führt man in einer Fläche, die mehrere Randcurven besitzt, einen Schnitt aus, der von irgend einem Punkte der einen Randcurve ausgeht und nach irgend welchem Punkte einer andern Randcurve hinläuft, so werden sich jene beiden Randcurven durch Ausführung dieses Schnittes vereinigen zu einer einzigen Randcurve; wie Aehnliches bereits bei einer früheren Gelegenheit [pg. 161] bemerkt wurde.

Führen wir demnach in der durch die Schnitte a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 entstandenen, im Ganzen von *drei* Randcurven begrenzten Fläche zwei Schnitte c_2 und c_3 aus, von welchen der eine von der *ersten* zur *zweiten*, der andere von der *zweiten* zur *dritten* Randcurve hinläuft, so werden sich durch Ausführung dieser beiden Schnitte jene *drei* Randcurven vereinigen zu einer *einzigen* Randcurve. Bezeichnet man also [wie schon bei 3.) geschehen ist] diejenige Gestalt, in welche die Fläche $\mathfrak{R}$ durch gleichzeitige Ausführung der Schnitte a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 und der Schnitte c_2, c_3 versetzt wird, mit $\mathfrak{R}_{abc}$, so wird $\mathfrak{R}_{abc}$ nur eine *einzige* Randcurve besitzen, folglich kein System von mehreren Flächenstücken, sondern eine *einzige* in sich zusammenhängende Fläche vorstellen.

Die Ströme

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ c_2,\ c_3$$

können in Bezug auf die Fläche $\mathfrak{R}$ oder vielmehr in Bezug auf die *punktirte* Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$ als ein System von sechs *Querschnitten* aufgefasst werden. Zuvörderst kann nämlich a_1 als *erster Querschnitt* ansehen werden, als ein Querschnitt, der seinen Anfang und sein Ende in der in $\dot{\mathfrak{R}}$ vorhandenen kleinen Oeffnung hat. Sodann kann b_1 als *zweiter Querschnitt* betrachtet werden, nämlich als ein Querschnitt, welcher seinen Anfang in dem einen, und sein Ende in dem andern Ufer von a_1 hat.

Nunmehr können wir die beiden Ströme c_2 und a_2 zusammengenommen als einen *dritten Querschnitt* von sigmaförmiger Gestalt (vgl. pg. 148), nämlich als einen Querschnitt auffassen, welcher in einem Uferpunkte des zweiten Querschnittes entspringt, und in einen Punkt seines eigenen Laufes einmündet. Ferner können wir den Strom b_2 als einen *vierten Querschnitt* betrachten, welcher in einem Uferpunkte des dritten Querschnittes entspringt und in den gegenüberliegenden Uferpunkt jenes Querschnittes einmündet.

Und endlich können wir nun die beiden Ströme c_3 und a_3 zusammengenommen als einen *fünften*, und den Strom b_3 als einen *sechsten* Querschnitt ansehen.

Die von einer einzigen Curve umrandete Fläche $\mathfrak{R}_{abc}$ entsteht also aus der Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$ durch Ausführung von sechs Querschnitten. Diese Querschnitte sind der Reihe nach durch

1) a_1, 2) b_1,

3) $c_2 + a_2$, 4) b_2,

5) $c_3 + a_3$, 6) b_3

dargestellt.

Nach (2.) ist aber die Grundzahl $\dot{N}$ der Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$ gleich 7. Folglich wird die Grundzahl der aus $\dot{\mathfrak{R}}$ durch jene sechs Querschnitte entstandenen Fläche $\mathfrak{R}_{abc}$ [nach Satz (15.) pg. 155] den Werth 1 haben. D. h. die Fläche $\mathfrak{R}_{abc}$ ist eine *einfach zusammenhängende.* Q. e. d.

§ 12.

Fortsetzung. Drittes Beispiel.

Betrachtet man schliesslich die der Function

$$f(z) = \sqrt{(z-g_1)(z-h_1)(z-g_2)(z-h_2)\ldots(z-g_{p+1})(z-h_{p+1})}$$

entsprechende zweiblättrige Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}$, und bezeichnet man dieselbe in ihrer *punktirten* Gestalt mit $\dot{\mathfrak{R}}$, ferner die Grundzahl von $\dot{\mathfrak{R}}$ mit $\dot{N}$, so findet man [vgl. (β.) pg. 172]:

$$\dot{N} = 2p + 1.$$

Auch übersieht man leicht, dass die gegenwärtige Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$, ähnlich wie früher, durch gewisse $2p$ Querschnitte:

$$
\begin{array}{llll}
1) & a_1, & 2) & b_1, \\
3) & c_2 + a_2, & 4) & b_2, \\
5) & c_3 + a_3, & 6) & b_3, \\
\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\
2p-1) & c_p + a_p, & 2p) & b_p
\end{array}
$$

in eine *einfach zusammenhängende* Fläche $\mathfrak{R}_{a,b,c}$ verwandelbar ist. U. s. w.

§ 13.

Fortsetzung. Viertes Beispiel.

Bezeichnet $\mathfrak{R}$ eine *ganz beliebig gegebene*, z. B. *beliebig vielblättrige* Riemann'sche Kugelfläche, so wird die Grundzahl $\dot{N}$ der zugehörigen punktirten Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$ nothwendiger Weise durch eine der Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 etc. dargestellt sein [vgl. (4.) pg. 164]. Wir wollen annehmen, es sei

$$\dot{N} = 7, \tag{1.}$$

ohne sonst aber über die Beschaffenheit der Flächen $\mathfrak{R}$, $\dot{\mathfrak{R}}$ irgend welche Voraussetzung zu machen. Zufolge des Satzes (21.) pg. 159 *müssen alsdann in der Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$ nothwendiger Weise* s e c h s *dieselbe*

(2.) *nicht zerstückelnde Querschnitte ausführbar sein. Auch wird die Fläche* $\dot{\mathfrak{R}}$, zufolge jenes Satzes, *durch sechs derartige Querschnitte sich stets in eine* e i n f a c h z u s a m m e n h ä n g e n d e *Fläche verwandeln.* Wir stellen uns die Aufgabe, derartige Querschnitte wirklich zu construiren, oder wenigstens so weit anzugeben, als solches, bei der fast ganz unbekannten Beschaffenheit der Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$, überhaupt möglich ist. Dabei werden wir beständig die Sätze pg. 164—166 in Anwendung bringen, namentlich die dortigen Sätze (6.) und (8.).

Erstens. — Die Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$ besitzt [nach (1.)] die Grundzahl $\dot{N} = 7$ und nur *eine* Randcurve, d. i. die Randcurve o der in $\dot{\mathfrak{R}}$ vorhandenen kleinen Oeffnung. Zufolge des Satzes (8.) pg. 166 kann also z. B. in der Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$ ein die Fläche *nicht* zerstückelnder, von der kleinen Curve o ausgehender sigmaförmiger Querschnitt $(c_1 + a_1)$ construirt werden. Und durch diesen wird alsdann die Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$ [Satz (15.) pg. 155] in eine neue Fläche $\mathfrak{R}^{(6)}$ von der Grundzahl 6 übergehen. Wir wollen diesen sigmaförmigen Querschnitt $(c_1 + a_1)$ uns nun in der That ausgeführt denken. Die Bezeichnung sei dabei so eingerichtet, dass der sigmaförmige Querschnitt aus einem Rückkehrschnitt a_1 und einem gewöhnlichen Querschnitt c_1 besteht. Demgemäss besitzt die neu entstandene Fläche $\mathfrak{R}^{(6)}$ im Ganzen *zwei* Randcurven, nämlich eine erste Randcurve, welche durch die *eine*

Uferlinie von a_1 repräsentirt ist, und eine zweite Randcurve, welche aus der *andern* Uferlinie von a_1, ferner aus den beiden Ufern von c_1, und endlich aus der kleinen Curve o zusammengesetzt ist. [Vgl. die Bemerkung pg. 163.]

Markirt man nun auf diesen beiden Randcurven der Fläche $\mathfrak{R}^{(6)}$ je einen Punkt, und construirt sodann irgend welchen von dem einen zum andern Punkt laufenden Querschnitt b_1, so wird durch diesen, zufolge des Satzes (6.) pg. 164, niemals Zerstückelung eintreten, mithin die Fläche $\mathfrak{R}^{(6)}$ in eine neue Fläche $\mathfrak{R}^{(5)}$ von der Grundzahl 5 übergehen. Einen solchen Querschnitt b_1 wollen wir uns nun wirklich ausgeführt denken, und dabei jene beiden willkürlich auf den beiden Randcurven zu markirenden Punkte, d. i. den Anfangs- und Endpunkt von b_1 so wählen, dass sie zu beiden Ufern des Rückkehrschnitts a_1 einander gerade gegenüberliegen. Uebrigens wird die neue Fläche $\mathfrak{R}^{(5)}$, zufolge des Satzes (6.) pg. 164, nur *eine einzige* Randcurve haben.

Zweitens. — Diese nur mit *einer einzigen* Randcurve versehene Fläche $\mathfrak{R}^{(5)}$ lässt sich nun genau in derselben Weise behandeln wie vorhin die Fläche $\mathfrak{R}$ selber, bei welcher ebenfalls nur *eine* solche Curve (die Curve o) existirte. In der That wollen wir, in ganz analoger Weise wie damals verfahrend, in der Fläche $\mathfrak{R}^{(5)}$ zuerst einen von b_1 ausgehenden, die Fläche nicht zerstückelnden sigmaförmigen Querschnitt $(c_2 + a_2)$ construiren, und hierauf irgend einen weitern Querschnitt b_2 folgen lassen, dessen Anfangs- und Endpunkt zu beiden Ufern des Rückkehrschnitts a_2 einander gerade gegenüberliegen. Die so entstehende Fläche wird alsdann die Grundzahl 3 haben, und demgemäss mit $\mathfrak{R}^{(3)}$ zu bezeichnen sein.

Drittens. — Genau in derselben Weise weitergehend kann man nun endlich die Fläche $\mathfrak{R}^{(3)}$ durch zwei Querschnitte $(c_3 + a_3)$ und b_3 in eine Fläche $\mathfrak{R}^{(1)}$ von der Grundzahl 1 verwandeln.

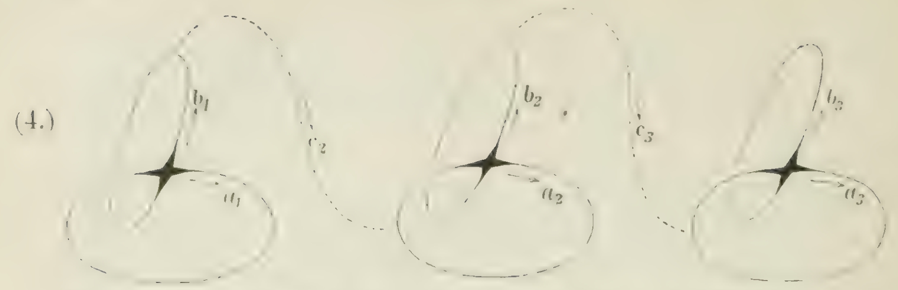
Zusammenfassung. — Wir können bei dem ganz zuerst ausgeführten sigmaförmigen Querschnitt $(c_1 + a_1)$ die Länge von c_1 beliebig klein, z. B. auch Null machen. Alsdann haben wir im Ganzen sechs Querschnitte:

$$\begin{array}{lll} & 1)\quad a_1, & 2)\ b_1, \\ (3.) & 3)\ c_2 + a_2, & 4)\ b_2, \\ & 5)\ c_3 + a_3, & 6)\ b_3, \end{array}$$

deren Gestalt und relative Lage einigermassen veranschaulicht werden kann durch folgendes Schema:



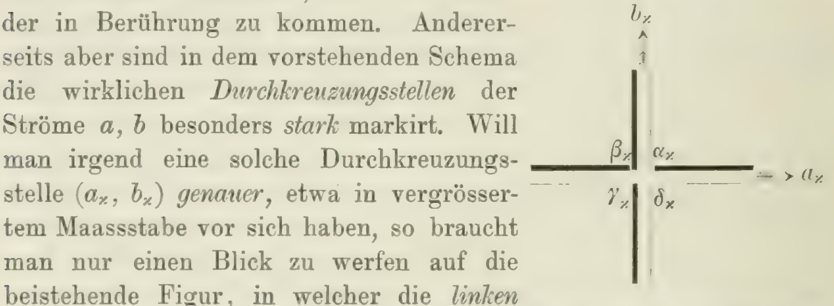
(4.)



Dabei sind, der bessern Uebersichtlichkeit willen, die Schnittstrecken c (d. i. c_2 und c_3) nur *punktirt* angegeben.

Man bemerkt in dem vorstehenden Schema gewisse Unterbrechungen der Schnitte oder Ströme b. Diese Unterbrechungen sollen andeuten, dass an den betreffenden Stellen zwischen den Strömen b und a *keine* Communication stattfindet, dass vielmehr die Ströme an jeder solchen Stelle in verschiedenen Blättern der Fläche über einander fortfliessen, ohne mit einander in Berührung zu kommen. Andererseits aber sind in dem vorstehenden Schema die wirklichen *Durchkreuzungsstellen* der Ströme a, b besonders *stark* markirt. Will man irgend eine solche Durchkreuzungsstelle $(a_\varkappa, b_\varkappa)$ *genauer*, etwa in vergrössertem Maassstabe vor sich haben, so braucht man nur einen Blick zu werfen auf die beistehende Figur, in welcher die *linken*

(5.)



Ufer der Ströme $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ durch *stärkere*, die rechten durch schwächere Linien angegeben sind. *Betrachtet man also diese Durchkreuzungsstelle $(a_\varkappa, b_\varkappa)$ als die gemeinsame Quelle der beiden Ströme $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, so liegt die anfängliche Richtung von $b_\varkappa$ zur anfänglichen Richtung von $a_\varkappa$ ebenso wie die y-Axe des Coordinatensystems zur x-Axe.* [Vgl. pg. 177].

Durch die sechs Querschnitte (3.) verwandelt sich nun also, wie vorhin gezeigt ist, die Fläche $\mathfrak{R}$ in eine Fläche $\mathfrak{R}^{(1)}$ von der Grundzahl 1, d. i. in eine *einfach zusammenhängende* Fläche.

§ 14.

Fortsetzung. Allgemeinster Fall.

Welche Beschaffenheit eine Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}$ auch besitzen mag, stets wird die Grundzahl $\dot{N}$ der zugehörigen punktirten Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$ [vgl. (4.) pg. 164] den Werth haben:

$$\dot{N} = 2p + 1, \tag{6.}$$

wo p eine Zahl aus der Reihe 0, 1, 2, 3, ... vorstellt.

In ganz analoger Weise, wie im vorhergehenden Paragraph, wird man nun die Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$ durch $2p$ Querschnitte:

$$\begin{array}{ll} 1) \quad a_1, & 2)\ b_1, \\ 3)\ c_2 + a_2, & 4)\ b_2, \\ 5)\ c_3 + a_3, & 6)\ b_3, \\ \dots\dots & \dots \\ 2p-1)\ c_p + a_p, & 2p)\ b_p, \end{array} \tag{7.}$$

in eine *einfach zusammenhängende* Fläche zu verwandeln im Stande sein.

Bemerkung. — Wir werden im Folgenden die Fläche $\mathfrak{R}$, je nachdem in ihr alle Schnitte a, b, c, oder nur die Schnitte a, b, oder nur die Schnitte a, oder endlich nur die Schnitte b ausgeführt gedacht werden sollen, respective mit $\mathfrak{R}_{abc}$, oder $\mathfrak{R}_{ab}$, oder $\mathfrak{R}_a$, oder $\mathfrak{R}_b$ bezeichnen. Die Fläche $\mathfrak{R}_a$ besitzt alsdann also p von einander getrennte Rückkehrschnitte $a_1, a_2, a_3 \dots a_p$. Analoges gilt von $\mathfrak{R}_b$.

Zweite Bemerkung. — Die hier angegebene Verwandlung der Fläche $\mathfrak{R}$ in eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}_{abc}$ ist genau dieselbe, welche *Riemann* ausgeführt hat [Ges. Werke pg. 122, 123].

Uebrigens hat Riemann an einer *früheren* Stelle seiner Abhandlung [Ges. Werke pg. 97] noch eine etwas *andere* Methode der Zerschneidung benutzt. Es werden nämlich dort Schnitte $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \dots \sigma_{2p}$ benutzt, deren jeder für sich allein betrachtet einen Rückkehrschnitt repräsentirt. Die beiden ersten, nämlich σ_1 und σ_2, sind identisch mit den vorhin besprochenen Schnitten a_1 und b_1. Es hat also z. B. σ_2 seinen Anfang und sein Ende in zwei einander gegenüberliegenden Uferpunkten des Schnittes σ_1. Desgleichen hat nun aber auch weiter σ_3 seinen Anfang und sein Ende in zwei einander gegenüberliegenden Uferpunkten von σ_2; sodann σ_4 seinen Anfang und sein Ende in zwei einander gegenüberliegenden Uferpunkten von σ_3; u. s. w. u. s. w.

§ 15.

Die Grundzahl einer geschlossenen Fläche.

Unserm Programme pg. 151 entsprechend, haben wir bis jetzt die *geschlossenen* Flächen von unserer Betrachtung *excludirt*, indem wir z. B. statt einer Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ jedesmal die zugehörige punktirte Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$ ins Auge fassten.

Wollen wir jetzt *nachträglich* auch der geschlossenen Fläche selber eine bestimmte Grundzahl zuertheilen, so ist die dabei zu befolgende Methode durch den Satz (23.) pg. 160 in deutlicher Weise

vorgezeichnet. Ist also z. B., wie in (6.), die Grundzahl $\dot{N}$ der punktirten Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$ mit

$$\dot{N} = 2p + 1 \tag{8.}$$

bezeichnet, so wird, zufolge jenes Satzes, die Grundzahl N der Fläche $\mathfrak{R}$ selber den Werth haben:

$$N = 2p. \tag{9.}$$

Wenn *Riemann* die Fläche $\mathfrak{R}$ selber eine $(2p+1)$fach zusammenhängende nennt, derselben also die Grundzahl $(2p+1)$ zuertheilt, so denkt er sich dabei jedesmal $\dot{\mathfrak{R}}$ statt $\mathfrak{R}$ *substituirt*, wie solches übrigens auch von ihm in deutlicher Weise hervorgehoben ist. Empfehlenswerther aber dürfte es vielleicht sein, eine solche stillschweigende Substitution zu vermeiden. Und dann ist die Fläche $\mathfrak{R}$ eine $2p$fach zusammenhängende zu nennen, ihre Grundzahl also $= 2p$ zu setzen.

Achtes Capitel.

Ueber Integrale mit veränderlicher Integrationscurve.

Die Untersuchungen dieses Capitels sollen nur eine Vorbereitung zum näheren Studium der *Abel'schen Integrale* sein, von denen im folgenden Capitel die Rede sein wird.

§ 1.

Integrale auf einer ebenen einblättrigen Fläche.

Sind $\varphi = \varphi(z)$ und $\psi = \psi(z)$ *gegebene* Functionen, so wird der Werth des Integrals

$$\int_{z_0}^{z} \varphi \, d\psi \tag{1.}$$

im Allgemeinen nicht nur von den beiden Endpunkten z_0, z der Integrationscurve, sondern auch von dem *Wege* derselben zwischen diesen beiden Punkten abhängen. Doch lassen sich Fälle angeben, in denen das Integral von dem genannten Wege *unabhängig ist*.

Und zwar stützen sich die hierbei anzustellenden Betrachtungen wesentlich auf den früher [pg. 23] gefundenen

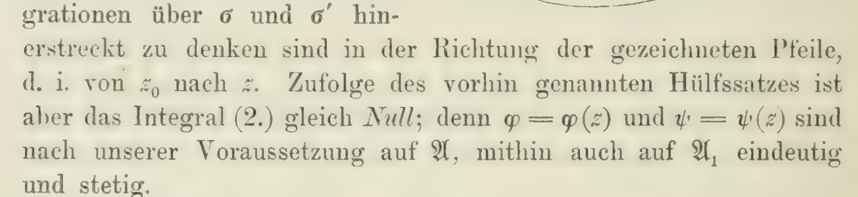
Hülfssatz: *Sind $\varphi = \varphi(z)$ und $\psi = \psi(z)$ auf irgend einem endlichen Theil $\mathfrak{A}$ der horizontalen z-Ebene eindeutig und stetig, so ist das über sämmtliche Randcurven von $\mathfrak{A}$ in positiver Richtung erstreckte Integral*

$$\int_{\mathfrak{A}} \varphi \, d\psi \tag{1a.}$$

stets $= 0$.

Um zu zeigen, dass der Werth des Integrals (1.) in gewissen Fällen von dem *Wege* der Integrationscurve *unabhängig* ist, wollen wir uns in der horizontalen z-Ebene irgend eine endliche Fläche $\mathfrak{A}$ mit nur *einer* Randcurve abgegrenzt denken, und annehmen, dass $\varphi = \varphi(z)$ und $\psi = \psi(z)$ auf dieser Fläche $\mathfrak{A}$ *eindeutig* und *stetig sind.* Markiren wir nun innerhalb $\mathfrak{A}$ irgend zwei Punkte z_0 und z, und ziehen wir sodann, ebenfalls innerhalb $\mathfrak{A}$, irgend zwei von z_0 nach z laufende Curven σ und σ', so bilden σ und σ' zusammen-

genommen einen Rückkehrschnitt der Fläche $\mathfrak{A}$, durch welchen dieselbe in zwei von einander getrennte Stücke $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zerfällt. Das über die Randcurve $(\sigma + \sigma')$ des Theiles $\mathfrak{A}_1$ erstreckte Integral



$$\int_{\mathfrak{A}_1} \varphi \, d\psi \tag{2.}$$

kann offenbar in zwei Theile zerlegt werden:

$$\int_{\mathfrak{A}_1} \varphi \, d\psi = \int_{\sigma} \varphi \, d\psi - \int_{\sigma'} \varphi \, d\psi, \tag{3.}$$

wo alsdann in den beiden Integralen rechter Hand die Integrationen über σ und σ' hinerstreckt zu denken sind in der Richtung der gezeichneten Pfeile, d. i. von z_0 nach z. Zufolge des vorhin genannten Hülfssatzes ist aber das Integral (2.) gleich *Null*; denn $\varphi = \varphi(z)$ und $\psi = \psi(z)$ sind nach unserer Voraussetzung auf $\mathfrak{A}$, mithin auch auf $\mathfrak{A}_1$ eindeutig und stetig.

Demgemäss ergiebt sich aus (3.):

$$\int_{\sigma} \varphi \, d\psi = \int_{\sigma'} \varphi \, d\psi. \tag{4.}$$

Diese Formel aber zeigt, dass das Integral

$$\int_{z_0}^{z} \varphi \, d\psi \tag{5.}$$

ein und denselben Werth hat, mag man nun der Integrationscurve den Weg σ oder den Weg σ' zuertheilen. Mit andern Worten: Sie zeigt, dass das Integral (5.) vom *Wege der* Integrationscurve *unabhängig* ist, falls man nur diesen Weg auf das Innere der gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ beschränkt. Also der Satz:

Es bezeichne $\mathfrak{A}$ eine in der z-Ebene abgegrenzte endliche Fläche mit nur einer Randcurve. Ferner seien $\varphi = \varphi(z)$ und $\psi = \psi(z)$ irgend zwei Functionen, die auf $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig sind. Versteht man alsdann unter

$$\int_{z_0}^{z} \varphi \, d\psi \tag{6.}$$

ein in seiner Bewegung auf die Fläche $\mathfrak{A}$ beschränktes Integral, d. i. ein Integral, dessen Integrationscurve $z_0 \ldots z$ beständig innerhalb $\mathfrak{A}$ bleiben soll, so wird der Werth dieses Integrals lediglich abhängen

von den beiden Endpunkten z_0 und z der Integrationscurve, hingegen unabhängig sein von dem Wege der Curve zwischen diesen beiden Punkten.

Bemerkung. — Bei Ableitung der Formel (4.) ist stillschweigend vorausgesetzt, dass die beiden Curven σ und σ' einander *nicht* durchkreuzen. Doch sieht man leicht, dass die Formel (4.) von dieser Voraussetzung *unabhängig* ist.

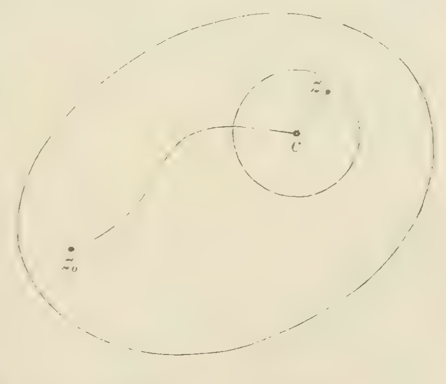
Sind nämlich σ und σ' zwei einander in einem oder auch in mehreren Punkten durchschneidende Curven, so wird man eine dritte Curve ϱ zu Hülfe nehmen, welche ebenfalls von z_0 nach z geht, ebenfalls ihrem ganzen Laufe nach innerhalb $\mathfrak{A}$ bleibt, und welche ausserdem weder mit σ noch auch mit σ' sich irgendwo durchkreuzt. Sodann wird sich sofort nachweisen lassen, dass das längs ϱ hinerstreckte Integral mit dem längs σ hinerstreckten gleichwerthig ist, und dass es ebenso auch gleichwerthig ist mit dem über σ' hin ausgedehnten Integrale. Daraus aber folgt sofort, dass die auf σ und σ' hinlaufenden Integrale auch unter einander gleichwerthig sind. *Q. e. d.*

Zufolge des Satzes (6.) ist das Integral (6.) lediglich abhängig von z_0 und z, also eine *eindeutige* Function von z_0 und z, oder falls man den Punkt z_0 als fest betrachtet, eine *eindeutige* Function von z allein. Demgemäss mag dasselbe mit $F(z)$ bezeichnet werden:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi \, d\psi \quad [\mathfrak{A}]. \tag{7.}$$

Dabei soll das in Klammern beigefügte $\mathfrak{A}$ andeuten, dass das Integral in seiner Bewegung *auf die Fläche* $\mathfrak{A}$ *beschränkt* zu denken ist. Leicht lässt sich nun zeigen, dass diese Function $F(z)$ auf $\mathfrak{A}$ nicht nur eindeutig, sondern auch *stetig* ist.

Zu diesem Zwecke markire man innerhalb $\mathfrak{A}$ einen beliebigen Punkt c, beschreibe um c eine Kreisfläche $\mathfrak{C}$, und bezeichne irgend einen variablen Punkt innerhalb $\mathfrak{C}$ mit z. Um nun den Werth der eindeutigen Function $F(z)$, (7.), in diesem Punkte z zu erhalten, kann man eine Integrationscurve anwenden, die zuerst von z_0 nach c, und sodann von c nach z geht, dabei aber stets innerhalb $\mathfrak{A}$ bleibt. In solcher Weise ergiebt sich:



$$F(z) = \int_{z_0}^{c} \varphi \, d\psi + \int_{c}^{z} \varphi \, d\psi, \tag{8.}$$

oder, was dasselbe ist:

$$F(z) = F(c) + \int\limits_c^z \varphi\, d\psi. \tag{9.}$$

Nun sollen φ und ψ auf $\mathfrak{A}$, mithin auch auf $\mathfrak{C}$ *eindeutig und stetig* sein. Gleiches gilt daher [Satz (15.) pg. 23] z. B. auch von dem Product

$$\varphi \frac{d\psi}{dz}.$$

Demgemäss ist dieses Product innerhalb des um c beschriebenen Kreises $\mathfrak{C}$ darstellbar durch die Taylor'sche Entwicklung [p. 34]:

$$\varphi \frac{d\psi}{dz} = A + B(z - c) + C(z - c)^2 + \ldots,$$

wo A, B, C, ... constante Coefficienten vorstellen. Hieraus folgt, falls man mit dz multiplicirt:

$$\varphi\, d\psi = [A + B(z - c) + C(z - c)^2 + \ldots]\, dz.$$

Substituirt man diesen Werth von $\varphi\, d\psi$ in die Formel (9.), so erhält man:

$$F(z) = F(c) + A\frac{(z - c)}{1} + B\frac{(z - c)^2}{2} + C\frac{(z - c)^3}{3} + \cdots \tag{10.}$$

Diese für alle Punkte z der Kreisfläche $\mathfrak{C}$ gültige Formel zeigt aber, dass $F(z)$ innerhalb dieser Kreisfläche $\mathfrak{C}$ d. i. im Bereich des Punktes c *stetig* ist. Beachtet man also, dass c einen innerhalb $\mathfrak{A}$ ganz *willkürlichen* Punkt repräsentirt, so gelangt man zu folgendem Resultat:

Versteht man unter $\mathfrak{A}$ eine in der z-Ebene abgegrenzte endliche Fläche mit nur einer Randcurve, ferner unter $\varphi = \varphi(z)$ und $\psi = \psi(z)$ zwei Functionen, die auf $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig sind, und denkt man sich überdies innerhalb $\mathfrak{A}$ irgend einen festen Punkt z_0 markirt, so wird das von z_0 ausgehende und in seiner Bewegung auf die Fläche $\mathfrak{A}$ beschränkte Integral

$$\int\limits_{z_0}^z \varphi\, d\psi \quad [\mathfrak{A}] \tag{11.}$$

eine Function von z sein, die innerhalb $\mathfrak{A}$ überall eindeutig und stetig ist.

Die hier abgeleiteten Sätze sind *nicht* mehr gültig für eine Fläche $\mathfrak{A}$ mit *zwei* Randcurven, z. B. nicht mehr gültig für eine von zwei concentrischen Kreisen begrenzte ringförmige Fläche $\mathfrak{A}$. Versucht man nämlich in diesem Fall den analogen Weg, wie vorhin, einzuschlagen, markirt man also innerhalb dieser ringförmigen Fläche

$\mathfrak{A}$ zwei Punkte z_0 und z, und zwei von z_0 nach z gehende Wege σ und σ', so können z_0, z, σ, σ' möglicher Weise derart liegen, dass σ und σ' zusammengenommen einen zu jenen beiden Randkreisen concentrischen, intermediären Kreis bilden. Durch diesen Kreis $(\sigma + \sigma')$ zerfällt alsdann die Fläche $\mathfrak{A}$ in zwei Theile $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, der Art, dass $\mathfrak{A}_1$ von $(\sigma + \sigma')$ und dem *innern* Randkreise, andererseits $\mathfrak{A}_2$ von $(\sigma + \sigma')$ und dem *äussern* Randkreise begrenzt ist. Und demgemäss ist z. B. die Formel (3.), welche ein wesentliches Glied der früheren Betrachtung bildete, im gegenwärtigen Fall *nicht* mehr richtig. U. s. w.

Trotzdem aber sind jene früheren Untersuchungen auch auf eine Fläche $\mathfrak{A}$ mit *zwei* Randcurven anwendbar, falls man nur eine sich leicht darbietende *Modification* eintreten lässt. Eine solche in der z-Ebene abgegrenzte Fläche $\mathfrak{A}$ mit *zwei* Randcurven kann nämlich, mittelst eines von der innern zur äussern Randcurve gehenden Querschnitts q, in eine Fläche $\mathfrak{A}_q$ verwandelt werden, die nur noch *eine* Randcurve besitzt [vgl. den ersten Fall pg. 161]. Und demgemäss sind auf diese neue Fläche $\mathfrak{A}_q$ die vorhin angestellten Betrachtungen ohne Weiteres anwendbar. Man gelangt daher z. B., was den Satz (11.) betrifft, im gegenwärtigen Fall zu folgendem analogen Satz:

Versteht man unter $\mathfrak{A}$ eine in der z-Ebene abgegrenzte endliche Fläche mit zwei Randcurven, ferner unter $\varphi = \varphi(z)$ und $\psi = \psi(z)$ zwei auf $\mathfrak{A}$ eindeutige und stetige Functionen, denkt man sich ferner die Fläche $\mathfrak{A}$ mittelst eines von der innern zur äussern Randcurve laufenden Querschnitts q in eine Fläche $\mathfrak{A}_q$ verwandelt, die nur noch eine Randcurve besitzt, und markirt man überdies innerhalb $\mathfrak{A}_q$ irgend einen festen Punkt z_0, so wird das von z_0 ausgehende und in seiner Bewegung auf $\mathfrak{A}_q$ beschränkte Integral

$$\int_{z_0}^{z} \varphi\, d\psi \quad [\mathfrak{A}_q] \tag{12.}$$

eine Function von z sein, die innerhalb $\mathfrak{A}_q$ überall eindeutig und stetig ist.

Es bleibt noch übrig, die Werthe zu untersuchen, welche die durch dieses Integral definirte Function $F(z)$:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi\, d\psi \quad [\mathfrak{A}_q] \tag{13.}$$

zu beiden Ufern des Querschnitts q besitzt. Sind λ und λ' irgend

zwei Punkte am *linken* Ufer von q, und ϱ und ϱ' die gegenüberliegenden Punkte am *rechten* Ufer von q, so erhält man aus (13.) z. B. für den Werth $F(\lambda')$ die Formel

$$F(\lambda') = \int_{z_0}^{\lambda'} \varphi\, d\psi \quad [\mathfrak{A}_q],$$

wo die Integrationscurve von z_0 nach λ' jeden beliebigen innerhalb $\mathfrak{A}_q$ bleibenden Weg einschlagen darf. Demgemäss kann man diese Curve z. B. von z_0 zunächst nach λ, und von hier aus, längs des linken Ufers von q, nach λ' gehen lassen [vgl. die beistehende Figur]. Alsdann erhält man:

$$F(\lambda') = \int_{z_0}^{\lambda} \varphi\, d\psi + \int_{\lambda}^{\lambda'} \varphi\, d\psi,$$

also mit Rücksicht auf (13.):

$$F(\lambda') = F(\lambda) + \int_{\lambda}^{\lambda'} \varphi\, d\psi. \tag{14.}$$

In gleicher Weise ergiebt sich [vgl. wiederum die beistehende Figur] die analoge Formel:

$$F(\varrho') = F(\varrho) + \int_{\varrho}^{\varrho'} \varphi\, d\psi. \tag{15.}$$

Da nun $\varphi = \varphi(z)$ und $\psi = \psi(z)$, [nach unserer Voraussetzung], nicht nur auf $\mathfrak{A}_q$, sondern auch auf der ursprünglichen Fläche $\mathfrak{A}$ überall eindeutig und stetig sind, so werden die beiden Integrale in (14.) und (15.) offenbar einander *gleich* sein. Demgemäss ergiebt sich aus (14.) und (15.) durch Subtraction:

$$F(\lambda') - F(\varrho') = F(\lambda) - F(\varrho). \tag{16.}$$

Also der Satz: *Bezeichnet man die Werthe, welche das Integral* (12.):

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi\, d\psi \quad [\mathfrak{A}_q] \tag{17.}$$

in irgend zwei am linken und rechten Ufer des Querschnitts q einander gegenüberliegenden Punkten λ und ϱ besitzt, mit $F(\lambda)$ und $F(\varrho)$, und die Differenz dieser beiden Werthe mit Δ:

$$\Delta = F(\lambda) - F(\varrho), \tag{18.}$$

so wird Δ längs des Querschnittes q constant sein.

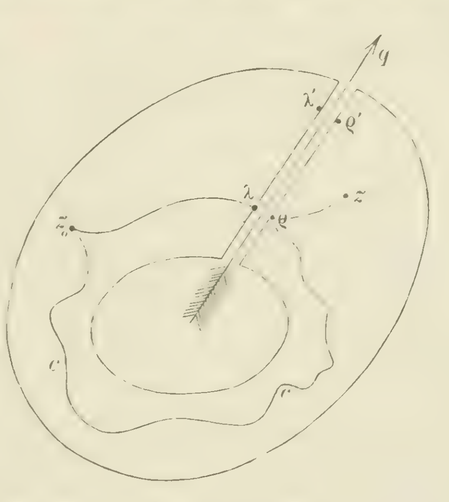
Ebenso wie das Integral

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi \, d\psi \quad [\mathfrak{A}_q] \tag{19.}$$

in seiner Bewegung auf $\mathfrak{A}_q$ beschränkt ist, ebenso mag jetzt unter

$$\mathfrak{F}(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi \, d\psi \quad [\mathfrak{A}] \tag{20.}$$

ein in seiner Bewegung nur auf $\mathfrak{A}$ *selber* beschränktes Integral verstanden werden; wie solches in der Formel angedeutet ist durch das in Klammern beigefügte $\mathfrak{A}$. Während also das Integral $F(z)$ den Querschnitt q niemals überschreiten darf, sollen dem neuen Integral $\mathfrak{F}(z)$ derartige Ueberschreitungen beliebig oft und an beliebigen Stellen gestattet sein.



Wir betrachten das Integral $\mathfrak{F}$ in einem Augenblick, wo seine Integrationscurve $z_0 \ldots z$ den Querschnitt q erst *einmal*, und zwar an der Stelle $\lambda\varrho$, vom linken zum rechten Ufer überschritten hat [vgl. die beistehende Figur]. Der augenblickliche Werth des Integrals $\mathfrak{F}(z)$ kann alsdann, entsprechend den beiden Theilen $z_0\lambda$ und ϱz der genannten Curve, ebenfalls in zwei Theile zerlegt werden:

$$\mathfrak{F}(z) = \int_{z_0}^{\lambda} \varphi \, d\psi + \int_{\varrho}^{z} \varphi \, d\psi, \tag{21.}$$

eine Formel, die mit Rücksicht auf (19.) auch so geschrieben werden darf:

$$\mathfrak{F}(z) = F(\lambda) + \int_{\varrho}^{z} \varphi \, d\psi. \tag{22.}$$

Das hier auftretende von ϱ nach z erstreckte Integral kann aber ebenfalls durch F ausgedrückt werden. Will man nämlich den Werth von F im Punkte z haben [vgl. die vorstehende Figur], so kann man zu diesem Zweck irgend eine beliebige innerhalb $\mathfrak{A}_q$ bleibende und von z_0 nach z laufende Integrationscurve, also z. B.

die Curve $z_0 c c \varrho z$ anwenden, und erhält in solcher Weise:

$$F(z) = \int_{z_0}^{\varrho} \varphi\, d\psi + \int_{\varrho}^{z} \varphi\, d\psi,$$

wo unter $z_0 \varrho$ die Curve $z_0 c c \varrho$ zu verstehen ist [vgl. die Figur]. Diese letzte Formel kann daher mit Rücksicht auf (19.) auch so geschrieben werden:

$$F(z) = F(\varrho) + \int_{\varrho}^{z} \varphi\, d\psi.$$

Substituirt man aber den hieraus für das Integral

$$\int_{\varrho}^{z} \varphi\, d\psi$$

sich ergebenden Werth in (22.), so erhält man:

$$\mathfrak{F}(z) = [F(\lambda) - F(\varrho)] + F(z), \tag{23.}$$

oder mit Rücksicht auf (18.):

$$\mathfrak{F}(z) = \Delta + F(z). \tag{24.}$$

Dieses Resultat kann man leicht auf den Fall erweitern, dass der Querschnitt q von der Bahn des Integrals $\mathfrak{F}(z)$ *beliebig oft* überschritten wird. Man gelangt so zu folgendem Satz:

Hält man fest an den in (12.), (17.), (18.) *eingeführten Bezeichnungen, und versteht man überdies unter*

$$\mathfrak{F}(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi\, d\psi \quad [\mathfrak{A}] \tag{25.}$$

das in seiner Bewegung auf die ursprüngliche Fläche $\mathfrak{A}$ beschränkte Integral, so wird dieses $\mathfrak{F}(z)$ eine u n e n d l i c h v i e l d e u t i g e Function von z sein. Doch werden die unendlich vielen Werthe, welche $\mathfrak{F}(z)$ in einem gegebenen Punkte z besitzt, von der daselbst eindeutigen Function $F(z)$ immer nur um ganze Vielfache der Constante Δ verschieden sein.

Markirt man nämlich innerhalb $\mathfrak{A}$ einen beliebigen Punkt z, und lässt man die Integrationscurve des Integrals $\mathfrak{F}(z)$, während sie von z_0 nach z läuft, den Querschnitt q im Ganzen l-mal vom linken zum rechten, und r-mal vom rechten zum linken Ufer überschreiten, so wird der bei Anwendung dieser Integrationscurve für $\mathfrak{F}(z)$ sich ergebende Werth zu $F(z)$ in der Beziehung stehen:

$$\mathfrak{F}(z) = F(z) + (l - r)\Delta, \tag{26.}$$

wo Δ die in (18.) *definirte Constante vorstellt.*

Setzt man insbesondere $l = 1$ und $r = 0$, so erhält man den in (24.) betrachteten Specialfall.

Beispiel. — Ein einfaches Beispiel für die hier angestellten Betrachtungen gewährt das Integral:

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z}.$$

Die hier auftretenden Functionen $\varphi = \frac{1}{z}$ und $\psi = z$ sind *eindeutig* und *stetig* auf einer ringförmigen Fläche $\mathfrak{A}$, die von irgend zwei um den Anfangspunkt $z = 0$ beschriebenen Kreisperipherien begrenzt ist.

Ohne näher auf diesen Gegenstand einzugehen, sei nur bemerkt, dass die Constante Δ (18.) im gegenwärtigen Fall $= -2\pi i$, und $\mathfrak{F}(z)$ identisch mit $\log z$ wird.

§ 2.

Ueber Integrale auf einer mehrblättrigen Riemann'schen Kugelfläche.

Es sei eine Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}$ in ganz beliebiger Weise gegeben, mit beliebig vielen Blättern, Windungspunkten und Uebergangslinien. Ferner sei $\mathfrak{S}$ irgend ein Theil von $\mathfrak{R}$. Endlich seien $\varphi = \varphi(z)$ und $\psi = \psi(z)$ zwei Functionen, die auf $\mathfrak{S}$ *eindeutig* und *stetig* sind. Alsdann kann das *positiv* über den Rand von $\mathfrak{S}$ erstreckte Integral

$$\int_{\mathfrak{S}} \varphi\, d\psi,$$

falls man $\mathfrak{S}$ in kleine Stücke $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots \mathfrak{U}_q$ zerlegt, auch so dargestellt werden:

$$\int_{\mathfrak{S}} \varphi\, d\psi = \int_{\mathfrak{U}_1} \varphi\, d\psi + \int_{\mathfrak{U}_2} \varphi\, d\psi + \ldots + \int_{\mathfrak{U}_q} \varphi\, d\psi, \tag{1.}$$

oder, falls man diese Stücke in ihre *natürlichen* Zustände $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_q$ versetzt, auch so:

$$\int_{\mathfrak{S}} \varphi\, d\psi = \int_{\mathfrak{A}_1} \varphi\, d\psi + \int_{\mathfrak{A}_2} \varphi\, d\psi + \ldots + \int_{\mathfrak{A}_q} \varphi\, d\psi. \tag{2.}$$

Da nun φ und ψ auf $\mathfrak{S}$, mithin z. B. auch auf $\mathfrak{U}_\varkappa$ und $\mathfrak{A}_\varkappa$ eindeutig und stetig sind, so ergiebt sich [mittelst des Hülfssatzes pg. 187] sofort:

$$\int_{\mathfrak{A}_\varkappa} \varphi\, d\psi = 0;$$

und folglich aus (2.):

$$\int_{\mathfrak{S}} \varphi\, d\psi \text{ ebenfalls } = 0. \tag{3.}$$

Also der Satz: *Sind $\varphi = \varphi(z)$ und $\psi = \psi(z)$ auf irgend einem Theil $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und stetig, so wird das in positiver Richtung über den Rand von $\mathfrak{S}$ erstreckte Integral*

$$\int_{\mathfrak{S}} \varphi d\psi \text{ stets } = 0 \tag{4.}$$

sein. Besitzt $\mathfrak{S}$ mehrere Randcurven, so ist selbstverständlich dies Integral in Wirklichkeit eine Summe von mehreren Integralen.

Auf der Fläche $\mathfrak{R}$ sei irgend ein *fester Punkt* z_0 markirt. Das von z_0 aus auf der Fläche $\mathfrak{R}$ längs einer *beliebigen Curve* fortschreitende und schliesslich bis zu irgend einem Punkte z vordringende Integral von $\varphi d\psi$ mag mit

$$\int_{z_0}^{z} \varphi d\psi, \tag{5.}$$

oder, falls jene Curve irgend welche bestimmte Gestalt σ besitzen soll, mit

$$\int_{z_0}^{z} \varphi d\psi\ [\sigma], \text{ oder auch mit } \int_{\sigma} \varphi d\psi \tag{6.}$$

bezeichnet werden. Dabei ist unter jener Curve stets die Bahn eines Punktes zu verstehen, der seine Lage auf $\mathfrak{R}$ Schritt für Schritt in *stetiger* Weise ändert. Es wird also diese Curve z. B. aus einem Blatt der Fläche $\mathfrak{R}$ in ein anderes immer nur beim Passiren einer Uebergangslinie gelangen können. [Vgl. (2.) pg. 66.]

Denkt man sich auf $\mathfrak{R}$ irgend einen *Flächentheil* $\mathfrak{S}$ abgegrenzt, ferner den festen Punkt z_0 innerhalb $\mathfrak{S}$ gelegen, und soll das Integral (5.), was die Bewegung seiner Integrationscurve $z_0 \ldots z$ betrifft, auf den Flächentheil $\mathfrak{S}$ beschränkt werden, soll also die genannte Curve innerhalb $\mathfrak{S}$ sich beliebig bewegen, den Rand von $\mathfrak{S}$ aber niemals überschreiten dürfen, so mag das Integral, um solches anzudeuten, mit

$$\int_{z_0}^{z} \varphi d\psi \quad [\mathfrak{S}] \tag{7.}$$

bezeichnet werden. Alsdann ergiebt sich leicht ein den Sätzen pg. 190 und 191 analoger Satz, der folgendermassen lautet:

Versteht man unter $\mathfrak{S}$ irgend einen einfach zusammenhängenden Theil der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$, ferner unter $\varphi = \varphi(z)$ und $\psi = \psi(z)$ zwei auf $\mathfrak{S}$ eindeutige und stetige Functionen, endlich unter z_0 einen innerhalb $\mathfrak{S}$ markirten festen Punkt, so wird das von z_0 ausgehende und in seiner Bewegung auf $\mathfrak{S}$ beschränkte Integral

(8.)
$$\int_{z_0}^{z} \varphi d\psi \quad [\mathfrak{S}]$$

eine Function von z sein, welche auf $\mathfrak{S}$ allenthalben eindeutig und stetig ist.

Beweis. — Zieht man, von z_0 aus, nach einem ebenfalls *innerhalb* $\mathfrak{S}$ liegenden Punkte z irgend zwei *innerhalb* $\mathfrak{S}$ bleibende Curven σ und σ', so bilden σ und σ' zusammengenommen einen *Rückkehrschnitt* der Fläche $\mathfrak{S}$.

$\mathfrak{S}$ ist aber nach unserer Voraussetzung *einfach zusammenhängend*, und zerfällt daher [Satz (7.) pg. 151] durch diesen Rückkehrschnitt $(\sigma + \sigma')$ in zwei getrennte Stücke $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$, von denen das *eine* $\mathfrak{S}_1$ nur von $(\sigma + \sigma')$ begrenzt ist, während das *andere* $\mathfrak{S}_2$ theils von der Curve $(\sigma + \sigma')$, theils vom ursprünglichen Rande der Fläche $\mathfrak{S}$ begrenzt sein wird. Demgemäss ergiebt sich für das *positiv* über den Rand von $\mathfrak{S}_1$ erstreckte Integral

(α.)
$$\int_{\mathfrak{S}_1} \varphi d\psi$$

die Formel:

(β.)
$$\pm\int_{\mathfrak{S}_1} \varphi d\psi = \int_{\sigma} \varphi d\psi - \int_{\sigma'} \varphi d\psi,$$

die Integrationen über σ und σ' hinerstreckt gedacht von z_0 nach z. [Vgl. die analogen und mehr anschaulichen Betrachtungen auf pg. 188.] Nach unserer Voraussetzung sollen aber $\varphi = \varphi(z)$ und $\psi = \psi(z)$ auf $\mathfrak{S}$, mithin auch auf $\mathfrak{S}_1$ *eindeutig und stetig* sein. Zufolge (4.) ist daher das Integral (α.) gleich *Null*; sodass also die Formel (β.) übergeht in:

(γ.)
$$\int_{\sigma} \varphi d\psi = \int_{\sigma'} \varphi d\psi.$$

Hiermit aber ist bewiesen, dass der Werth des Integrals (8.) in irgend einem Punkte z stets *ein und denselben* Werth annimmt, welchen Weg man seiner Integrationscurve von z_0 nach z auch zuertheilen mag.

Der Werth des Integrals (8.) ist also eine *eindeutige* Function von z. Dass derselbe gleichzeitig auch eine *stetige* Function von z ist, ergiebt sich unmittelbar aus der vorausgesetzten Stetigkeit der beiden Functionen φ und ψ.

Neuntes Capitel.

Die allgemeinen Eigenschaften der Abel'schen Integrale.

§ 1.

Untersuchung der Abel'schen Integrale in ihrer ursprünglichen, unbestimmten Form.

Ein Integral von der Form

$$\int \varphi(z) dz \tag{1.}$$

wird bekanntlich, falls die Function $\varphi(z)$ gewissen Bedingungen entspricht, ein *Abel'sches Integral* genannt. Und zwar kann man dabei jene von der Function $\varphi(z)$ zu erfüllenden Bedingungen in doppelter Weise formuliren.

Man kann entweder sagen: *Die Function $\varphi = \varphi(z)$ soll definirt sein durch eine Gleichung:*

$$Z_0 + Z_1\varphi + Z_2\varphi^2 + \ldots + Z_n\varphi^n = 0,$$

deren Coefficienten Z_0, Z_1, Z_2, ... Z_n rationale Functionen von z sind. Dies würde der ursprünglichen Abel'schen Anschauungsweise entsprechen.

Oder aber man kann sagen: *Die Function $\varphi = \varphi(z)$ soll auf irgend einer Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ regulär, d. i. daselbst eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig sein.*

In der That sind beide Bedingungen unter einander äquivalent. Denn entspricht eine Function $\varphi = \varphi(z)$ der ersten Bedingung, so entspricht sie auch der zweiten [vgl. (1.), (2.) pg. 94 und namentlich auch (10.) pg. 145]. Und entspricht umgekehrt die Function der zweiten Bedingung, so wird sie nothwendiger Weise auch der ersten entsprechen [vgl. pg. 122].

Wir wollen nun bei den weiteren Betrachtungen den *Riemann*schen Weg verfolgen, also der *zweiten* Definition den Vorzug geben. Und demgemäss wollen wir uns irgend eine Riemann'sche Kugel-

fläche $\mathfrak{R}$ in ganz beliebiger Weise gegeben denken, mit beliebig vielen Blättern, Windungspunkten und Uebergangslinien, und annehmen, die Function $\varphi = \varphi(z)$ sei auf dieser Fläche $\mathfrak{R}$ *regulär*, d. h. sie sei daselbst *eindeutig* und *bis auf einzelne Pole stetig*.

Um zuvörderst das sogenannte *unbestimmte* Integral

$$F = \int \varphi dz = \int \varphi(z) dz \tag{2.}$$

an irgend einer Stelle der Fläche $\mathfrak{R}$ näher zu untersuchen, markiren wir auf $\mathfrak{R}$ einen beliebigen Punkt c und bezeichnen das Bereich dieses Punktes in seinem ursprünglichen und natürlichen Zustande respective mit $\mathfrak{U}(c, z)$ und $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$. Auf der Fläche $\mathfrak{A}$ ist alsdann $\varphi = \varphi(z)$ darstellbar durch die Formel:

$$\varphi = \varphi(z) = (\zeta - \gamma)^{\mu} E(\zeta), \text{ [vgl. (15.) pg. 108].} \tag{α.}$$

Einer analogen Darstellung ist aber auch die Function $\psi = z$ fähig [vgl. (26.) pg. 114], und ebenso auch die Function $\Psi = \frac{dz}{d\zeta}$ [vgl. z. B. pg. 122]. Somit ergiebt sich:

$$\Psi = \frac{dz}{d\zeta} = (\zeta - \gamma)^{\mu_1} E_1(\zeta). \tag{β.}$$

Substituirt man aber diese Werthe (α.), (β.) in (2.), so folgt:

$$F = \int \varphi dz = \int \varphi \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = \int (\zeta - \gamma)^{\nu} \mathsf{E}(\zeta) d\zeta. \tag{3.}$$

Dabei bezeichnet $\nu = \mu + \mu_1$ [ebenso wie μ und μ_1 selber] eine *positive* oder *negative* ganze Zahl, und $\mathsf{E}(\zeta) = E(\zeta) E_1(\zeta)$ eine Function, die [ebenso wie $E(\zeta)$ und $E_1(\zeta)$] eindeutig, stetig und nichtverschwindend ist.

Man kann jetzt $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{A}$ nachträglich noch weiter verkleinern, und in solcher Art $\mathfrak{A}$ in eine um γ beschriebene Kreisfläche verwandeln. Alsdann ist $\mathsf{E}(\zeta)$ innerhalb $\mathfrak{A}$ in eine Taylor'sche Reihe entwickelbar:

$$\mathsf{E}(\zeta) = A_0 + A_1(\zeta - \gamma) + A_2(\zeta - \gamma)^2 + \dots ;$$

so dass man erhält:

$$F = \int [A_0(\zeta - \gamma)^{\nu} + A_1(\zeta - \gamma)^{\nu+1} + A_2(\zeta - \gamma)^{\nu+2} + \dots] d\zeta. \tag{4.}$$

Die Integration lässt sich jetzt sofort ausführen, wobei der Fall $\nu = -1$ besonders zu behandeln ist. Man übersieht sofort, dass der in solcher Weise für F resultirende Werth auf $\mathfrak{A}$ im Punkte γ, d. h. auf $\mathfrak{U}$ im Punkte c *endlich* oder *unendlich* ist, jenachdem $\nu = 0, 1, 2, 3$ etc. oder aber $= -1, -2, -3$ etc. ist; und gelangt in solcher Weise zu folgenden Sätzen:

Repräsentirt $\varphi = \varphi(z)$ *eine auf* $\mathfrak{R}$ *reguläre Function, so zerfallen sämmtliche Punkte der Fläche* $\mathfrak{R}$ *mit Bezug auf das unbestimmte Integral:*

$$F = \int \varphi dz \tag{5.}$$

in zwei Kategorien, nämlich erstens in die Endlichkeitspunkte von F, und zweitens in die Unendlichkeitspunkte von F.

Ist c ein Endlichkeitspunkt von F, so wird dieses F [nach Fixirung der Integrationsconstante] *im Bereich* $\mathfrak{U}(c, z)$ *oder* $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$ *des Punktes c darstellbar sein durch die Formel:*

$$F = (\text{eindeut., stetig. Funct. von } \zeta); \tag{6.}$$

woraus z. B. folgt:

$$\int_{\mathfrak{A}} dF = \int_{\mathfrak{U}} dF = \int_{\mathfrak{U}} \varphi dz = 0. \tag{7.}$$

Ist hingegen c ein Unendlichkeitspunkt von F, so wird dieses F [nach Fixirung seiner Integrationsconstante] *im Bereich* $\mathfrak{U}(c, z)$ *oder* $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$ *des Punktes c darstellbar sein durch die Formel:*

$$F = \left\{ \begin{array}{c} \mathsf{A} \log(\zeta - \gamma) + \left[\dfrac{\mathsf{B}^{(1)}}{\zeta - \gamma} + \dfrac{\mathsf{B}^{(2)}}{(\zeta - \gamma)^2} + \cdots + \dfrac{\mathsf{B}^{(h)}}{(\zeta - \gamma)^h}\right] \\ + (\text{eindeut., stetig. Function von } \zeta) \end{array} \right\}, \tag{8.}$$

wo A, $\mathsf{B}^{(1)}$, $\mathsf{B}^{(2)}$, ... $\mathsf{B}^{(h)}$ *constante Coefficienten vorstellen. Aus dieser Formel* (8.) *folgt sofort:*

$$\int_{\mathfrak{A}} dF = \int_{\mathfrak{U}} dF = \int_{\mathfrak{U}} \varphi dz = 2\pi i \mathsf{A}, \tag{9.}$$

die Integration [ebenso wie in (7.)] *positiv hinlaufend gedacht um das Bereich* $\mathfrak{A}$ *oder* $\mathfrak{U}$.

Bemerkung. — Riemann bezeichnet die in der Formel (8.) auftretende Function $(\zeta - \gamma)$ mit r [vgl. Riemann's Gesammelte Werke pg. 97], und sagt von derselben, sie sei eine Function von z, die in dem betrachteten Punkte c *unendlich klein von der ersten Ordnung* wird. Dies steht mit unserer Betrachtungsweise in vollem Einklang. In der That ist nämlich $(\zeta - \gamma)$ eine Function von z, die im Punkte c einen *Nullpunkt erster Ordnung* besitzt.

Sind *beide* Functionen $\varphi = \varphi(z)$ und $\psi = z$ im Punkte c d. h. auf $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{A}$ *stetig*, und ist also $\Psi = \frac{dz}{d\zeta}$ auf $\mathfrak{A}$ ebenfalls *stetig* [vgl. den Satz pg. 49], so wird das Integral

$$F = \int \varphi dz = \int \varphi \frac{dz}{d\zeta} d\zeta$$

daselbst gleichfalls *stetig* sein, wie sich solches z. B. leicht ergiebt mittelst der in (3.), (4.) angegebenen Betrachtungen. Demgemäss können die *Unendlichkeitspunkte* von F nur in solchen Punkten c

liegen, in denen die Functionen $\varphi = \varphi(z)$ und $\psi = z$ entweder beide, oder wenigstens eine derselben, *unstetig* sind. Mit andern Worten:

(10.) *Die Unendlichkeitspunkte von F sind entweder geradezu durch die Pole der Functionen $\varphi(z)$ und z, oder aber durch einen Theil dieser Pole dargestellt. Demgemäss können also die Unendlichkeitspunkte von F auf der Fläche $\mathfrak{R}$ immer nur vereinzelt vorkommen.*

Ist F im Punkte c unendlich, so wird F im Bereich dieses Punktes darstellbar sein durch die Formel (8.). Und für die Beschaffenheit dieser Formel sind die Werthe der daselbst auftretenden constanten Coefficienten A, $\mathsf{B}^{(1)}$, $\mathsf{B}^{(2)}$, ... $\mathsf{B}^{(h)}$ von charakteristischer Bedeutung. Sind z. B. $\mathsf{B}^{(1)}$, $\mathsf{B}^{(2)}$, ... $\mathsf{B}^{(h)}$ sämmtlich $= 0$, so geht die Formel über in:

$$F = \mathsf{A} \log (\zeta - \gamma) + (\text{eind. stetig. Funct. von } \zeta). \tag{11.}$$

In diesem Fall heisst c ein *logarithmischer Unendlichkeitspunkt*, oder genauer ausgedrückt ein *rein* logarithmischer Unendlichkeitspunkt.

Ist, um ein zweites Beispiel anzuführen, $\mathsf{A} = 0$, hingegen $\mathsf{B}^{(1)}$ von 0 verschieden, während $\mathsf{B}^{(2)}$, $\mathsf{B}^{(3)}$ ... $\mathsf{B}^{(h)}$ sämmtlich $= 0$ sind, so geht die Formel (8.) über in:

$$F = \frac{\mathsf{B}^{(1)}}{\zeta - \gamma} + (\text{eind. stetig. Funct. von } \zeta). \tag{12.}$$

In diesem Fall wird offenbar der Punkt c als ein *Pol* von F, und zwar als ein Pol *erster Ordnung* zu bezeichnen sein.

In der That kann man die Formel (12.), falls man die daselbst auftretende eindeutige und stetige Function mit $O(\zeta)$ bezeichnet, in die Gestalt versetzen:

$$F = (\zeta - \gamma)^{-1} [\mathsf{B}^{(1)} + (\zeta - \gamma) \cdot O(\zeta)].$$

Der hier in der eckigen Klammer enthaltene Ausdruck repräsentirt wiederum eine eindeutige und stetige Function von ζ, die überdies im Punkte γ den nach unserer Voraussetzung *von 0 verschiedenen* Werth $\mathsf{B}^{(1)}$ annimmt. Denkt man sich also das Bereich $\mathfrak{U}$ oder $\mathfrak{A}$ hinreichend klein, so repräsentirt jener in der eckigen Klammer enthaltene Ausdruck eine Function vom Charakter E; so dass man also erhält:

$$F = (\zeta - \gamma)^{-1} E. \text{ — Q. e. d.}$$

Ist ferner, um ein letztes Beispiel anzuführen, $\mathsf{A} = 0$, hingegen $\mathsf{B}^{(1)}$ von 0 verschieden, ebenso auch $\mathsf{B}^{(2)}$, während $\mathsf{B}^{(3)}$, $\mathsf{B}^{(4)}$, ... $\mathsf{B}^{(h)}$ sämmtlich $= 0$ sind, so geht die Formel (8.) über in:

$$F = \frac{\mathsf{B}^{(1)}}{\zeta - \gamma} + \frac{\mathsf{B}^{(2)}}{(\zeta - \gamma)^2} + (\text{eind. stetig. Funct. von } \zeta). \tag{13.}$$

Und in diesem Fall repräsentirt c [wie man leicht übersieht] einen *Pol zweiter Ordnung* von F.

Schliesslich wird der durch die allgemeine Formel (8.) charakterisirte Unendlichkeitspunkt c zu bezeichnen sein als ein *logarithmisch-polarer Unendlichkeitspunkt*, nämlich als die Superposition eines rein logarithmischen Unendlichkeitspunktes und eines polaren Unendlichkeitspunktes h^{ter} Ordnung.

§ 2.

Fortsetzung. Allgemeine Sätze über die Unendlichkeitspunkte der betrachteten Integrale.

Bezeichnet man sämmtliche Unendlichkeitspunkte, welche das Integral

$$F = \int \varphi \, dz \tag{14.}$$

auf irgend einem *Theil* $\mathfrak{S}$ der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ besitzt, mit c_1, $c_2, \ldots c_g$, so werden all' diese Punkte [zufolge des Satzes (10.)] in den Polen der Functionen $\varphi(z)$ und z liegen. Ausser $c_1, c_2, \ldots c_g$ können aber $\varphi(z)$ und z auf $\mathfrak{S}$ möglicher Weise noch *andere* Pole besitzen, welche $d_1, d_2, \ldots d_h$ heissen mögen. Bezeichnet man nun die Bereiche der genannten Punkte respective mit $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots \mathfrak{U}_g$ und $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_h$, und das nach Absonderung all' dieser Bereiche noch übrig bleibende Stück der Fläche $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{T}$:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{T} + (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 \ldots + \mathfrak{U}_g + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 \ldots + \mathfrak{B}_h),$$

so ist offenbar:

$$\int_{\mathfrak{S}} dF = \int_{\mathfrak{T}} dF + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=g} \int_{\mathfrak{U}_\varkappa} dF + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=h} \int_{\mathfrak{B}_\varkappa} dF. \tag{15.}$$

Nach (9.) ist aber:

$$\int_{\mathfrak{U}_\varkappa} dF = 2\pi i \, \mathsf{A}_\varkappa, \tag{$\alpha.$}$$

wo $\mathsf{A}_\varkappa$ dasjenige specielle A vorstellt, welches in der Entwicklung (8.) vorkommt, falls man dieselbe speciell auf den Punkt $c_\varkappa$ in Anwendung bringt.

Das $d_\varkappa$ ist, nach seiner Definition, ein *Endlichkeitspunkt* von F. Somit folgt aus (7.):

$$\int_{\mathfrak{B}_\varkappa} dF = 0. \tag{$\beta.$}$$

Nun ist ferner zu beachten, dass $c_1, c_2, \ldots c_g$ und $d_1, d_2, \ldots d_h$ zusammengenommen *sämmtliche* Pole der Functionen $\varphi(z)$ und z auf der Fläche $\mathfrak{S}$ repräsentiren. Demgemäss sind $\varphi(z)$ und z auf der aus $\mathfrak{S}$ durch Absonderung jener Punkte entstehenden Fläche $\mathfrak{T}$

ausnahmslos *eindeutig* und *stetig*; sodass sich also [mittelst des Satzes pg. 196 (4.)] die Formel ergiebt:

$$\int_{\mathfrak{T}} \varphi dz = 0,$$

d. i. die Formel:

$$(\gamma.) \qquad \int_{\mathfrak{T}} dF = 0.$$

Substituirt man schliesslich die Werthe $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$ in (15.), so erhält man:

$$(16.) \qquad \int_{\mathfrak{S}} dF = 2\pi i (\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \ldots + \mathsf{A}_g),$$

und gelangt also zu folgendem Satz:

Bezeichnet $\mathfrak{S}$ irgend einen Theil der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$, und hat das Integral

$$F = \int \varphi dz$$

auf $\mathfrak{S}$ im Ganzen g Unendlichkeitspunkte: $c_1, c_2, \ldots c_g$, so wird das über den Rand von $\mathfrak{S}$ positiv erstreckte Integral

$$(17.) \qquad \int_{\mathfrak{S}} dF = \int_{\mathfrak{S}} \varphi dz \quad \textit{stets} \quad = 2\pi i (\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \ldots + \mathsf{A}_g)$$

sein, wo $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots \mathsf{A}_g$ die Logarithmus-Coefficienten derjenigen Entwicklungen (8.) bezeichnen, durch welche F in jenen Punkten $c_1, c_2, \ldots c_g$ der Reihe nach dargestellt ist.

Hat also z. B. F auf $\mathfrak{S}$ gar keine Unendlichkeitspunkte oder lediglich polare Unendlichkeitspunkte, so ergiebt sich:

$$(18.) \qquad \int_{\mathfrak{S}} dF = \int_{\mathfrak{S}} \varphi dz = 0.$$

Lässt man den Flächentheil $\mathfrak{S}$ sich mehr und mehr ausdehnen, bis er schliesslich mit $\mathfrak{R}$ selber identisch wird, so *verschwindet* in diesem letzten Augenblick die Randcurve von $\mathfrak{S}$, mithin gleichzeitig auch der Werth des Integrals (17.); sodass man also zu folgendem Resultat gelangt:

Besitzt das Integral

$$F = \int \varphi dz$$

auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ im Ganzen q Unendlichkeitspunkte: $c_1, c_2, \ldots c_q$, und bezeichnet man die Logarithmus-Coefficienten des Integrals für diese Punkte der Reihe nach mit $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots \mathsf{A}_q$, so ist stets:

$$(19.) \qquad \mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \ldots + \mathsf{A}_q = 0.$$

Bezeichnet man unter diesen A's diejenigen, welche den *logarithmischen* und *logarithmisch-polaren* Unendlichkeitspunkten zuge-

hören, für den Augenblick mit $A^{(\lambda)}$, andererseits aber diejenigen, welche den *polaren* Unendlichkeitspunkten zugehören, mit $A^{(\pi)}$, so sind die $A^{(\pi)}$ sämmtlich $= 0$; so dass also die Formel (19.) sich reducirt auf

$$\Sigma A^{(\lambda)} = 0. \tag{19a.}$$

Von diesen Constanten $A^{(\lambda)}$ ist jedwede *von* 0 *verschieden*. Zufolge (19a.) muss daher die *Anzahl* dieser Constanten $A^{(\lambda)}$ entweder $= 0$, oder aber > 1 sein. Mit andern Worten:

(19b.) *Die Gesammtzahl der logarithmischen und logarithmisch-polaren Unendlichkeitspunkte, welche F auf $\mathfrak{R}$ besitzt, ist stets entweder $= 0$, oder aber > 1, niemals $= 1$. Ist insbesondere diese Anzahl $= 2$, sind also zwei solche Unendlichkeitspunkte vorhanden, so werden* [nach (19a.)] *die Logarithmus-Coefficienten in diesen beiden Punkten einander entgegengesetzte Werthe haben.*

Beispiel. — Die von uns gefundenen Sätze gelten für alle der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ entsprechenden Abel'schen Integrale, gelten also für jedwedes Integral

$$F = \int \varphi\, dz, \tag{α.}$$

falls nur $\varphi = \varphi(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function ist, und gelten daher z. B. auch für jedwedes Integral von der Form:

$$F = \int \frac{1}{f} \frac{df}{dz} dz = \int \frac{df}{f} = \int d \log f, \tag{β.}$$

falls nur $f = f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ *reguläre* Function vorstellt. Denn entspricht f dieser Voraussetzung, so werden die Ausdrücke $\frac{df}{dz}$ und $\frac{1}{f}\frac{df}{dz}$ derselben ebenfalls entsprechen [vgl. die Sätze (11.) pg. 124 und (24.) pg. 113].

Markirt man nun auf $\mathfrak{R}$ irgend einen *beliebigen* Punkt c, und bezeichnet das Bereich dieses Punktes mit $\mathfrak{U}(c, z)$ oder $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$, so wird die auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function f innerhalb $\mathfrak{A}$ darstellbar sein durch:

$$f = (\zeta - \gamma)^{\mu} E(\zeta), \quad \text{[vgl. (15.) pg. 108].} \tag{γ}$$

Dies in (β.) substituirt, ergiebt sich innerhalb $\mathfrak{A}$:

$$F = \int \frac{df}{f} = \mu \int \frac{d\zeta}{\zeta - \gamma} + \int \frac{1}{E} \frac{dE}{d\zeta} d\zeta. \tag{δ.}$$

Die Functionen E und $\frac{1}{E}$ sind auf $\mathfrak{A}$ eindeutig, stetig und nichtverschwindend; folglich sind $\frac{dE}{d\zeta}$ und $\frac{1}{E}\frac{dE}{d\zeta}$ auf $\mathfrak{A}$ *eindeutig und stetig* [Satz (15.) pg. 23]. Denkt man sich also $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{A}$ nachträglich noch weiter verkleinert, und in solcher Weise die Fläche $\mathfrak{A}$ in eine kleine um γ beschriebene Kreisfläche verwandelt, so wird die Function

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{d\zeta}$$

innerhalb $\mathfrak{A}$ entwickelbar sein in eine Taylor'sche Reihe:

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{d\zeta} = A_0 + A_1(\zeta - \gamma) + A_2(\zeta - \gamma)^2 + \ldots$$

Hieraus folgt:

$$\int \frac{1}{E}\frac{dE}{d\zeta}\, d\zeta = \text{Const.} + A_0\frac{\zeta - \gamma}{1} + A_1\frac{(\zeta - \gamma)^2}{2} + A_2\frac{(\zeta - \gamma)^3}{3} + \ldots$$

Somit folgt aus (δ.):

$$(\varepsilon.)\qquad F = \mu \log(\zeta - \gamma) + (\text{eindeut. stet. Funct. von } \zeta).$$

Diese für das Bereich $\mathfrak{U}$ oder $\mathfrak{A}$ des Punktes c oder γ gültigen Formeln (γ.), (δ.), (ε.) zeigen, dass μ die Ordnungszahl der regulären Function f im Punkte c bezeichnet, und dass das Integral F im Punkte c, jenachdem $\mu = 0$ oder von 0 verschieden ist, entweder *gar keinen* oder aber einen *rein logarithmischen* Unendlichkeitspunkt besitzt. Hieraus aber folgt, weil c einen ganz *beliebigen* Punkt der Fläche $\mathfrak{R}$ vorstellt, dass F auf der ganzen Fläche $\mathfrak{R}$ nur *rein logarithmische* Unendlichkeitspunkte besitzt, und dass diese ihrer Lage nach identisch sind mit den Polen und Nullpunkten der Function f. Ueberdies ergiebt sich aus (ε.), dass die jenen Unendlichkeitspunkten entsprechenden Logarithmus-Coefficienten des Integrals F identisch sind mit den dortigen Ordnungszahlen μ der Function f. Also der Satz:

Versteht man unter $f = f(z)$ irgend eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function [d. i. irgend eine Function, die auf $\mathfrak{R}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig ist], *so besitzt das Integral*

$$(\zeta.)\qquad F = \int \frac{df}{f} = \int d \log f$$

auf der Fläche $\mathfrak{R}$ nur rein logarithmische Unendlichkeitspunkte. Und zwar werden diese Punkte ihrer Lage nach identisch sein mit den Polen und Nullpunkten der Function f. Auch werden die Logarithmus-Coefficienten des Integrals F in diesen Unendlichkeitspunkten nichts Anderes sein, als die dortigen Ordnungszahlen der Function f.

Der Satz (19.) pg. 203 behauptet, dass die Summe der in Rede stehenden Logarithmus-Coefficienten $= 0$ sein muss. Er behauptet also, dass die Summe derjenigen Ordnungszahlen, welche die Function f in ihren Polen und Nullpunkten besitzt, $= 0$ sein müsse. Dies aber ist ein schon früher constatirter Satz [vgl. pg. 107].

§ 3.

Eintheilung der Abel'schen Integrale in solche erster, zweiter und dritter Gattung.

Erste Gattung. — Besitzt das Abel'sche Integral:

$$F = \int \varphi dz$$

auf der gegebenen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ *gar keine* Unendlichkeitspunkte, so heisst dasselbe ein Integral *erster Gattung*.

Zweite Gattung. — Besitzt das Abel'sche Integral:

$$F = \int \varphi dz$$

auf $\mathfrak{R}$ nur *polare* Unendlichkeitspunkte, so zählt dasselbe zur *zweiten Gattung*. Das einfachste unter all' solchen Integralen zweiter Gattung, das sogenannte *elementare* Integral zweiter Gattung, wird offenbar dasjenige sein, welches im Ganzen nur *einen* Unendlichkeitspunkt, und zwar einen polaren Unendlichkeitspunkt *erster Ordnung* besitzt. Bezeichnet man diesen Punkt mit c, und sein Bereich mit $\mathfrak{U}(c, z)$ respective $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$, so wird das Integral in diesem Bereich [vgl. (12.)] einen Werth besitzen von der Form:

$$F = \frac{\mathsf{B}}{\zeta - \gamma} + (\text{eindeut. stetig. Funct. von } \zeta),$$

wo B eine Constante vorstellt. Diese Constante kann, durch Multiplication des ganzen Integrals mit einem constanten Factor, stets auf 1 reducirt werden. Und demgemäss wollen wir den Begriff des *elementaren* Integrals zweiter Gattung in der That in der Weise genauer fixiren, dass wir festsetzen, *die seinem Unendlichkeitspunkt entsprechende Constante* B *solle stets* $= 1$ *sein.*

Dritte Gattung. — Besitzt das Abel'sche Integral:

$$F = \int \varphi dz$$

auf $\mathfrak{R}$ irgend welche *logarithmische* Unendlichkeitspunkte, so wird dasselbe — einerlei, ob gleichzeitig auch noch polare Unendlichkeitspunkte vorhanden sind, oder nicht — ein Abel'sches Integral *dritter Gattung* genannt. Das einfachste unter all' diesen Integralen dritter Gattung, das sogenannte *elementare* Integral dritter Gattung, ist dasjenige, welches im Ganzen nur *zwei* Unendlichkeitspunkte, und zwar zwei *rein logarithmische* Unendlichkeitspunkte besitzt. — Noch einfacher würde allerdings ein Integral mit nur *einem* solchen Punkte sein. Ein derartiges Integral ist aber unmöglich, zufolge des Satzes (19.), (19a, b.).

Zugleich ergiebt sich aus jenem Satz, dass bei einem elementaren Integral dritter Gattung die den beiden Unendlichkeitspunkten entsprechenden Logarithmus-Coefficienten *entgegengesetzte* Werthe haben müssen. Bezeichnet man also die beiden Unendlichkeitspunkte mit c_1, c_2 und die Bereiche derselben mit $\mathfrak{U}_1(c_1, z)$, $\mathfrak{U}_2(c_2, z)$ respective mit $\mathfrak{A}_1(\gamma_1, \zeta)$, $\mathfrak{A}_2(\gamma_2, \zeta)$, so wird das Integral in diesen Bereichen darstellbar sein durch die Formeln

$$F = -\mathsf{A} \log(\zeta - \gamma_1) + (\text{eind. stetig. Funct. von } \zeta),$$
$$F = +\mathsf{A} \log(\zeta - \gamma_2) + (\text{eind. stetig. Funct. von } \zeta),$$

wo A in beiden Formeln *dieselbe* Constante ist. Zur genaueren Fixirung eines solchen elementaren Integrals dritter Gattung mag festgesetzt werden, *dass diese Constante* A *stets* = 1 *sein soll.*

Beiläufige Betrachtung über die hyperelliptischen Integrale. — Die Function

$$(\alpha.) \qquad s = \sqrt{(z - c_1)(z - c_2) \ldots (z - c_{2n})}$$

kann [Satz (13.) pg. 83] in eindeutiger Weise ausgebreitet werden auf einer gewissen *zweiblättrigen* Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$, welche $2n$ Windungspunkte $c_1, c_2, \ldots c_{2n}$ und n Uebergangslinien $(c_1 c_2)$, $(c_3 c_4), \ldots (c_{2n-1} c_{2n})$ besitzt. Auch ist sie auf dieser Fläche $\mathfrak{R}$ überall stetig bis auf zwei bei $z = \infty$ übereinander liegende Pole.

Die Function s $(\alpha.)$ ist also auf $\mathfrak{R}$ *eindeutig* und *bis auf einzelne Pole stetig.* Gleiches gilt mithin [vgl. pg. 113, 114] auf $\mathfrak{R}$ auch von den Functionen

$$(\beta.) \qquad z, \quad z^q, \quad \frac{1}{s}, \quad \frac{z^q}{s},$$

falls man nämlich unter q eine *ganze Zahl* versteht. Demgemäss sind die Ausdrücke $(\alpha.)$, $(\beta.)$ als Functionen zu bezeichnen, die auf $\mathfrak{R}$ *regulär* sind. Setzt man also z. B.

$$(\gamma.) \qquad \varphi = \frac{z^q}{s} \quad \text{und} \quad F = \int \varphi \, dz,$$

so repräsentirt F ein der Fläche $\mathfrak{R}$ zugehöriges *Abel'sches Integral* [vgl. die Definition pg. 198]. Ob nun dieses Integral F erster, zweiter oder dritter Gattung ist, hängt lediglich ab von seinen Unendlichkeitspunkten. Diese Punkte sind daher weiter zu untersuchen.

Die Pole der Functionen φ und z liegen offenbar [vgl. $(\alpha.)$ und $(\gamma.)$]

$$(\delta.) \qquad \begin{cases} \text{in den Punkten } c_1, c_2, \ldots c_{2n}, \\ \text{und in den beiden Punkten } z = \infty. \end{cases}$$

Alle Unendlichkeitspunkte, welche das Integral F auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überhaupt besitzt, müssen daher nothwendiger Weise [Satz (10.) pg. 201] in diesen Punkten anzutreffen sein. Leicht lässt sich aber zeigen, dass, falls q eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots (n - 2)$ repräsentirt, diese Punkte $(\delta.)$ *keine* Unendlichkeitspunkte von F sind, und dass also in diesem Fall das Integral F auf der ganzen Fläche $\mathfrak{R}$ *gar keine* Unendlichkeitspunkte hat, mithin als ein Integral *erster Gattung* zu bezeichnen ist.

Beweis. — Bezeichnet man irgend einen der Punkte $c_1, c_2, \ldots c_{2n}$ mit c_j, und sein Bereich mit $\mathfrak{U}_j(c_j, z)$ oder $\mathfrak{A}_j(\gamma_j, \zeta)$, so ist offenbar:

$$z - c_j = (\zeta - \gamma_j)^2,$$

mithin
$$dz = 2(\zeta - \gamma_j)\,d\zeta.$$

Die Functionen s und $\frac{1}{s}$ sind auf $\mathfrak{R}$ regulär und besitzen im Punkte c_j oder (was dasselbe ist) im Punkte γ_j respective die Ordnungszahlen 1 und — 1 [vgl. pg. 111]. Demgemäss ist z. B. $\frac{1}{s}$ auf der Fläche $\mathfrak{U}_j$ oder $\mathfrak{A}_j$ darstellbar durch:

$$\frac{1}{s} = (\zeta - \gamma_j)^{-1} E(\zeta),$$

wo $E(\zeta)$ eine eindeutige, stetige und nichtverschwindende Function vorstellt. Aus diesen Formeln folgt sofort:

$$\varphi\,dz = \frac{z^q dz}{s} = [c_j + (\zeta - \gamma_j)^2]^q \,.\, 2E(\zeta)\,.\,d\zeta.$$

Hieraus aber folgt weiter, falls q eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, . . . vorstellt, mittelst des Cauchy-Taylor'schen Satzes:

$$\varphi\,dz = [A_0 + A_1(\zeta - \gamma_j) + A_2(\zeta - \gamma_j)^2 + \ldots]\,d\zeta,$$

wo die A's Constanten sind. Demgemäss besitzt also das Integral F in dem hier betrachteten Punkte c_j oder γ_j ($j = 1, 2, \ldots 2n$) *keinen* Unendlichkeitspunkt.

Betrachtet man ferner *einen* der beiden Punkte $z = \infty$, und bezeichnet das Bereich desselben mit $\mathfrak{U}(\infty, z)$ oder $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$, so ist offenbar

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{\infty} = (\zeta - \gamma)^1,$$

d. i.
$$z = (\zeta - \gamma)^{-1},$$

mithin
$$dz = -(\zeta - \gamma)^{-2}\,d\zeta.$$

Die auf $\mathfrak{R}$ regulären Functionen s und $\frac{1}{s}$ besitzen in dem betrachteten Punkte $z = \infty$ oder (was dasselbe ist) im Punkte γ respective die Ordnungszahlen $-n$ und $+n$ [vgl. pg. 111]. Demgemäss ist z. B. $\frac{1}{s}$ innerhalb $\mathfrak{U}$ oder $\mathfrak{A}$ darstellbar durch

$$\frac{1}{s} = (\zeta - \gamma)^n E(\zeta),$$

wo $E(\zeta)$ eine eindeutige, stetige und nichtverschwindende Function vorstellt. Aus diesen Formeln folgt nun sofort:

$$\varphi\,dz = \frac{z^q dz}{s} = (\zeta - \gamma)^{-q} \,.\, (-1)\,(\zeta - \gamma)^{n-2} \,.\, E(\zeta)\,.\,d\zeta.$$

Repräsentirt nun q eine der Zahlen 0, 1, 2, . . . $(n - 2)$, so wird der Exponent $[(n - 2) - q]$ stets positiv sein; sodass man also mittelst des Cauchy-Taylor'schen Satzes erhält:

$$\varphi\,dz = [B_0 + B_1(\zeta - \gamma) + B_2(\zeta - \gamma)^2 + \ldots]\,d\zeta,$$

wo die B's Constanten sind. Demgemäss besitzt also das Integral F in dem betrachteten Punkt $z = \infty$ oder $\zeta = \gamma$ *keinen* Unendlichkeitspunkt. *Q. e. d.*

Wir gelangen somit zu folgendem Satz: *Repräsentirt* $\mathfrak{R}$ *die zur eindeutigen Ausbreitung der Function*

$$(\varepsilon.) \qquad s = \sqrt{(z - c_1)(z - c_2)\dots(z - c_{2n})}$$

erforderliche zweiblättrige Riemann'sche Kugelfläche, und repräsentirt ferner q *eine der Zahlen* 0, 1, 2, ... $(n-2)$, *so wird das Integral*

$$(\xi.) \qquad F = \int^{s} \frac{z^q\, dz}{s}$$

stets ein der Fläche $\mathfrak{R}$ *zugehöriges Abel'sches Integral erster Gattung sein.*

§ 4.

Das Abel'sche Integral in seiner Erstreckung über irgend welche Curve.

Auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ mag irgend ein fester Punkt z_0 markirt sein. Das, vom Punkte z_0 aus, auf der Fläche $\mathfrak{R}$ längs einer *beliebigen Curve* fortschreitende und schliesslich bis zu irgend welchem Punkt z vordringende Abel'sche Integral mag kurzweg mit

$$(20.) \qquad \int_{z_0}^{z} \varphi\, dz,$$

oder, falls die gewählte Curve irgend welche bestimmte Gestalt σ besitzen soll, mit

$$(21.) \qquad \int_{z_0}^{z} \varphi\, dz\, [\sigma], \text{ respective mit } \int_{\sigma} \varphi\, dz$$

bezeichnet werden. Dabei ist unter der auf $\mathfrak{R}$ fortlaufenden Curve stets die Bahn eines Punktes zu verstehen, der seine Lage auf $\mathfrak{R}$ Schritt für Schritt in *stetiger* Weise ändert. Es wird also diese Curve z. B. aus *einem* Blatt der Fläche $\mathfrak{R}$ in ein *anderes* immer nur beim Passiren einer Uebergangslinie gelangen können. [Vgl. (2.) pg. 66.]

Bezeichnet c irgend einen Punkt der Fläche $\mathfrak{R}$, und $\mathfrak{U}$ das Bereich desselben, und soll das Verhalten des Integrals (20.) innerhalb dieses Bereiches $\mathfrak{U}$ untersucht werden, so markire man zuvörderst auf $\mathfrak{U}$ zwei Punkte: einen *festen* Punkt c_0 (der z. B. identisch mit c selber sein kann) und einen *variablen* Punkt z. Zieht man sodann eine auf $\mathfrak{R}$ von z_0 bis c_0 fortschreitende Curve σ_0, und eine auf $\mathfrak{U}$

von c_0 bis z fortschreitende Curve σ, so hat das Integral (20.) im Punkte z den Werth:

$$\int\limits_{z_0}^{z} \varphi\, dz = \int\limits_{z_0}^{c_0} \varphi\, dz\, |\sigma_0| + \int\limits_{c_0}^{z} \varphi dz\, |\sigma|.$$

Von den beiden Integralen rechter Hand wird das erste *constant*, $= C_0$ bleiben, so lange σ_0 ungeändert bleibt; während andererseits das zweite

$$= [F]_{c_0}^{z},$$

d. i. gleich der Differenz derjenigen beiden Werthe ist, welche das dem Bereich $\mathfrak{U}$ entsprechende (früher besprochene) *unbestimmte* Integral F in den beiden Punkten z und c_0 besitzt. Man erhält also:

$$\int\limits_{z_0}^{z} \varphi\, dz = C_0 + [F]_{c_0}^{z}. \tag{22.}$$

Lässt man also das Curven-Integral

$$\int\limits_{z_0}^{z} \varphi\, dz \tag{23.}$$

mittelst irgend welcher Integrationscurve in das Bereich $\mathfrak{U}$ *eines gegebenen Punktes c hineingelangen, und denkt man sich die diesem Bereich* $\mathfrak{U}$ *entsprechenden F-Werthe in bestimmter Weise fixirt, also daselbst durch eine der beiden Formeln* (6.), (8.) pg. 200 *ausgedrückt, — so werden die Werthe, welche jenes Curven-Integral in den einzelnen Punkten z des Bereiches* $\mathfrak{U}$ *annimmt, von diesen F-Werthen nur durch eine additive Constante verschieden sein. Diese Constante aber kann möglicher Weise sehr verschiedene Werthe haben, je nach dem Wege* σ_0, *auf welchem das Curven-Integral ursprünglich, von* z_0 *aus, in das Bereich* $\mathfrak{U}$ *hineingelangt ist.*

In Folge dieser Constanten ist also das Curven-Integral (23.) eine *vieldeutige* Function von z.

Man kann aber dasselbe, durch Beschränkung seiner Integrationscurve, in eine *eindeutige* Function von z verwandeln. Und zwar gelten in dieser Beziehung, falls man das sogenannte *unbestimmte* Integral nach wie vor mit F bezeichnet, folgende Sätze:

(24.) Erster Satz. — *Versteht man unter* $\mathfrak{S}$ *irgend einen einfach zusammenhängenden Theil der gegebenen Fläche* $\mathfrak{R}$, *setzt man ferner voraus, dass* $\mathfrak{S}$ *entweder gar keine oder doch nur polare Unendlichkeitspunkte von F enthält, und markirt man endlich innerhalb* $\mathfrak{S}$

irgend einen festen Punkt z_0, so wird das von z_0 ausgehende und in seiner Bewegung auf $\mathfrak{S}$ beschränkte Integral

$$\int_{z_0}^{z} \varphi \, dz \quad [\mathfrak{S}]$$

eine eindeutige Function von z sein. Diese eindeutige Function mag hinfort mit $F(z)$ bezeichnet werden:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi \, dz \quad [\mathfrak{S}]. \tag{25.}$$

Zweiter Satz. — *Die in solcher Weise definirte Function $F(z)$ verhält sich, hinsichtlich ihrer Stetigkeit oder Unstetigkeit, in ganz analoger Weise wie das früher besprochene unbestimmte Integral F. Besitzt z. B. F auf $\mathfrak{S}$ gar keinen Unendlichkeitspunkt, so wird $F(z)$ auf $\mathfrak{S}$ allenthalben stetig sein.* (26.)

Besitzt hingegen F auf $\mathfrak{S}$ im Ganzen j polare Unendlichkeitspunkte: $c_1, c_2, \ldots c_j$, respective mit den Ordnungszahlen $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_j$, so wird jene eindeutige Function $F(z)$ auf $\mathfrak{S}$ bis auf j in $c_1, c_2, \ldots c_j$ liegende Pole stetig, und in diesen Polen respective mit den Ordnungszahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_j$ behaftet sein. (27.)

Dritter Satz. — *Die Differenz derjenigen Werthe, welche die eindeutige Function $F(z)$ auf der Fläche $\mathfrak{S}$ in irgend zwei Punkten z_1 und z_2 besitzt, ist darstellbar durch die Formel:*

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} \varphi \, dz \quad [\mathfrak{S}], \tag{28.}$$

wo die Integrationscurve von z_1 nach z_2 auf beliebigem Wege fortschreiten darf, falls nur derselbe seinem ganzen Laufe nach innerhalb $\mathfrak{S}$ bleibt; wie solches übrigens auch in der Formel selber durch das in Klammern beigefügte $\mathfrak{S}$ bereits in hinreichender Weise angedeutet ist.

Der Beweis dieser Sätze lehnt sich an frühere Betrachtungen in so einfacher Weise an, dass darüber nur einige kurze Andeutungen erforderlich sind.

Beweis des ersten Satzes. — Zieht man, von z_0 aus, nach einem ebenfalls innerhalb $\mathfrak{S}$ liegenden Punkt z irgend zwei innerhalb $\mathfrak{S}$ bleibende Curven σ und σ', so bilden σ und σ' zusammengenommen einen *Rückkehrschnitt* der Fläche $\mathfrak{S}$.

$\mathfrak{S}$ ist aber nach unserer Voraussetzung *einfach zusammenhängend*, und zerfällt daher [Satz (7.) pg. 151] durch diesen Rückkehrschnitt $(\sigma + \sigma')$ in zwei getrennte Stücke $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$, von denen $\mathfrak{S}_1$ nur von $(\sigma + \sigma')$ be-

grenzt ist. Demgemäss ergiebt sich für das positiv über den Rand von $\mathfrak{S}_1$ erstreckte Integral

$$(\alpha.) \qquad \int_{\mathfrak{S}_1} \varphi\, dz$$

die Formel:

$$(\beta.) \qquad \pm \int_{\mathfrak{S}_1} \varphi\, dz = \int_{\sigma} \varphi\, dz - \int_{\sigma'} \varphi\, dz$$

die Integrationen über σ und σ' hinerstreckt gedacht von z_0 nach z. Nach unserer Voraussetzung soll aber $\mathfrak{S}$ *gar keine* oder doch nur *polare* Unendlichkeitspunkte von F enthalten. Gleiches gilt daher auch von $\mathfrak{S}_1$. Und das Integral (α.) ist daher [zufolge des Satzes (18.)] gleich *Null*. Demgemäss geht die Formel (β.) über in

$$(\gamma.) \qquad \int_{\sigma} \varphi\, dz = \int_{\sigma'} \varphi\, dz. \qquad \text{Q. e. d.}$$

Der Beweis des zweiten Satzes ergiebt sich sofort aus den zu Anfang dieses Paragraphs angestellten Betrachtungen. Vgl. daselbst namentlich den Satz (23.).

Beweis des dritten Satzes. — Markirt man innerhalb $\mathfrak{S}$, ausser z_0, noch irgend zwei andere Punkte z_1 und z_2, und zieht man irgend welche innerhalb $\mathfrak{S}$ bleibende und *von z_0 über z_1 nach z_2 fortschreitende Curve* σ, so repräsentiren die längs σ von z_0 nach z_1, respective von z_0 über z_1 bis z_2 fortschreitenden Integrale:

$$(\delta.) \qquad \int_{z_0}^{z_1} \varphi\, dz \quad \text{und} \quad \int_{z_0}^{z_2} \varphi\, dz$$

die Werthe der Function $F(z)$, (25.), in den Punkten z_1 und z_2. Die Differenz dieser beiden Integrale (δ.) ist aber offenbar nichts Anderes, als das längs σ von z_1 nach z_2 erstreckte Integral. Somit ergiebt sich:

$$(\varepsilon.) \qquad F(z_2) - F(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} \varphi\, dz. \qquad \text{Q. e. d.}$$

Es bleibt noch übrig, die Werthe der eindeutigen Function $F(z)$ am *Rande* von $\mathfrak{S}$ zu untersuchen. Eine derartige Untersuchung ist allerdings im Allgemeinen unmöglich, wohl aber dann, wenn der *einfach* zusammenhängende Flächentheil $\mathfrak{S}$ aus einem *mehrfach* zusammenhängenden Flächentheile durch irgend welche *Schnitte* entstanden ist. Alsdann nämlich ist die Beziehung zu untersuchen zwischen den Werthen der Function $F(z)$ an den beiden Ufern eines solchen Schnittes. Und man gelangt in dieser Beziehung zu folgenden Resultaten:

Vierter Satz. — *Der bisher betrachtete einfach zusammenhängende Flächentheil $\mathfrak{S}$ sei aus einem mehrfach zusammenhängenden Flächentheil durch Ausführung irgend welcher Schnitte entstanden. Dieses Schnittnetz mag im Ganzen aus ν unverzweigten Schnittstrecken* σ_1,

$\sigma_2, \dots \sigma_\nu$ bestehen; und jede solche unverzweigte Schnittstrecke $\sigma_\varkappa$ mag als ein S t r o m von bestimmter (willkürlich festgesetzter) *Richtung angesehen werden. Bezeichnet man alsdann die Werthe der eindeutigen Function $F(z)$ in zwei auf dem linken und rechten Ufer des Stromes $\sigma_\varkappa$ einander gegenüberliegenden Punkten λ und ϱ mit $F(\lambda)$ und $F(\varrho)$, so wird die Differenz*

$$F(\lambda) - F(\varrho) = \Delta_\varkappa \tag{29.}$$

einen Werth besitzen, der längs $\sigma_\varkappa$ c o n s t a n t ist.

Fünfter Satz. — *Besitzt das in Rede stehende Schnitt- oder Stromnetz $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_\nu$ irgend* welche *K n o t e n p u n k t e, so finden zwischen den Constanten $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_\nu$ gewisse Relationen statt. Betrachtet* (30.) *man nämlich die in irgend einem solchen Knotenpunkte zusammenstossenden Ströme, und unterscheidet man einerseits die daselbst e i n f l i e s s e n d e n, andererseits die von dem Punkte f o r t f l i e s s e n d e n Ströme, so ist die Summe der in den erstern vorhandenen Δ's stets ebenso gross, wie die Summe der in den letztern vorhandenen Δ's.*

Beweis des vierten Satzes. — Es sei σ irgend einer jener unverzweigten Ströme $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_\nu$. Ferner seien λ, λ' irgend zwei Punkte seines *linken*, und ϱ, ϱ' die gegenüberliegenden Punkte des rechten Ufers:

λ λ' → σ
ϱ ϱ'

Alsdann ist nach (28.):

$$F(\lambda') - F(\lambda) = \int_\lambda^{\lambda'} \varphi\, dz \quad [\mathfrak{S}], \tag{α.}$$

$$F(\varrho') - F(\varrho) = \int_\varrho^{\varrho'} \varphi\, dz \quad [\mathfrak{S}], \tag{β.}$$

wobei die Integrationscurven innerhalb $\mathfrak{S}$ *ad libitum* zu wählen sind. Demgemäss kann man z. B. die Curve $\lambda \dots \lambda'$ mit der linken, ebenso die Curve $\varrho \dots \varrho'$ mit der rechten Uferlinie von σ zusammenfallen lassen. Thut man aber dies, so werden die beiden Integrale unter einander identisch; denn φ und z sind nicht nur auf $\mathfrak{S}$, sondern auch auf $\mathfrak{R}$ selber überall eindeutig, und besitzen also in je zwei zu beiden Ufern von σ einander gegenüberliegenden Punkten einerlei Werthe. Demgemäss ergiebt sich aus (α.), (β.) sofort:

$$F(\lambda') - F(\lambda) = F(\varrho') - F(\varrho), \tag{γ.}$$

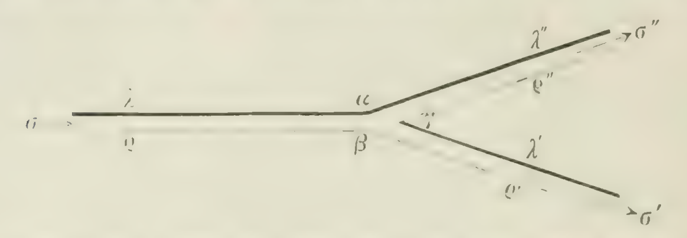
oder, was dasselbe ist:

$$F(\lambda') - F(\varrho') = F(\lambda) - F(\varrho). \tag{δ.}$$

Q. e. d.

Beweis des fünften Satzes. — Wir betrachten der Einfachheit willen zuvörderst einen Knotenpunkt $\alpha\beta\gamma$, in welchem nur *drei* der Ströme σ_1, $\sigma_2, \dots \sigma_\nu$ zusammenstossen. Diese drei mögen mit σ, σ', σ'' und die zu-

gehörigen Δ's mit Δ, Δ', Δ'' bezeichnet sein. Nehmen wir überdies an, dass σ nach der Stelle $\alpha\beta\gamma$ *hin*fliesst, hingegen σ', σ'' von $\alpha\beta\gamma$ *fort*fliessen:



so ergeben sich [zufolge des schon bewiesenen Satzes (29.)] die Formeln:

$$(\varepsilon.)\quad \begin{aligned} \Delta\ &= F(\lambda\ ) - F(\varrho\ ) = F(\alpha) - F(\beta), \\ \Delta' &= F(\lambda') - F(\varrho') = F(\gamma) - F(\beta), \\ \Delta'' &= F(\lambda'') - F(\varrho'') = F(\alpha) - F(\gamma). \end{aligned}$$

Denn die Ströme σ, σ', σ'' sind *unendlich schmal* zu denken; sodass also die drei Punkte α, β, γ einander *unendlich nahe* liegen, mithin z. B. γ und β als zwei Punkte angesehen werden dürfen, die, ebenso wie λ' und ϱ', zu beiden Ufern des Stromes σ' einander gerade gegenüber liegen. Aus den Formeln (ε.) folgt nun aber sofort:

$$(\delta.)\qquad \Delta = \Delta' + \Delta''. \qquad \text{Q. e. d.}$$

Dass man den Satz in analoger Weise auch für solche Knotenpunkte zu beweisen im Stande ist, in denen *beliebig viele* der Ströme σ_1, σ_2, ... σ_ν mit einander zusammenstossen, bedarf kaum der Erwähnung.

§ 5.

Das Abel'sche Integral erster Gattung.

Ist $\varphi = \varphi(z)$ auf der gegebenen Riemann'schen Kugelfläche *regulär*, d. i. *eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig*, so heisst das Integral

$$F = \int \varphi\, dz$$

ein Abel'sches Integral [vgl. die Definition pg. 198]. Ist nun insbesondere die Function φ von solcher Beschaffenheit, dass F auf $\mathfrak{R}$ *gar keine* Unendlichkeitspunkte hat, so heisst das Integral ein Abel'sches Integral *erster Gattung* [vgl. pg. 205].

Gleichzeitig aber wird alsdann den im vorhergehenden Paragraph an $\mathfrak{S}$ gestellten Bedingungen (24.) Genüge geschehen durch *jeden beliebigen* einfach zusammenhängenden Theil der Fläche $\mathfrak{R}$, also z. B. auch Genüge geschehen, wenn man für $\mathfrak{R}$ diejenige einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}_{abc}$ nimmt, in welche $\mathfrak{R}$ durch die Riemann'schen Schnitte

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_p,$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots b_p,$$
$$c_2, c_3, \ldots c_p,$$

sich verwandelt [vgl. die Bemerkung pg. 185]. Man gelangt somit, auf Grund der im vorhergehenden Paragraph aufgestellten fünf Sätze, zu folgendem Resultat:

Repräsentirt

$$F = \int \varphi \, dz$$

ein Abel'sches Integral erster Gattung, besitzt mithin das unbestimmte Integral F auf $\mathfrak{R}$ gar keine Unendlichkeitspunkte, so wird die durch die Formel

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi \, dz \quad [\mathfrak{R}_{abc}] \tag{31.}$$

definirte Function $F(z)$ auf der Fläche $\mathfrak{R}_{abc}$ überall eindeutig und stetig sein. Ueberdies wird alsdann diese Function $F(z)$ in den Schnitten

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_p,$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots b_p,$$
$$c_2, c_3, \ldots c_p,$$

mit constanten Differenzen behaftet sein; was angedeutet sein mag durch die Formeln:

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\varkappa\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = A_\varkappa, \\ &\text{längs } b_\varkappa\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = B_\varkappa, \\ &\text{längs } c_\varkappa\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = C_\varkappa = 0. \end{aligned} \tag{31a.}$$

Diese drei Formeln bedürfen aber noch eines genaueren Beweises. Namentlich wird dabei auch darzuthun sein, dass die Constante $C_\varkappa$ in der letzten Formel stets $= 0$ ist.

Der Beweis ergiebt sich sehr leicht, falls man nur die geometrische Configuration der Schnitte a, b, c sich vergegenwärtigt [vgl. namentlich die Figur pg. 184]. Der Schnitt a_1 besitzt nämlich [wie jene Figur zeigt] nur *einen* Knotenpunkt. Dieser wird hervorgebracht durch das Zusammentreffen von a_1 mit b_1, und mag daher mit (a_1, b_1) bezeichnet sein. Der Schnitt a_1 repräsentirt also *eine einzige* unverzweigte Schnittstrecke, die von diesem Knotenpunkt (a_1, b_1) ausgeht und schliesslich wieder in denselben zurückkehrt.

Der Schnitt b_1 hingegen besitzt *zwei* Knotenpunkte (b_1, a_1) und (b_1, c_2), und besteht also aus *zwei* unverzweigten Schnittstrecken, welche b_1' und b_1'' heissen mögen [vgl. die folgende Figur].

Endlich repräsentirt der Schnitt c_2 nur *eine* unverzweigte Schnittstrecke, welche vom Knotenpunkt (c_2, b_1) fortläuft zum Knotenpunkt (c_2, a_2).

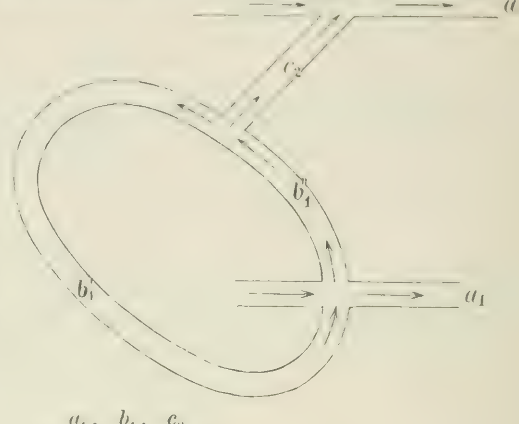
Bezeichnet man nun die diesen unverzweigten Strecken:

$$a_1, \; b_1', \; b_1'', \; c_2$$

entsprechenden Differenzen der Function $F(z)$ respective mit:

$$A_1, \; B_1', \; B_1'', \; C_2,$$

so sind A_1, B_1', B_1'', C_2 lauter *Constanten* [nach (29.)]. Auch werden zwischen diesen Constanten [zufolge des Knotenpunktgesetzes (30.)] die Relationen stattfinden:



(α.) $$A_1 + B_1' = A_1 + B_1'',$$
$$B_1'' = B_1' + C_2;$$

woraus sofort folgt:

(β.) $$B_1' = B_1'',$$
$$C_2 = 0.$$

Bezeichnet man also den gemeinschaftlichen Werth der Constanten B_1' und B_1'' kurzweg mit B_1, so werden die Differenzen von $F(z)$ in den Schnitten

(γ.) $$a_1, \; b_1, \; c_2$$

[zufolge (β.)] respective dargestellt sein durch

(δ.) $$A_1, \; B_1, \; 0,$$

wo A_1 und B_1 *Constanten* sind.

Analoges ergiebt sich nun, wenn man in entsprechender Weise weitergeht, zunächst für a_2, b_2, c_3, sodann für a_3, b_3, c_4, hierauf für a_4, b_4, c_5 u. s. w. — *Q. e. d.*

Da nun also die $C_\varkappa$ sämmtlich $= 0$ sind, mithin zu beiden Ufern des Schnittes $c_\varkappa$ $(\varkappa = 2, 3, \ldots p)$ *gleiche* Werthe der Function $F(z)$ sich vorfinden, so wird die Function $F(z)$ nicht nur auf $\mathfrak{R}_{abc}$, *sondern auch auf* $\mathfrak{R}_{ab}$ eindeutig und stetig sein. Dabei ist unter $\mathfrak{R}_{ab}$ diejenige Fläche zu verstehen, in welche $\mathfrak{R}$ bloss durch Ausführung der Schnitte

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; \ldots \; a_p,$$
$$b_1, \; b_2, \; b_3, \; \ldots \; b_p$$

sich verwandelt [wie solches schon früher festgesetzt wurde, vgl. die Bemerkung pg. 185].

Auch übersieht man leicht, dass diese durch die Formel

(32.) $$F(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi \, dz \quad [\mathfrak{R}_{abc}]$$

definirte Function $F(z)$, weil sie eben zu beiden Ufern der Schnitte

$c_\varkappa$ $(\varkappa = 2, 3, \ldots p)$ *einerlei* Werthe hat, völlig ungeändert *dieselbe* bleiben wird, einerlei, ob man der in (32.) angegebenen Integrationscurve $z_0 \ldots z$ eine Ueberschreitung der Schnitte $c_\varkappa$ (wie bisher) verbietet, oder aber gestattet. Mit andern Worten: Die durch die Formel (32.) definirte Function $F(z)$ wird *völlig ungeändert* bleiben, wenn man in jener Formel die Note $[\mathfrak{R}_{abc}]$ durch $[\mathfrak{R}_{ab}]$ ersetzt. Demgemäss kann man den vorhergehenden Satz (31.) auch so ausdrücken:

Theorem. — *Repräsentirt*

$$F = \int \varphi \, dz$$

ein Abel'sches Integral erster Gattung, so wird die durch die Formel

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi \, dz \quad [\mathfrak{R}_{ab}] \tag{33.}$$

definirte Function $F(z)$ auf der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ überall eindeutig und stetig sein.

Mit andern Worten: Sie wird auf der unversehrten Fläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutig und stetig sein, mit alleiniger Ausnahme der Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$. Ueberdies wird sie in diesen Curven mit constanten Differenzen behaftet sein:

$$\text{längs } a_\varkappa\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = A_\varkappa,$$

$$\text{längs } b_\varkappa\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = B_\varkappa.$$

Zwischen diesen vorläufig ganz unbekannten Constanten $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ findet übrigens, wie später gezeigt werden soll, eine gewisse gegenseitige Beziehung statt.

Die in dem vorstehenden Theorem angegebenen Eigenschaften des Integrals erster Gattung sind *charakteristischer* Natur. In der That wird jedwede mit diesen Eigenschaften behaftete Function ein Integral erster Gattung repräsentiren. Um diese Behauptung genauer zu formuliren und zugleich zu beweisen, stellen wir uns folgende Aufgabe:

Auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ sei irgend eine *unbekannte* Function $f(z)$ ausgebreitet, von welcher indessen vorausgesetzt werden soll, *dass sie auf $\mathfrak{R}$, mit Ausnahme der Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$,*
(34.) *eindeutig und stetig, und in jenen Curven mit irgend welchen constanten Differenzen behaftet ist.* Auf Grund dieser wenigen Angaben soll die Beschaffenheit der Function $f(z)$ näher untersucht werden.

Nach unserer Voraussetzung ist $f(z)$ auf der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ ausnahmslos eindeutig und stetig. Demgemäss ist [Satz pg. 124] der *Differentialquotient:*

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz}$$

auf $\mathfrak{R}_{ab}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig. Diese Eigenschaften aber wird der Differentialquotient offenbar nicht nur auf $\mathfrak{R}_{ab}$, sondern auch auf $\mathfrak{R}$ selber besitzen; denn die constanten Differenzen, mit denen $f(z)$ in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ behaftet ist, verschwinden bei Ausführung der Differentiation. Der in Rede stehende Differentialquotient $f'(z)$ ist also auf $\mathfrak{R}$ eindeutig und bis auf einzelne Pole stetig. Oder kürzer ausgedrückt: Er ist eine auf $\mathfrak{R}$ *reguläre* Function. Demgemäss wird $f(z)$ selber:

$$f(z) = \int f'(z) dz \tag{34a.}$$

zu bezeichnen sein als das Integral einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function, d. i. als ein *Abel'sches Integral* [vgl. die Definition pg. 198].

Nach unserer Voraussetzung (34.) ist nun aber die Function $f(z)$ auf $\mathfrak{R}_{ab}$ überall *stetig*, mithin auf $\mathfrak{R}_{ab}$ und ebenso auch auf $\mathfrak{R}$ selber überall *endlich*. Das in Rede stehende Abel'sche Integral (34a.) ist daher als ein solches zu bezeichnen, welches auf $\mathfrak{R}$ *gar keine* Unendlichkeitspunkte besitzt, mithin zu bezeichnen als ein Abel'sches Integral *erster Gattung*. [Vgl. die Definition pg. 205.]

Jedwede den Voraussetzungen (34.) *entsprechende Function* $f(z)$ *ist also ein Abel'sches Integral erster Gattung*, — ein Satz, der die *Umkehrung* des vorhergehenden Satzes (33.) repräsentirt. Durch Zusammenstellung beider Sätze, des directen und des umgekehrten, gelangt man zu folgendem Resultat:

(35.) **Theorem.** — *Jedwedes der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ entsprechende Abel'sche Integral erster Gattung repräsentirt, bei gehöriger Einschränkung seiner Integrationscurve, eine Function von z, die auf der Fläche $\mathfrak{R}$, bis auf die Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$), eindeutig und stetig, in jenen Curven aber mit constanten Differenzen behaftet ist.*

(36.) **Und umgekehrt:** *Jedwede Function $f(z)$, welche auf $\mathfrak{R}$ diese Eigenschaften besitzt, ist ein Abel'sches Integral erster Gattung.*

§ 6.

Das elementare Abel'sche Integral zweiter Gattung.

Wir wollen jetzt annehmen, die auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function $\varphi = \varphi(z)$ sei von solcher Beschaffenheit, dass das Integral

$$F = \int \varphi \, dz$$

ein elementares Abel'sches Integral zweiter Gattung repräsentirt. Alsdann besitzt das unbestimmte Integral F auf der Fläche $\mathfrak{R}$ im Ganzen nur *einen* Unendlichkeitspunkt, und zwar einen *polaren* Unendlichkeitspunkt *erster* Ordnung. Auch wird sich der Werth von F im Bereich dieses Punktes, falls man denselben mit c, und sein Bereich mit $\mathfrak{U}(c, z)$ respective $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$ bezeichnet, folgendermassen darstellen lassen:

$$(37.) \qquad F = \frac{1}{\zeta - \gamma} + (\text{eind. stetige Funct. von } \zeta);$$

[vgl. die Definitionen auf pg. 206].

Die in (24.) pg. 210 an $\mathfrak{S}$ gestellten Anforderungen werden offenbar für das gegenwärtige F vollständig erfüllt sein, falls man für $\mathfrak{S}$ einen *ganz beliebigen* einfach zusammenhängenden Theil der Fläche $\mathfrak{R}$ nimmt. Und hieraus folgt, dass jene Anforderungen auch dann erfüllt sind, wenn man für $\mathfrak{S}$ die Fläche $\mathfrak{R}_{abc}$ nimmt. Demgemäss gelangt man, auf Grund der fünf Sätze pg. 210—213, und genau in derselben Weise operirend wie im vorhergehenden Paragraph, zu folgendem Satz:

Theorem. — *Repräsentirt*

$$F = \int \varphi \, dz$$

ein elementares Abel'sches Integral zweiter Gattung mit dem Unendlichkeitspunkt c, so wird die durch die Formel

$$(38.) \qquad F(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi \, dz \quad [\mathfrak{R}_{ab}]$$

definirte Function $F(z)$ auf der unversehrten Fläche $\mathfrak{R}$, mit Ausnahme eines in c liegenden Poles und mit Ausnahme der Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$), eindeutig und stetig sein. Im Bereich $\mathfrak{U}(c, z)$ oder $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$ jenes Poles c wird sie darstellbar sein durch die Formel:

$$(39.) \qquad F(z) = \frac{1}{\zeta - \gamma} + (\text{eind. stetige Funct. von } \zeta).$$

Und andererseits wird sie in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ mit constanten Differenzen behaftet sein:

$$(40.) \qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\varkappa\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = A_\varkappa, \\ &\text{längs } b_\varkappa\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = B_\varkappa. \end{aligned}$$

Die Formel (39.) folgt nämlich ohne Weiteres aus (37.), falls man nur die einfachen Betrachtungen auf pg. 210 sich vergegenwärtigt.

Auch dieses Theorem ist *umkehrbar* durch Betrachtungen, die denen im vorhergehenden Paragraph völlig analog sind. Man gelangt in solcher Weise, wenn man beide Sätze, den directen und den umgekehrten, zusammenstellt, zu folgendem Resultat:

Theorem. — *Jedwedes der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ entsprechende elementare Abel'sche Integral zweiter Gattung repräsentirt, bei gehöriger Einschränkung seiner Integrationscurve, eine Function von z,*

(41.) *welche auf $\mathfrak{R}$ eindeutig und stetig ist, mit Ausnahme eines Poles c erster Ordnung und mit Ausnahme der Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$,*

welche ferner im Bereich $\mathfrak{U}(c, z)$ oder $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$ des Poles c den Werth hat:

$$\frac{1}{\zeta - \gamma} + (\text{eindeut. stetige Funct. von } \zeta),$$

und welche endlich in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ mit constanten Differenzen behaftet ist.

(42.) **Und umgekehrt:** *Jedwede Function $f(z)$, welche auf $\mathfrak{R}$ die eben genannten Eigenschaften besitzt, ist ein elementares Abel'sches Integral zweiter Gattung.*

§ 7.

Das elementare Abel'sche Integral dritter Gattung.

Die auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function $\varphi = \varphi(z)$ sei von solcher Beschaffenheit, dass das Integral

$$F = \int \varphi\, dz$$

ein elementares Abel'sches Integral dritter Gattung repräsentirt. Alsdann besitzt das unbestimmte Integral F auf der Fläche $\mathfrak{R}$ im Ganzen nur *zwei*, und zwar *rein logarithmische* Unendlichkeitspunkte, welche c_1 und c_2 heissen mögen. Auch wird alsdann der Werth von F in den Bereichen $\mathfrak{U}_1(c_1, z)$, $\mathfrak{U}_2(c_2, z)$ respective $\mathfrak{A}_1(\gamma_1, \zeta)$, $\mathfrak{A}_2(\gamma_2, \zeta)$ dieser Punkte darstellbar sein durch die Formeln

$$(43.)\quad \begin{aligned} F &= -\log(\zeta - \gamma_1) + (\text{eindeut. stet. Funct. von } \zeta), \\ F &= +\log(\zeta - \gamma_2) + (\text{eindeut. stet. Funct. von } \zeta); \end{aligned}$$

[vgl. die Definitionen auf p. 206]. Demgemäss ergiebt sich [zufolge des Satzes (9.) pg. 200]:

$$(44.)\quad \begin{aligned} \int_{\mathfrak{U}_1} dF &= \int_{\mathfrak{U}_1} \varphi\, dz = -2\pi i, \\ \int_{\mathfrak{U}_2} dF &= \int_{\mathfrak{U}_2} \varphi\, dz = +2\pi i. \end{aligned}$$

Wollen wir nun das gegenwärtige Integral *dritter* Gattung in ähnlicher Weise behandeln, wie in den vorhergehenden Paragraphen die Integrale *erster* und *zweiter* Gattung, so müssen wir zuvörderst die fünf Sätze pg. 210 — 213 auf das gegenwärtige Integral F und die Fläche $\mathfrak{R}$ anwendbar zu machen suchen. Zu diesem Zwecke aber wird es erforderlich sein, die Fläche $\mathfrak{R}$ wieder in $\mathfrak{R}_{abc}$ zu verwandeln, und überdies die beiden Unendlichkeitspunkte c_1 und c_2 durch geeignete Schnitte abzutrennen.

Dabei mag der Bequemlichkeit willen zuvörderst angenommen sein, dass c_1 und c_2 *gewöhnliche* Punkte (keine Windungspunkte) sind. Wir construiren alsdann auf der Fläche $\mathfrak{R}_{abc}$ einen von c_1 über c_2 bis zu irgend einem Randpunkte d der Fläche laufenden schmalen Flächenstreifen, welcher bei c_1 und c_2 kleine kreisförmige Erweiterungen besitzt, bezeichnen die von c_1 nach c_2 und von c_2 nach d gehenden Theile dieses Streifens respective mit l und m, und das nach Absonderung des Streifens $(l + m)$ noch übrig bleibende Stück der Fläche $\mathfrak{R}_{abc}$ mit

$$\mathfrak{R}_{abclm}. \tag{45.}$$

Diese Fläche ist offenbar (ebenso wie $\mathfrak{R}_{abc}$) eine *einfach zusammenhängende*. Auch besitzt das vorgelegte Integral F auf dieser Fläche *gar keine* Unendlichkeitspunkte.

Die früher in (24.) pg. 210 an $\mathfrak{S}$ gestellten Anforderungen sind daher vollständig erfüllt, wenn man für $\mathfrak{S}$ diese neue Fläche $\mathfrak{R}_{abclm}$ nimmt. Auf Grund der dortigen fünf Sätze pg. 210—213 gelangt man daher, wie leicht zu übersehen, zu folgendem Satz:

Repräsentirt

$$F = \int \varphi \, dz$$

ein elementares Abel'sches Integral dritter Gattung mit den beiden Unendlichkeitspunkten c_1 und c_2, so wird die durch die Formel

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi \, dz \quad [\mathfrak{R}_{abclm}] \tag{46.}$$

definirte Function $F(z)$ auf der Fläche $\mathfrak{R}_{abclm}$ überall eindeutig und stetig sein. Ueberdies wird alsdann diese Function $F(z)$ in den Schnitten)*

*) Es wird kein Missverständniss hervorbringen, dass der Buchstabe c hier in verschiedenen Bedeutungen gebraucht ist, nämlich einerseits zur Bezeichnung der beiden Unendlichkeitspunkte, und andererseits zur Bezeichnung der Schnitte $c_2, c_3, \ldots c_p$.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_p,$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots b_p,$$
$$c_2, c_3, \ldots c_p,$$

und ebenso auch in den Schnitten

$$l \text{ und } m$$

mit constanten Differenzen behaftet sein, was angedeutet sein mag durch die Formeln:

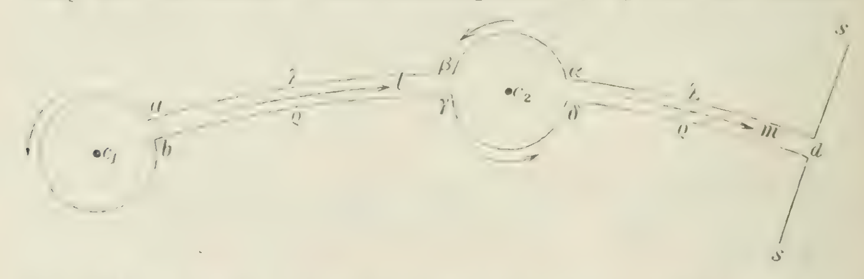
$$(47.) \quad \begin{aligned} &\text{längs } a_\varkappa\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = A_\varkappa, \\ &\text{längs } b_\varkappa\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = B_\varkappa, \\ &\text{längs } c_\varkappa\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = C_\varkappa = 0, \\ &\text{längs } \;\; l\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = L, \\ &\text{längs } m\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = M. \end{aligned}$$

Dass nämlich $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, $C_\varkappa$, L, M wirklich Constanten, und dass insbesondere die $C_\varkappa$ sämmtlich $= 0$ sind, ergiebt sich in genau derselben Weise, wie Analoges früher bei dem Satz pg. 215 bewiesen wurde. Ueberhaupt ist der gegenwärtige Satz, seiner Ableitung und seinem Inhalt nach, mit jenem früheren Satz völlig parallel.

Um die Werthe der Constanten L, M näher zu bestimmen, bemerken wir zuvörderst, dass die Differenz derjenigen Werthe, welche $F(z)$ in irgend zwei Punkten z_1 und z_2 der Fläche $\mathfrak{R}_{abclm}$ besitzt, darstellbar ist durch die Formel

$$(48.) \quad F(z_2) - F(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} \varphi \, dz \quad [\mathfrak{R}_{abclm}],$$

[vgl. (28.) pg. 211], wo die Integrationscurve $z_1 \ldots z_2$ innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}_{abclm}$ *jeden beliebigen* Lauf nehmen darf. Die folgende Figur mag nun die beiden Unendlichkeitspunkte c_1, c_2 und den Schnitt



$(l + m)$ mit seinen beiden kreisförmigen Erweiterungen vergegenwärtigen. Dabei bezeichne die Linie ss einen kleinen Theil der Randcurve von $\mathfrak{R}_{ab\ldots}$. Betrachtet man die um c_1 beschriebene kleine Kreisfläche als das Bereich $\mathfrak{U}_1$ dieses Punktes c_1, so erhält man:

(49.)
$$\int_{\mathfrak{U}_1} \varphi\, dz = \int_a^b \varphi\, dz,$$

die Integration von a aus [in der Richtung des angegebenen Pfeiles] *längs der Kreisperipherie* fortlaufend gedacht bis zum Punkte b. Diese Integrationscurve $a \dots b$ bleibt also ihrem ganzen Laufe nach *innerhalb der Fläche* $\mathfrak{R}_{abcl m}$, oder vielmehr am *Rande* derselben. Zufolge (48.) hat daher das Integral (49.) rechter Hand den Werth
$$F(b) - F(a);$$
sodass man erhält:

(50.)
$$\int_{\mathfrak{U}_1} \varphi\, dz = -[F(a) - F(b)].$$

In analoger Weise ergiebt sich, was das Bereich $\mathfrak{U}_2$ des Punktes c_2 betrifft, die Formel:

(51.)
$$\int_{\mathfrak{U}_2} \varphi\, dz = \int_\alpha^\beta \varphi\, dz + \int_\gamma^\delta \varphi\, dz,$$

die Integrationen *längs der Kreisperipherie* hinerstreckt gedacht von α nach β und von γ nach δ [in der Richtung der in der Figur angegebenen Pfeile]. Zufolge (48.) sind aber die in (51.) rechter Hand stehenden Integrale
$$= F(\beta) - F(\alpha), \text{ respective } = F(\delta) - F(\gamma);$$
sodass man erhält:
$$\int_{\mathfrak{U}_2} \varphi\, dz = F(\beta) - F(\alpha) + F(\delta) - F(\gamma),$$
oder, was dasselbe ist:

(52.)
$$\int_{\mathfrak{U}_2} \varphi\, dz = [F(\beta) - F(\gamma)] - [F(\alpha) - F(\delta)].$$

Beachtet man jetzt die Bedeutungen der Constanten L, M (47.), so ergiebt sich mit Rücksicht auf die vorstehende Figur sofort:
$$[F(a) - F(b)] = [F(\beta) - F(\gamma)] = L,$$
$$[F(\alpha) - F(\delta)] = M.$$
sodass also die Formeln (50.), (52.) die Gestalt annehmen:

(53.)
$$\int_{\mathfrak{U}_1} \varphi\, dz = -L,$$
$$\int_{\mathfrak{U}_2} \varphi\, dz = +L - M.$$

Hieraus aber folgt weiter, falls man für die Integrale linker Hand ihre Werthe (44.) substituirt:

(54.)
$$-2\pi i = -L,$$
$$+2\pi i = +L - M;$$

sodass man also schliesslich erhält:

$$L = 2\pi i \quad \text{und} \quad M = 0. \tag{55.}$$

Da nun [nach (47.) und (55.)] sämmtliche $C_\varkappa$ ($\varkappa = 2, 3, \ldots p$) und ebenso auch M *Null* sind, mithin die Werthe der Function $F(z)$ zu beiden Ufern der Schnitte $c_\varkappa$ ($\varkappa = 2, 3, \ldots p$) und m einander *gleich* sind, so wird diese Function $F(z)$ nicht nur auf $\mathfrak{R}_{abclm}$, *sondern auch* auf $\mathfrak{R}_{abl}$ eindeutig und stetig sein. Dabei haben wir von der letztgenannten Fläche

$$\mathfrak{R}_{abl} \tag{56.}$$

eine deutliche und einfache Vorstellung. Denn sie entsteht aus der *bekannten* Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ durch Ausführung des von c_1 nach c_2 laufenden Schnittes l und durch Abscheidung zweier kleinen um c_1 und c_2 beschriebenen Kreisflächen.

Gleichzeitig lässt sich übrigens die durch die Formel (46.):

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi\, dz \quad [\mathfrak{R}_{abclm}] \tag{57.}$$

gegebene *Definition* der Function $F(z)$ ebenfalls vereinfachen. Da nämlich $F(z)$ zu beiden Ufern der Schnitte $c_\varkappa$ ($\varkappa = 2, 3, \ldots p$) und m *einerlei* Werthe hat, so wird diese Function $F(z)$, wie man sofort übersieht, ungeändert *dieselbe* bleiben, falls man in ihrer Definitionsformel (57.) die Note $[\mathfrak{R}_{abclm}]$ durch $[\mathfrak{R}_{abl}]$ ersetzt.

Mit Rücksicht auf all' diese Betrachtungen, namentlich auch mit Rücksicht auf (55.), können wir nun schliesslich dem vorhergehenden Satze (46.), (47.) folgende einfachere Gestalt geben:

Repräsentirt

$$F = \int \varphi\, dz$$

ein elementares Abel'sches Integral dritter Gattung mit den beiden Unendlichkeitspunkten c_1 und c_2, so wird die durch die Formel

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi\, dz \quad [\mathfrak{R}_{abl}] \tag{58.}$$

definirte Function $F(z)$ innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}_{abl}$ überall eindeutig und stetig sein, überdies aber in den Schnitten $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$) und l mit constanten Differenzen behaftet sein:

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\varkappa\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = A_\varkappa, \\ &\text{längs } b_\varkappa\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = B_\varkappa, \\ &\text{längs } \ l\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = 2\pi i. \end{aligned} \tag{59.}$$

Die Fläche $\mathfrak{R}_{abl}$ besitzt [vgl. (56.)] bei c_1 und c_2 kleine kreisförmige Oeffnungen. Lässt man die Radien dieser Oeffnungen kleiner und kleiner werden, so wird der vorstehende Satz dabei ungeändert in Kraft bleiben. Eine solche weiter und weiter fortschreitende Verkleinerung der genannten Oeffnungen wird den Effect haben, dass die in der Definitionsformel (58.) auftretende Integrationscurve $z_0 \dots z$ alsdann näher und näher an die Punkte c_1 und c_2 heranzukommen, also in die Bereiche $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ dieser Punkte c_1 und c_2 tiefer und tiefer einzudringen vermag.

Die Werthe aber, die in solcher Weise für die Function $F(z)$ in jenen Bereichen $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ sich ergeben, können von den dortigen Werthen des *unbestimmten* Integrals F (43.):

$$(60.)\qquad \begin{aligned} F &= -\log(\zeta - \gamma_1) + (\text{eind. stet. Funct. von } \zeta) \\ F &= +\log(\zeta - \gamma_2) + (\text{eind. stet. Funct. von } \zeta) \end{aligned}$$

nur durch irgend welche additiven Constanten verschieden sein; wie solches aus einem früheren Satz [(23.) pg. 210] sofort sich ergiebt.

Der letzte Satz (58.) gewinnt daher, falls man die in Rede stehenden kreisförmigen Oeffnungen der Fläche $\mathfrak{R}_{abl}$ *unendlich klein* werden lässt, folgende Gestalt:

Theorem. — *Repräsentirt*

$$F = \int \varphi\, dz$$

ein elementares Abel'sches Integral dritter Gattung mit den beiden Unendlichkeitspunkten c_1 und c_2, und denkt man sich in der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ irgend welchen von c_1 nach c_2 laufenden Schnitt l ausgeführt, und die so entstehende neue Fläche mit $\mathfrak{R}_{abl}$ bezeichnet, so wird die durch die Formel

$$(61.)\qquad F(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi\, dz \quad [\mathfrak{R}_{abl}]$$

definirte Function $F(z)$ auf der unversehrten Fläche $\mathfrak{R}$, mit Ausnahme der Punkte c_1, c_2, ferner mit Ausnahme der Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \dots p$) und der Curve l, eindeutig und stetig sein. In den Bereichen $\mathfrak{U}_1(c_1, z)$, $\mathfrak{U}_2(c_2, z)$ oder $\mathfrak{A}_1(\gamma_1, \zeta)$, $\mathfrak{A}_2(\gamma_2, \zeta)$ der Punkte c_1, c_2 wird diese Function darstellbar sein respective durch die Formeln:

$$(62.)\qquad \begin{aligned} F(z) &= -\log(\zeta - \gamma_1) + (\text{eind. stet. Funct. von } \zeta), \\ F(z) &= +\log(\zeta - \gamma_2) + (\text{eind. stet. Funct. von } \zeta). \end{aligned}$$

Andererseits wird dieselbe in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \dots p$) und l mit constanten Differenzen behaftet sein:

$$\begin{aligned}
&\text{längs } a_\varkappa: \; F(\lambda) - F(\varrho) = A_\varkappa,\\
(63.)\qquad &\text{längs } b_\varkappa: \; F(\lambda) - F(\varrho) = B_\varkappa,\\
&\text{längs } \; l\;: \; F(\lambda) - F(\varrho) = 2\pi i.
\end{aligned}$$

Dabei sind, was die letzte Formel betrifft, das linke und rechte Ufer des Schnittes l in völlig bestimmter Weise definirt. Denn nach unserer Festsetzung soll der Schnitt l von c_1 nach c_2 laufen.

Ergänzung. — Der vorstehende Satz ist bisher eigentlich erst für *den* Fall bewiesen worden, dass c_1 und c_2 *gewöhnliche* Punkte (keine Windungspunkte) sind.

Sind c_1, c_2 Windungspunkte der Fläche $\mathfrak{R}$, etwa c_1 ein fünfblättriger, und c_2 ein zehnblättriger Windungspunkt [also der eine von der vierten, der andere von der neunten Ordnung], so kann man zunächst diese beiden Punkte *von der Fläche* $\mathfrak{R}_{abc}$ *absondern* durch zwei Rückkehrschnitte, von denen der eine das Bereich $\mathfrak{U}_1$ des Punktes c_1, der andere das Bereich $\mathfrak{U}_2$ des Punktes c_2 umläuft; sodass also diese Schnitte respective fünf und zehn volle Umgänge machen, bevor jeder derselben in sich zurückläuft. Das nach Absonderung dieser Bereiche $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ noch übrig bleibende Stück $\mathfrak{R}^*_{abc}$ der Fläche $\mathfrak{R}_{abc}$ besitzt alsdann im Ganzen *drei* Randcurven. Zwei derselben sind dargestellt durch die genannten beiden Rückkehrschnitte; sie mögen s_1 und s_2 heissen; während die dritte Randcurve identisch ist mit der ursprünglichen Randcurve s der Fläche $\mathfrak{R}_{abc}$.

Man construire jetzt in der Fläche $\mathfrak{R}^*_{abc}$ zwei Querschnitte, von denen der *erste* l von irgend einem Punkte der Randcurve s_1 zu irgend einem Punkte der Randcurve s_2 hinläuft; während der *andere* m irgend zwei Punkte der Curven s_2 und s mit einander verbindet.

Bezeichnet man nun die neue Fläche, in welche $\mathfrak{R}^*_{abc}$ durch Ausführung dieser beiden Schnitte l, m sich verwandelt, mit

$$\mathfrak{R}_{abclm},$$

so kann man auf diese letztere Fläche Schritt für Schritt genau dieselben Betrachtungen anwenden, welche vorhin [als c_1, c_2 gewöhnliche Punkte waren] auf die *damalige* Fläche $\mathfrak{R}_{abclm}$ angewendet wurden. In solcher Weise überzeugt man sich dann leicht davon, dass der vorstehende Satz (61.), (62.), (63.) *ganz allgemein* gültig ist, einerlei, ob c_1, c_2 gewöhnliche Punkte oder Windungspunkte vorstellen.

Das gefundene Theorem (61.), (62.), (63.) ist wiederum *umkehrbar*, und zwar durch Betrachtungen, die denen auf pg. 217, 218 analog sind. Man gelangt in solcher Weise, falls man schliesslich beide Sätze, den directen und umgekehrten zusammenstellt, zu folgendem Resultat:

(64.) Theorem. — *Jedwedes der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ entsprechende elementare Abel'sche Integral dritter Gattung repräsentirt, bei gehöriger Einschränkung seiner Integrationscurve, eine Function von z,*

welche auf $\mathfrak{R}$ eindeutig und stetig ist, mit Ausnahme zweier Punkte c_1 und c_2, einer von c_1 nach c_2 laufenden Linie l und der Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$,

welche ferner in den Bereichen $\mathfrak{U}_1(c_1, z)$, $\mathfrak{U}_2(c_2, z)$ oder $\mathfrak{A}_1(\gamma_1, \zeta)$, $\mathfrak{A}_2(\gamma_2, \zeta)$ der Punkte c_1, c_2 die Werthe besitzt:

$$- \log(\zeta - \gamma_1) + (\text{eind. stet. Funct. von } \zeta),$$

$$+ \log(\zeta - \gamma_2) + (\text{eind. stet. Funct. von } \zeta),$$

und welche endlich längs der Linie l mit der constanten Differenz $2\pi i$, und längs der Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ ebenfalls mit constanten Differenzen behaftet ist.

Und umgekehrt: *Jedwede Function $f(z)$, welche auf $\mathfrak{R}$ die genannten drei Eigenschaften besitzt, ist ein elementares Abel'sches Integral dritter Gattung.* (65.)

§ 8.

Das allgemeine Abel'sche Integral.

Das *allgemeine* Abel'sche Integral

$$F = \int \varphi \, dz \tag{1.}$$

besitzt auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ *beliebig viele* Unendlichkeitspunkte. Von diesen mögen die *polaren* mit

$$c', c'', c''' \ldots c^{(\Gamma)}, \tag{2.}$$

andererseits aber die *logarithmischen* oder *logarithmisch-polaren* mit

$$c_1, c_2, c_3, \ldots c_J \tag{3.}$$

bezeichnet werden. Alsdann findet bekanntlich zwischen den den Punkten c_1, c_2, c_3, $\ldots$ c_J entsprechenden Logarithmus-Coefficienten A_1, A_2, A_3, $\ldots$ A_J die Relation statt:

$$\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \mathsf{A}_3 + \ldots \mathsf{A}_J = 0 \text{ [vgl. (19a.) pg. 204].} \tag{4.}$$

Dieses *allgemeine* Abel'sche Integral kann nun in *analoger* Weise behandelt werden, wie das Integral erster Gattung und die elementaren Integrale zweiter und dritter Gattung. Wir können uns demgemäss hier beschränken auf eine kurze Andeutung der in solcher Weise sich ergebenden Resultate.

Man führe in der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ einen von c_1 über c_2, c_3 u. s. w. bis c_J fortlaufenden Schnitt l aus und bezeichne die in solcher Weise

sich ergebende neue Fläche mit $\mathfrak{R}_{abl}$. Alsdann wird die durch die Formel

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi\, dz \quad [\mathfrak{R}_{abl}] \tag{5.}$$

definirte Function $F(z)$ auf der unversehrten Fläche $\mathfrak{R}$, mit Ausnahme der Punkte $c_1, c_2, c_3, \ldots c_J$, ferner mit Ausnahme der Linie l und der Curven $a_\varkappa, b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$, *eindeutig und stetig* sein.

Bezeichnet man *irgend einen* unter den Punkten $c_1, c_2, c_3, \ldots c_J$ kurzweg mit c, so wird diese Function $F(z)$ im Bereich $\mathfrak{U}(c, z)$ oder $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$ dieses Punktes c darstellbar sein durch eine Formel von der Gestalt:

$$F(z) = \left\{ \begin{array}{c} \mathsf{A} \log(\zeta - \gamma) + \dfrac{\mathsf{B}^{(1)}}{\zeta - \gamma} + \dfrac{\mathsf{B}^{(2)}}{(\zeta - \gamma)^2} + \ldots + \dfrac{\mathsf{B}^{(h)}}{(\zeta - \gamma)^h} \\ + \text{(eindeut. stet. Function von } \zeta) \end{array} \right\}; \tag{6.}$$

wo A und $\mathsf{B}^{(1)}, \mathsf{B}^{(2)}, \ldots \mathsf{B}^{(h)}$ Constanten sind. Und zwar repräsentirt das A der Reihe nach die schon in (4.) erwähnten Constanten $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3, \ldots \mathsf{A}_J$, je nachdem der betrachtete Punkt c identisch ist mit $c_1, c_2, c_3, \ldots c_J$.

Ferner gelten, wenn man die von den Punkten $c_1, c_2, c_3, \ldots c_J$ interceptirten einzelnen Strecken der Curve l mit $l_{12}, l_{23}, l_{34}, \ldots l_{J-1, J}$ bezeichnet, die Formeln:

$$\begin{array}{ll} \text{längs } l_{12}: & F(\lambda) - F(\varrho) = -2\pi i\, \mathsf{A}_1, \\ \text{längs } l_{23}: & F(\lambda) - F(\varrho) = -2\pi i (\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2), \\ \text{längs } l_{24}: & F(\lambda) - F(\varrho) = -2\pi i (\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \mathsf{A}_3), \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{längs } l_{J-1, J}: & F(\lambda) - F(\varrho) = -2\pi i (\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \mathsf{A}_3 + \ldots \mathsf{A}_{J-1}), \end{array} \tag{7.}$$

wo wiederum die A's dieselben Constanten sind, wie in (4.).

Endlich wird die Function $F(z)$ mit *constanten* Differenzen auch in den Curven $a_\varkappa, b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ behaftet sein:

$$\begin{array}{l} \text{längs } a_\varkappa: F(\lambda) - F(\varrho) = A_\varkappa, \\ \text{längs } b_\varkappa: F(\lambda) - F(\varrho) = B_\varkappa. \end{array} \tag{8.}$$

Bemüht man sich, all' diese Eigenschaften des Integrals (1.) in möglichst einfacher Weise zusammenzufassen, so gelangt man zu folgendem

(9.) Theorem. — *Jedwedes der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ entsprechende Abel'sche Integral repräsentirt, bei gehöriger Einschränkung seiner Integrationscurve, eine Function von z,*

welche auf $\mathfrak{R}$ eindeutig und stetig ist, mit Ausnahme einzelner Punkte und Linien,

welche ferner in jedem solchen Ausnahmepunkt entweder eine polare, oder eine logarithmische, oder eine logarithmisch-polare Unstetigkeit besitzt,

und welche endlich in jeder Ausnahmelinie mit einer constanten Differenz behaftet ist.

(10.) Und umgekehrt: *Jedwede Function $f(z)$, welche auf $\mathfrak{R}$ die genannten drei Eigenschaften besitzt, ist ein Abel'sches Integral.* — Die Betrachtungen, welche vom directen Satze aus zu diesem umgekehrten Satze hinleiten, sind analog mit den früheren Betrachtungen pg. 217, 218.

Beispiel. — Repräsentirt $f = f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ *reguläre* Function, und bezeichnet man die Pole und Nullpunkte dieser Function f *promiscue* in irgend welcher Reihenfolge mit $c_1, c_2, c_3, \ldots c_J$, ferner die dortigen Ordnungszahlen von f mit $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_J$, so besitzt bekanntlich [Satz (ζ.) pg. 205] das Integral

$$F = \int \frac{df}{f} = \int d \log f \tag{a.}$$

auf der Fläche $\mathfrak{R}$ nur *rein logarithmische* Unendlichkeitspunkte. Auch sind diese Punkte [zufolge jenes Satzes] identisch mit $c_1, c_2, c_3, \ldots c_J$, und die diesen Punkten entsprechenden Logarithmus-Coefficienten des Integrals F identisch mit $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_J$.

Will man also die Betrachtungen des gegenwärtigen Paragraphs auf dieses Integral F (a.) in Anwendung bringen, so hat man zuvörderst in der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ einen von c_1 über c_2, c_3 etc. bis c_J laufenden Schnitt l auszuführen, und die so entstehende neue Fläche mit $\mathfrak{R}_{abl}$ zu bezeichnen. Alsdann wird die durch die Formel

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{df}{f} = \int_{z_0}^{z} d \log f \quad [\mathfrak{R}_{abl}] \tag{b.}$$

definirte Function $F(z)$ auf der unversehrten Fläche $\mathfrak{R}$ *eindeutig und stetig* sein, mit Ausnahme der Punkte $c_1, c_2, c_3, \ldots c_J$, ferner mit Ausnahme der Curve l, endlich mit Ausnahme der Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$).

Ferner wird diese Function im Bereich $\mathfrak{U}(c_j, z)$ oder $\mathfrak{A}(\gamma_j, \zeta)$ eines jeden Punktes c_j ($j = 1, 2, 3, \ldots J$) darstellbar sein durch die Formel

$$F(z) = \mu_j \log(\zeta - \gamma_j) + (\text{eindeut. stet. Funct. von } \zeta). \tag{c.}$$

Bezeichnet man ferner die von den Punkten $c_1, c_2, c_3, \ldots c_J$ interceptirten einzelnen Strecken der Curve l mit $l_{12}, l_{23}, l_{34}, \ldots l_{J-1,J}$, so werden die Formeln gelten:

$$\begin{aligned}
&\text{längs } l_{12}: && F(\lambda) - F(\varrho) = -2\pi i\, \mu_1, \\
&\text{längs } l_{23}: && F(\lambda) - F(\varrho) = -2\pi i\, (\mu_1 + \mu_2), \\
&\text{längs } l_{34}: && F(\lambda) - F(\varrho) = -2\pi i\, (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3), \\
&\ldots && \ldots \\
&\text{längs } l_{J-1,J}: && F(\lambda) - F(\varrho) = -2\pi i\, (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \ldots + \mu_{J-1}).
\end{aligned} \tag{d.}$$

Da ferner die Function $F(z)$ [zufolge (b.)] im gegenwärtigen Fall die Form besitzt:

$$\log f(z) - \log f(z_0),$$

also z. B. in zwei zu beiden Ufern des Schnittes $a_\varkappa$ einander gegenüber liegenden Punkten z Werthe haben muss, die sich nur um ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden können, so werden die in (8.) aufgeführten Constanten $A_\varkappa$ im gegenwärtigen Fall *ganze Vielfache von* $2\pi i$ sein. Analoges gilt von den $B_\varkappa$. Und wir erhalten also für die Schnitte $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$) die Formeln:

(e.)
$$\text{längs } a_\varkappa\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = 2\pi i\, M_\varkappa\,,$$
$$\text{längs } b_\varkappa\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = 2\pi i\, N_\varkappa\,,$$

wo die $M_\varkappa$, $N_\varkappa$ ganze Zahlen vorstellen.

Etwas einfacher gestalten sich diese durch (b.), (c.), (d.), (e.) dargestellten Sätze, wenn die Pole und Nullpunkte der gegebenen Function $f = f(z)$ sämmtlich *erster Ordnung* sind. Alsdann ist [Satz pg. 107] die Anzahl der Pole ebenso gross wie die der Nullpunkte, mithin J eine *gerade* Zahl; sodass man also die Pole mit

$$c_1\,,\ c_3\,,\ c_5\,,\ \ldots\ c_{2K-1}\,,$$

andererseits die Nullpunkte mit

$$c_2\,,\ c_4\,,\ c_6\,,\ \ldots\ c_{2K}$$

bezeichnen kann. Und gleichzeitig ist alsdann:

$$\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \ldots = \mu_{2K-1} = -1,$$

und

$$\mu_2 = \mu_4 = \mu_6 = \ldots = \mu_{2K} = +1.$$

Demgemäss verwandeln sich die rechten Seiten der Formeln (d.) alternirend in $2\pi i$ und 0; sodass also $F(z)$ längs der Strecken l_{12}, l_{34}, l_{56} etc. die Differenz $2\pi i$, und längs der Strecken l_{23}, l_{45}, l_{67} etc. *gar keine* Differenz besitzt. Man gelangt daher zu folgendem Resultat:

Es sei $f = f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function, deren Pole und Nullpunkte sämmtlich erster Ordnung sind. Die Pole seien bezeichnet mit

$$c_1\,,\ c_3\,,\ c_5\,,\ \ldots\ c_{2K-1}\,,$$

andererseits die Nullpunkte mit

$$c_2\,,\ c_4\,,\ c_6\,,\ \ldots\ c_{2K}.$$

Construirt man nun in der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ einen von c_1 nach c_2 laufenden Schnitt l_{12}, sodann einen von c_3 nach c_4 laufenden Schnitt l_{34} etc., endlich einen von c_{2K-1} nach c_{2K} laufenden Schnitt $l_{2K-1,\,2K}$, und bezeichnet man die Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ nach Ausführung dieser K Schnitte mit

$$\mathfrak{R}_{ab\,l_{12}\,l_{34}\,\ldots\,l_{2K-1,\,2K}}\,,$$

so wird die durch die Formel

(B.)
$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{df}{f} = \int_{z_0}^{z} d \log f \quad [\mathfrak{R}_{ab\,l_{12}\,l_{34}\,\ldots\,l_{2K-1,\,2K}}]$$

definirte Function $F(z)$ auf der unversehrten Fläche $\mathfrak{R}$ eindeutig und

stetig sein mit Ausnahme der Punkte $c_1, c_2, c_3, \ldots c_{2K}$, der Linien l_{12}, $l_{34}, \ldots l_{2K-1, 2K}$ und der Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$).

Ferner wird diese Function $F(z)$ im Bereich $\mathfrak{U}(c_j, z)$ oder $\mathfrak{A}(\gamma_j, \zeta)$ eines jeden Punktes c_j ($j = 1, 2, 3, \ldots 2K$) darstellbar sein durch die Formel:

(C.) $$F(z) = \mu_j \log(\zeta - \gamma_j) + (\text{eindeut. stet. Funct. von } \zeta),$$

wo $\mu_j = -1$ oder $= +1$ ist, jenachdem c_j zu den Polen oder Nullpunkten von f gehört. Endlich wird diese Function in den Curven l_{12}, l_{34} etc. *und $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ mit constanten Differenzen behaftet sein:*

(D.) $$\begin{cases} \text{längs } l_{12}: & F(\lambda) - F(\varrho) = 2\pi i, \\ \text{längs } l_{34}: & F(\lambda) - F(\varrho) = 2\pi i, \\ \ldots & \ldots \\ \text{längs } l_{2K-1, 2K}: & F(\lambda) - F(\varrho) = 2\pi i, \end{cases}$$

(E.) $$\begin{cases} \text{längs } a_\varkappa: F(\lambda) - F(\varrho) = 2\pi i\, M_\varkappa, \\ \text{längs } b_\varkappa: F(\lambda) - F(\varrho) = 2\pi i\, N_\varkappa, \end{cases}$$

wo die $M_\varkappa$, $N_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$) nicht näher bekannte ganze Zahlen vorstellen.

Zweites Beispiel. — In ähnlicher Weise ergeben sich andere, zum Theil noch einfachere Sätze, so z. B. folgender:

Es sei $\mathfrak{S}$ irgend ein einfach zusammenhängender Theil der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$. Ferner sei $f(z)$ eine auf $\mathfrak{S}$ reguläre Function, die auf $\mathfrak{S}$ nur einen Pol: c_1, und nur einen Nullpunkt: c_2 besitzt. Auch seien der Pol c_1 und der Nullpunkt c_2 beide elementarer Natur d. i. erster Ordnung.

Zieht man nun innerhalb $\mathfrak{S}$ irgend einen von c_1 nach c_2 laufenden Schnitt l, und bezeichnet die Fläche $\mathfrak{S}$ nach Ausführung dieses Schnittes mit $\mathfrak{S}_l$, so wird die durch die Formel

(F.) $$F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{df(z)}{f(z)} \quad [\mathfrak{S}_l]$$

definirte Function $F(z)$ auf $\mathfrak{S}$ eindeutig und stetig sein, mit Ausnahme der Punkte c_1, c_2 und der Linie l.

Und zwar wird dieselbe im Bereich $\mathfrak{U}(c_j, z)$ oder $\mathfrak{A}(\gamma_j, \zeta)$ des Punktes c_j ($j = 1, 2$) darstellbar sein durch die Formel:

(G.) $$F(z) = (-1)^j \log(\zeta - \gamma_j) + (\text{eind. stet. Funct. von } \zeta),$$

und längs der von c_1 nach c_2 laufenden Linie l mit der constanten Differenz $2\pi i$ behaftet sein:

(H.) $$\text{längs } l: F(\lambda) - F(\varrho) = 2\pi i.$$

Schlussbemerkung. — In diesem ganzen Capitel ist zwischen F und $F(z)$ unterschieden worden. Denn während F das *unbestimmte Integral* vorstellt, repräsentirt andererseits $F(z)$ diejenige *eindeutige Function*, in welche das *Curven-Integral* durch geeignete Beschränkung seiner Integrationscurve sich verwandelt.

Zehntes Capitel.

Anwendung der Riemann'schen Existenz-Theoreme zur Untersuchung der Abel'schen Integrale.

§ 1.

Aufstellung einiger Hülfssätze.

Die Function $f = f(z)$ sei auf irgend einem Theil $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche *eindeutig und stetig*. Ferner repräsentire

$$f = f(z) = U + iV \tag{A.}$$

die Gestalt, welche f annimmt durch Sonderung des Reellen und Imaginären. Solches festgesetzt, wird das *positiv* über den Rand von $\mathfrak{S}$ erstreckte Integral

$$\int_{\mathfrak{S}} U\,dV,$$

falls man $\mathfrak{S}$ in kleine Stücke $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots \mathfrak{U}_q$ zerlegt, folgendermassen darstellbar sein:

$$\int_{\mathfrak{S}} U\,dV = \int_{\mathfrak{U}_1} U\,dV + \int_{\mathfrak{U}_2} U\,dV + \ldots + \int_{\mathfrak{U}_q} U\,dV, \tag{B.}$$

oder, falls man jene Stücke in ihre *natürlichen* Zustände $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_q$ versetzt, auch folgendermassen:

$$\int_{\mathfrak{S}} U\,dV = \int_{\mathfrak{A}_1} U\,dV + \int_{\mathfrak{A}_2} U\,dV + \ldots + \int_{\mathfrak{A}_q} U\,dV, \tag{C.}$$

die Integrationen *positiv* erstreckt gedacht über den Rand einer jeden Fläche $\mathfrak{U}_\varkappa$ respective $\mathfrak{A}_\varkappa$.

Nach unserer Voraussetzung ist nun die Function $f = U + iV$ auf $\mathfrak{S}$, mithin auch auf $\mathfrak{U}_\varkappa$, und also auch auf $\mathfrak{A}_\varkappa$ *eindeutig und stetig*. Hieraus aber folgt [Satz pg. 27], dass das Integral

$$\int_{\mathfrak{A}_\varkappa} U\,dV$$

stets *positiv* oder *Null* ist, und überdies, dass ein Nullsein des Inte-

grals *nur dann* stattfinden kann, wenn f auf $\mathfrak{A}_\varkappa$, mithin auch auf $\mathfrak{U}_\varkappa$ *constant* ist. Demgemäss führt die Formel (C.) zu folgendem Satz:

Ist die Function $f(z) = U + iV$ auf irgend einem Theil $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ eindeutig und stetig, so wird das in positiver Richtung über den Rand von $\mathfrak{S}$ erstreckte Integral

$$\int_{\mathfrak{S}} U\,dV \tag{D.}$$

stets positiv oder Null sein. Und zwar wird ein Nullsein dieses Integrals nur dann eintreten können, wenn jene Function $f(z)$ auf $\mathfrak{S}$ allenthalben constant ist.

Entspricht nun die Function $f(z)$ den Voraussetzungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit auf der *ganzen* Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$, so kann man, bei Anwendung des vorstehenden Satzes, den Theil $\mathfrak{S}$ grösser und grösser werden lassen, bis er schliesslich in $\mathfrak{R}$ übergeht. In diesem Augenblick verschwindet alsdann die Randcurve von $\mathfrak{S}$ und mit ihr zugleich auch der Werth des Integrals (D.). Und aus diesem Verschwinden oder Nullsein des Integrals ergiebt sich alsdann, auf Grund des vorstehenden Satzes, sofort, dass $f(z)$ auf $\mathfrak{R}$ *allenthalben constant* sein muss. Also der Zusatz:

(E.) *Ist die Function $f(z)$ auf einer Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutig und stetig, so wird sie eine Constante sein.*

Dies ist der schon früher [pg. 118] gefundene Satz. Wir haben jetzt aber die Mittel in Händen, um denselben bedeutend zu verallgemeinern.

Es sei $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene Riemann'sche Kugelfläche. Wir führen in derselben irgend welchen Rückkehrschnitt σ aus, und denken uns eine auf $\mathfrak{R}$ ausgebreitete Function

$$f = f(z) = U + iV \tag{F.}$$

gegeben, welche auf dem *linken* Ufer von σ um eine gegebene Constante $C = (A + iB)$ grösser als auf dem *rechten* ist. Sind also λ und ϱ irgend zwei auf dem linken und rechten Ufer einander gegenüberliegende Punkte, so soll sein:

$$\begin{aligned} f(\lambda) - f(\varrho) &= C, \\ U(\lambda) - U(\varrho) &= A, \\ V(\lambda) - V(\varrho) &= B. \end{aligned} \tag{G.}$$

Verschiebt man die beiden einander gegenüberliegenden Punkte λ, ϱ unendlich wenig in der Richtung des Schnittes σ, bis sie nach λ', ϱ' gelangen, so erhält man in gleicher Weise:

(H.)
$$f(\lambda') - f(\varrho') = C,$$
$$U(\lambda') - U(\varrho') = A,$$
$$V(\lambda') - V(\varrho') = B,$$

$\lambda \quad \lambda'$ — σ — $\varrho \quad \varrho'$

also, falls man die Formeln (G.), (H.) von einander subtrahirt:

(I.)
$$df(\lambda) = df(\varrho),$$
$$dU(\lambda) = dU(\varrho),$$
$$dV(\lambda) = dV(\varrho),$$

wo die Differentiale der Verschiebung $\lambda\lambda'$ respective $\varrho\varrho'$ entsprechen.

Wir nehmen jetzt an, die Function $f(z) = U + iV$ sei, abgesehen von ihrer in σ vorhandenen constanten Differenz C, im Uebrigen auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutig und stetig. Oder mit andern Worten: Wir nehmen an, dass die Function diese Eigenschaften der Eindeutigkeit und Stetigkeit *ohne* irgend welche Ausnahme auf derjenigen Fläche $\mathfrak{R}_\sigma$ besitzt, welche aus $\mathfrak{R}$ selber durch Ausführung des Schnittes σ entstanden ist. Zufolge des Satzes (D.) wird alsdann das *positiv* über den Rand von $\mathfrak{R}_\sigma$ erstreckte Integral

(K.)
$$\int_{\mathfrak{R}_\sigma} U\,dV$$

stets *positiv* oder *Null* sein, und den Werth Null *nur dann* haben können, wenn $f(z)$ auf $\mathfrak{R}_\sigma$ überall *constant* ist.

Will man aber den Rand von $\mathfrak{R}_\sigma$ positiv umlaufen, so hat man die beiden Ufer von σ, und zwar das *linke* Ufer *stromabwärts*, das *rechte stromaufwärts* zu durchwandern [vgl. pg. 173]. Demgemäss nimmt das Integral (K.) die Gestalt an:

$$\int_{\mathfrak{R}_\sigma} U\,dV = \int_\sigma U(\lambda)\,dV(\lambda) - \int_\sigma U(\varrho)\,dV(\varrho),$$

wo rechter Hand beide Integrationen *stromabwärts*, d. i. in der Richtung von σ zu erstrecken sind. Demgemäss sind die beiden Differentiale $dV(\lambda)$ und $dV(\varrho)$ als Abbreviaturen für $[V(\lambda') - V(\lambda)]$ und $[V(\varrho') - V(\varrho)]$ anzusehen, mithin nach (I.) *einander gleich*. Man erhält also:

$$\int_{\mathfrak{R}_\sigma} U\,dV = \int_\sigma [U(\lambda) - U(\varrho)]\,dV(\lambda),$$

oder mit Rücksicht auf (G.):

(L.)
$$\int_{\mathfrak{R}_\sigma} U\,dV = A\int_\sigma dV(\lambda),$$

oder schliesslich, weil σ eine *geschlossene* Curve ist:

(M.)
$$\int_{\mathfrak{R}_\sigma} U\,dV = 0.$$

Aus dem Nullsein dieses Integrals ergiebt sich [zufolge des Satzes (D.)] sofort, dass $f(z)$ auf $\mathfrak{R}_\sigma$ *constant* ist. Möglicherweise indessen kann $\mathfrak{R}$ durch den Schnitt σ in zwei *getrennte* Stücke $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$ zerfallen; sodass alsdann unter $\mathfrak{R}_\sigma$ das System dieser beiden Flächen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}''$ zu verstehen sein würde. In diesem Fall würde aus dem Nullsein des Integrals (M.) der Schluss zu ziehen sein, dass die Function $f(z)$ auf $\mathfrak{R}'$ einen constanten, und auf $\mathfrak{R}''$ ebenfalls, aber vielleicht einen *andern* constanten Werth hat. Also der Satz:

(N.) *Es sei $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene Riemann'sche Kugelfläche, und σ irgend eine auf $\mathfrak{R}$ gezeichnete, in sich zurücklaufende Curve. Ist nun von einer Function $f(z)$ bekannt, dass sie, mit Ausnahme der Curve σ, auf $\mathfrak{R}$ überall eindeutig und stetig, längs jener Curve aber mit irgend welcher constanten Werthdifferenz behaftet ist; — so folgt hieraus, dass die Function eine Constante, respective ein System von zwei Constanten ist.*

Man kann diesen Satz [zufolge seiner Ableitung] sofort auf beliebig viele Curven ausdehnen, falls nur dieselben einander *nicht* schneiden; und erhält so den allgemeinern Satz:

(O.) *Sind auf $\mathfrak{R}$ beliebig viele, einander nicht schneidende geschlossene Curven $\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots$ gegeben, und ist von einer Function $f(z)$ bekannt, dass sie, abgesehen von diesen Curven, auf $\mathfrak{R}$ eindeutig und stetig, und dass sie längs jeder solchen Curve mit irgend welcher constanten Werthdifferenz behaftet ist; — so folgt hieraus, dass die Function eine Constante, respective ein System von Constanten ist.*

Unter Umständen gilt übrigens dieser Satz auch dann noch, wenn die Curven $\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots$ *einander schneiden.* Bezeichnet man nämlich die durch Ausführung dieser Curven oder Schnitte entstehende Fläche mit $\mathfrak{R}_{\sigma\sigma'\sigma''\ldots}$, so erhält man analog mit (L.):

$$\text{(P.)} \qquad \int_{\mathfrak{R}_{\sigma\sigma'\sigma''\ldots}} U\,dV = A\int_\sigma dV(\lambda) + A'\int_{\sigma'} dV(\lambda) + \ldots,$$

falls man nämlich unter $C = (A + iB)$, $C' = (A' + iB'), \ldots$ die den einzelnen Curven $\sigma, \sigma', \ldots$ entsprechenden constanten Differenzen versteht.

In dieser Formel (P.) sind jetzt die Integrale rechter Hand nicht mehr Null. So wird z. B. das erste dieser Integrale, falls σ *nur* von der Curve σ' und auch von dieser *nur* einmal geschnitten wird, den Werth $\pm B'$ haben. U. s. w. Wie dem auch sei, — jedenfalls wird die Formel (P.), falls man *annimmt*, dass $A, A', A'', \ldots$ sämmtlich $= 0$, mithin $C, C', C'' \ldots$ sämmtlich *rein imaginär* seien, die Gestalt annehmen:

(Q.) $$\int_{\mathfrak{R}_{\sigma\sigma'\sigma''\ldots}} U\,dV = 0;$$

woraus alsdann wiederum folgt, dass $f(z)$ auf $\mathfrak{R}_{\sigma\sigma'\sigma''\ldots}$ constant, respective ein System von Constanten ist.

(R.) *Schneiden also die Curven σ, σ', σ'', ... einander, so wird der vorhergehende Satz* (O.) *trotzdem noch gelten, falls nur feststeht, dass die diesen Curven entsprechenden constanten Differenzen sämmtlich* ***rein imaginär*** *sind.*

(S.) Und hieraus folgt weiter, *dass der Satz für einander schneidende Curven auch dann gilt, wenn jene Differenzen sämmtlich* ***reell*** *sind.* Denn hat z. B. $f(z)$ lauter reelle Differenzen, so wird die Function $if(z)$ lauter rein imaginäre Differenzen besitzen. U. s. w.

Der Satz (O.) gilt für jedwedes auf $\mathfrak{R}$ gezogene Curvensystem σ, σ', σ'', ..., falls nur die einzelnen Curven einander nicht schneiden, und ist daher z. B. ohne Weiteres anwendbar auf die Riemann'schen Curven a_1, a_2, ... a_p. Er lautet alsdann folgendermassen:

(1.) *Eine Function $f(z)$, welche auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Curven a_1, a_2, ... a_p, eindeutig und stetig, in diesen Curven aber mit* ***constanten*** *Differenzen behaftet ist, wird nothwendiger Weise eine* ***Constante*** *sein.*

Desgleichen kann man jenen Satz (O.) auf die Riemann'schen Curven b_1, b_2, ... b_p anwenden, mithin sagen:

(2.) *Eine Function $f(z)$, die auf $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Curven b_1, b_2, ... b_p, eindeutig und stetig, in diesen Curven aber mit* ***constanten*** *Differenzen behaftet ist, muss nothwendig eine* ***Constante*** *sein.*

Andererseits aber wird der Satz (R.), (S.) anwendbar sein auf alle $2p$ Curven $a_1, a_2, \ldots a_p, b_1, b_2, \ldots b_p$ zusammengenommen; und alsdann folgendermassen lauten:

(3.) *Eine Function $f(z)$, die auf $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Curven a_1, a_2, ... a_p, b_1, b_2, ... b_p, eindeutig und stetig, in diesen Curven aber mit* ***constanten*** *Differenzen behaftet ist, wird eine* ***Constante*** *sein, falls jene Differenzen entweder sämmtlich* ***reell****, oder aber sämmtlich* ***rein imaginär*** *sind.*

§ 2.

Vorläufige Bemerkungen über das Dirichlet'sche Minimum-Princip und die Riemann'schen Existenz-Theoreme.

Soll irgend eine Riemann'sche Kugelfläche *construirt* werden, so kann man über die Anzahl ihrer Blätter, sowie über die Anzahl,

Lage und Beschaffenheit ihrer Uebergangslinien und Windungspunkte in *willkürlicher* Weise disponiren.

(4.) *Eine solche willkürlich construirte Riemann'sche Kugelfläche mag gegeben sein; sie soll die feste und unveränderliche Basis bilden für unsere weiteren Betrachtungen. Die Fläche selber mag mit* $\mathfrak{R}$, *und der Grad ihres Zusammenhanges mit* $2p$ *bezeichnet sein. Auch mögen auf ihr die Riemann'schen Curven oder Schnitte* $a_1, a_2, \ldots a_p, b_1, b_2, \ldots b_p$ *construirt gedacht werden.*

Will man nun von Functionen $\varphi(z)$, die auf dieser Fläche $\mathfrak{R}$ *regulär* sind, respective von den Integralen solcher Functionen sprechen, so erhebt sich zuvörderst die Frage, ob derartige Functionen und Integrale wirklich *existiren*. Diese Frage ist bejahend zu beantworten, wie solches im gegenwärtigen Capitel, auf Grund des *Dirichlet'schen Minimum-Princips*, oder (besser ausgedrückt) auf Grund der von *Riemann* aus jenem Minimum-Princip abstrahirten *Existenz-Theoreme*, gezeigt werden soll*).

Und zwar wird sich in dieser Weise ergeben, dass *unendlich viele* auf $\mathfrak{R}$ reguläre Functionen $\varphi(z)$ existiren. Solches constatirt, entsteht alsdann der Wunsch, diese unendlich vielen Functionen $\varphi(z)$, sowie die zugehörigen Integrale

$$F = \int \varphi(z)\, dz$$

durch irgend welche Mittel zu *individualisiren*. Mit andern Worten: Es entsteht die Aufgabe, jedwedes individuelle φ oder F *kenntlich* zu machen, also Bedingungen zu entdecken, die zur Bestimmung eines solchen *individuellen* φ oder F ausreichend sind. — Auch zur Absolvirung dieser Aufgabe werden jene *Riemann'schen Existenz-Theoreme* die erforderlichen Mittel darbieten.

Jene Theoreme sind, wie schon bemerkt wurde, von Riemann aus einem gewissen Minimum-Princip abgeleitet worden**). Und wenn auch diese Methode der Ableitung, bei dem heutigen Standpunkte der Wissenschaft, nur als eine *mangelhafte*, höchstens als

---

*) Jenes Minimum-Princip, welches Dirichlet in seinen Vorlesungen über die dem umgekehrten Quadrat der Entfernung proportionalen Kräfte anzuwenden pflegte, verdankt übrigens seinen Ursprung wahrscheinlich einem ähnlichen Gedanken von *Gauss* [vgl. *Gauss* Ges. Werke Bd. 5, pg. 232—35 und überdies auch *Riemann*'s Ges. Werke pg. 90].

**) Die Art und Weise dieser Ableitung ist von mir näher exponirt worden in meiner kleinen Schrift: *Das Dirichlet'sche Princip, in seiner Anwendung auf die Riemann'schen Flächen.* Leipzig, bei Teubner, 1865.

eine *divinatorische* Methode anzusehen ist, so wird man trotzdem die Richtigkeit der Theoreme selber nicht zu bezweifeln wagen. In der That bin ich der Ansicht, dass man jene Theoreme in völlig strenger Art zu beweisen im Stande ist mittels der von mir entdeckten *Methode des arithmetischen Mittels*, und unter Zuhülfenahme gewisser ebenfalls von mir angegebener *combinatorischen Methoden*†).

Wie dem auch sei, — jedenfalls werde ich die in Rede stehenden Riemann'schen Theoreme im Folgenden als *correct* voraussetzen. Ich werde dieselben, ohne auf ihren Beweis einzugehen, rein *historisch* mittheilen und dieselben sodann zur Basis meiner weitern Betrachtungen nehmen.

§ 3.

Historische Mittheilung der Riemann'schen Existenz-Theoreme.

Denkt man sich auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ (4.) eine Function $f(z)$ ausgebreitet, die in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ mit irgend welchen Differenzen behaftet ist, so soll unter einer solchen Differenz stets diejenige Quantität verstanden werden, um welche die Function am *linken* Ufer grösser als am rechten ist. Nimmt man nun an, jene Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ seien auf der Fläche $\mathfrak{R}$ in bestimmter Weise festgesetzt, so gilt nach Riemann folgender Satz:

Erstes Existenz-Theorem. — *Es existirt stets eine Function $f(z)$, welche den beiden Bedingungen genügt:*

(5.) I. *$f(z)$ soll auf $\mathfrak{R}$, abgesehen von den $2p$ Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, eindeutig und stetig sein.*

II. *$f(z)$ soll in jenen Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ mit constanten Differenzen behaftet sein, deren reelle Theile vorgeschriebene Werthe besitzen.*

Aus diesem Theorem ergiebt sich, mit Rücksicht auf (36.) pg. 218, sofort die *Existenz* der Abel'schen Integrale erster Gattung.

Wir markiren jetzt auf der Fläche $\mathfrak{R}$ einen beliebigen Punkt c, und bezeichnen das Bereich dieses Punktes mit $\mathfrak{U}(c, z)$ oder $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$. Innerhalb dieses Bereiches wird alsdann die Function

$$f^*(z) = \frac{1}{(\zeta - \gamma)^N}, \quad (N = 1, 2, 3, \ldots)$$

†) Diese *Methode des arithmetischen Mittels*, sowie die in Rede stehenden *combinatorischen Methoden* sind von mir kurz angedeutet worden in den Berichten der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. (21. April und 31. Oct. 1870), sowie auch in den Math. Annalen (Bd. 11, pg. 558); sodann aber ausführlicher publicirt in meinem Werke über das *Logarithmische und Newton'sche Potential*, Leipzig, bei Teubner, 1877.

eindeutig und stetig sein, bis auf einen in c, respective γ liegenden Pol N^{ter} Ordnung. Denkt man sich nun die Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$), ferner den Punkt c und die Zahl N in bestimmter Weise festgesetzt, so gilt nach Riemann folgender Satz:

Zweites Existenz-Theorem. — *Es existirt stets eine Function $f(z)$, die den beiden Bedingungen genügt:*

(6.) I. *$f(z)$ soll, abgesehen vom Punkte c und den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$), auf $\mathfrak{R}$ eindeutig und stetig sein.*

II. *$f(z)$ soll im Punkte c in solcher Weise unstetig sein, dass die Differenz $f(z) - f^*(z)$ im Bereich des Punktes stetig bleibt. Ueberdies soll $f(z)$ in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ mit constanten Differenzen behaftet sein, deren reelle Theile vorgeschriebene Werthe besitzen.*

Aus diesem Theorem folgt, mit Rücksicht auf (42.) pg. 220, sofort die *Existenz* der elementaren Abel'schen Integrale zweiter Gattung.

Sind auf der Fläche $\mathfrak{R}$ die Riemann'schen Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ gezeichnet, und überdies irgend zwei Punkte c_1, c_2 festgesetzt, so wird man stets auf $\mathfrak{R}$ eine von c_1 nach c_2 gehende und die Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ vermeidende Linie l ziehen können. Denkt man sich für jedweden Punkt der Linie l das *Bereich* markirt, so werden all' diese Bereiche zusammengenommen ein gewisses Flächenstück bilden. Und dieses Flächenstück mag kurzweg das *Bereich der Linie l* heissen. Vgl. die Erläuterung auf pg. 240.

Es sei nun $f^*(z)$ irgend eine Function, die im *Bereich* der Linie l eindeutig und stetig ist, bis auf irgend welche in der Linie l *selbst* vorhandene Unstetigkeiten. Denkt man sich die Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, ferner die Linie l und die derselben zugehörige Function $f^*(z)$ in bestimmter Weise festgesetzt, so gilt nach Riemann folgender Satz:

Drittes Existenz-Theorem. — *Es existirt stets eine Function $f(z)$, welche die beiden Bedingungen erfüllt:*

(7.) I. *$f(z)$ soll, abgesehen von der Linie l und den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$), auf $\mathfrak{R}$ eindeutig und stetig sein;*

II. *$f(z)$ soll in der Linie l in solcher Weise unstetig sein, dass die Differenz $f(z) - f^*(z)$ im Bereich der Linie l stetig bleibt. Ueberdies soll $f(z)$ in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ mit constanten Differenzen behaftet sein, deren reelle Theile vorgeschriebene Werthe besitzen.*

Aus diesem Theorem ergiebt sich, mit Rücksicht auf (65.) pg. 227, die *Existenz* der elementaren Integrale dritter Gattung; wie solches später näher dargelegt werden wird.

Die im dritten Theorem auftretende Linie l kann beliebig kurz sein, also z. B. auch zu einem einzelnen Punkte zusammenschrumpfen.

Und mit Rücksicht hierauf erkennt man sofort, dass das frühere zweite Theorem nur ein specieller Fall des dritten ist.

Uebrigens hat Riemann selber die genannten Theoreme in einer viel complicirteren und den Ueberblick sehr erschwerenden Weise ausgesprochen [Riemann's Ges. Werke pg. 97, 98]. Ein wenig einfacher dürfte bereits die Form gewesen sein, in welcher ich diese Theoreme in der schon citirten Schrift [Das Dirichlet'sche Princip etc., bei Teubner, 1865] ausgesprochen habe. Ganz besonders aber dürfte durch ihre Einfachheit diejenige Fassung sich empfehlen, in welcher ich hier, im gegenwärtigen Paragraph, diese Theoreme dargelegt habe. Dabei sei bemerkt, dass das gegenwärtige *erste Theorem* unmittelbar aus dem Satz pg. 53 der citirten Schrift [von 1865] folgt; und dass andererseits das gegenwärtige *zweite* und *dritte Theorem* aus den Sätzen pg. 53 und 76 jener Schrift sich ergeben.

Erläuterung. — Besteht die Linie l (pg. 239) aus lauter *gewöhnlichen* Punkten (keinen Windungspunkten), so wird das *Bereich der Linie* l durch einen schmalen Flächenstreifen dargestellt sein, der die Linie l in sich enthält, und dessen Randcurve nirgends hart an l heranreicht. Doch wird man von dem Bereich der Linie l auch *dann* sich eine deutliche Vorstellung bilden können, wenn die Linie l *Windungspunkte* enthält. Ist z. B. der Ausgangspunkt c_1 der Linie l ein Windungspunkt $(m-1)$ter Ordnung, während alle übrigen Punkte von l gewöhnliche Punkte sind, so besteht das *Bereich der Linie* l aus einer kleinen um c_1 beschriebenen m-blättrigen Windungsfläche, der sich, an einer bestimmten Stelle ihrer Peripherie, ein gewöhnlicher einblättriger Flächenstreifen anschliesst.

§ 4.

Die der gegebenen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ zugehörigen Abel'schen Integrale erster Gattung.

Auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ mögen die Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ in bestimmter Weise festgesetzt und in irgend welcher Reihenfolge mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_{2p}$ bezeichnet sein. Nach dem Riemann'schen Theorem (5.) *existirt* alsdann stets eine Function $f(z)$, die folgenden Bedingungen entspricht:

I. $f(z)$ soll auf $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Curven $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{2p}$, eindeutig und stetig sein.

II. $f(z)$ soll in jenen Curven constante Differenzen besitzen: $\mathsf{\Lambda}^{(1)} + i\mathsf{M}^{(1)}$, $\mathsf{\Lambda}^{(2)} + i\mathsf{M}^{(2)}$, $\ldots$ $\mathsf{\Lambda}^{(2p)} + i\mathsf{M}^{(2p)}$, deren reelle Theile $\mathsf{\Lambda}^{(1)}, \mathsf{\Lambda}^{(2)}, \ldots \mathsf{\Lambda}^{(2p)}$ *vorgeschriebene* Werthe haben.

Auch ist die Function $f(z)$ durch die Bedingungen I., II. *vollständig bestimmt, bis auf eine additive Constante.* Denn existirten

zwei diesen Bedingungen entsprechende Functionen $f(z)$ und $f'(z)$, so würde ihre Differenz

$$\chi(z) = f(z) - f'(z)$$

auf $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Curven $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{2p}$, eindeutig und stetig, in diesen Curven aber mit constanten, und zwar rein imaginären Differenzen behaftet sein. Folglich würde sie [Satz (3.) pg. 236] eine *Constante* sein. Q. e. d.

Die durch die Bedingungen I., II. charakterisirte Function $f(z)$ ist aber nach (36.) pg. 218 ein *Abel'sches Integral erster Gattung*; so dass man also sagen kann:

(8.) *Für die gegebene Fläche $\mathfrak{R}$ existirt ein, und, abgesehen von einer unbestimmten additiven Constanten, nur ein einziges Integral erster Gattung $W(z)$, dessen constante Differenzen in den Curven $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{2p}$ vorgeschriebene reelle Theile $\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \ldots \Lambda^{(2p)}$ besitzen*).*

Jeder neuen Wahl der $\Lambda^{(\varkappa)}$ entspricht also ein neues Integral $W(z)$. Es fragt sich, wie viele unter diesen von einander linear unabhängig, nämlich von solcher Beschaffenheit sind, dass zwischen ihnen keine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten möglich ist. Um näher hierauf einzugehen, denken wir uns irgend welche Anzahl solcher Integrale: $W_1(z), W_2(z), \ldots W_q(z)$, deren constante Differenzen in den Curven $\sigma_\varkappa$ mit $\Lambda_1^{(\varkappa)} + iM_1^{(\varkappa)}$, $\Lambda_2^{(\varkappa)} + iM_2^{(\varkappa)}$, $\ldots \Lambda_q^{(\varkappa)} + iM_q^{(\varkappa)}$ bezeichnet sein mögen, und bilden sodann, unter Zuhülfenahme beliebiger Constanten $K_0, K_1, K_2 \ldots K_q$ das Aggregat:

$$w = K_0 + K_1 W_1 + K_2 W_2 \ldots + K_q W_q.$$

Diese neue Function w ist offenbar wiederum ein *Integral erster Gattung*. Denn sie ist (ebenso wie $W_1, W_2, \ldots W_q$) auf $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Curven $\sigma_\varkappa$, eindeutig und stetig, in diesen Curven aber mit constanten Differenzen behaftet. Letztere lassen sich sofort angeben. Bildet man nämlich das w für zwei auf dem linken und rechten Ufer von $\sigma_\varkappa$ einander gegenüberliegende Punkte l und r, und subtrahirt man die so entstehenden beiden Formeln von einander, so erhält man:

---

*) Während im vorhergehenden Capitel die Abel'schen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung *promiscue* mit F bezeichnet wurden, wird es zweckmässig sein, fortan eine Sonderung eintreten zu lassen. In der That werde ich fortan die Integrale *erster* Gattung mit W, w, w, ferner die *elementaren* Integrale *zweiter* Gattung mit T, t oder genauer mit T_c, t_c, endlich die *elementaren* Integrale *dritter* Gattung mit Π, ϖ oder genauer mit $\Pi_{c_1 c_2}$, $\varpi_{c_1 c_2}$ bezeichnen. Dabei sollen durch die beigefügten Indices die Unendlichkeitspunkte der in Rede stehenden Integrale angedeutet sein.

$$w(l) - w(r) = K_1 [W_1(l) - W_1(r)] + K_2 [W_2(l) - W_2(r)] + \ldots$$
$$\ldots + K_q [W_q(l) - W_q(r)],$$

d. i.

$$\lambda^{(\varkappa)} + i\mu^{(\varkappa)} = K_1(\Lambda_1^{(\varkappa)} + i\mathsf{M}_1^{(\varkappa)}) + K_2(\Lambda_2^{(\varkappa)} + i\mathsf{M}_2^{(\varkappa)}) \ldots + K_q(\Lambda_q^{(\varkappa)} + i\mathsf{M}_q^{(\varkappa)}),$$

wo alsdann $\lambda^{(\varkappa)} + i\mu^{(\varkappa)}$ die constante Differenz der Function w in der Curve $\sigma_\varkappa$ vorstellt.

Setzt man zur Sonderung des Reellen und Imaginären:

$$K_1 = L_1 - iM_1, \quad K_2 = L_2 - iM_2, \; \ldots \quad K_q = L_q - iM_q, \text{*)}$$

so ergiebt sich aus der letzten Formel für $\lambda^{(\varkappa)}$ der Ausdruck:

$$(9.) \quad \lambda^{(\varkappa)} = (L_1\Lambda_1^{(\varkappa)} + L_2\Lambda_2^{(\varkappa)} \ldots + L_q\Lambda_q^{(\varkappa)}) + (M_1\mathsf{M}_1^{(\varkappa)} + M_2\mathsf{M}_2^{(\varkappa)} \ldots + M_q\mathsf{M}_q^{(\varkappa)}),$$

und ebenso ein entsprechender Ausdruck für $\mu^{(\varkappa)}$.

Bildet man die Formel (9.) der Reihe nach für sämmtliche Curven $\sigma_\varkappa$, d. i. für $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots 2p$, so erhält man im Ganzen $2p$ Gleichungen, aus denen die Constanten L, M *eliminirbar* sein werden, falls ihre Anzahl $2q < 2p$ ist. Durch eine solche Elimination ergeben sich also dann eine oder mehrere *Relationen, durch welche die* $\lambda^{(\varkappa)}$ *direct an einander und an die* $\Lambda_\iota^{(\varkappa)}$, $\mathsf{M}_\iota^{(\varkappa)}$ *gekettet sind.*

Ist also $q < p$, und denkt man sich die Functionen $W_1, W_2, \ldots W_q$ und die denselben zugehörigen Constanten $\Lambda_\iota^{(\varkappa)}$, $\mathsf{M}_\iota^{(\varkappa)}$ in bestimmter Weise festgesetzt, so wird die Formel

$$(10.) \quad w = K_0 + K_1 W_1 + K_2 W_2 \ldots + K_q W_q,$$

wie man die K's auch wählen mag, immer nur solche w liefern, deren $\lambda^{(\varkappa)}$ an einander und an diese $\Lambda_\iota^{(\varkappa)}$, $\mathsf{M}_\iota^{(\varkappa)}$ durch jene Relationen gefesselt sind. Nimmt man daher für die $\lambda^{(\varkappa)}$ irgend welche jenen Relationen *nicht* entsprechende Constanten, so ist man sicher, dass das diesen $\lambda^{(\varkappa)}$ auf Grund des Satzes (8.) zugehörige Integral w der Formel (10.) *nicht* subsumirbar, also mit $W_1, W_2, \ldots W_q$ *nicht* durch eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten verbunden ist.

Um die Hauptsache zusammenzufassen: Sind irgend welche Integrale erster Gattung: $W_1, W_2, \ldots W_q$, deren Anzahl $q < p$ sein soll, in bestimmter Weise festgesetzt, so wird stets ein $(q + 1)$tes Integral erster Gattung existiren, *welches von* $W_1, W_2, \ldots W_q$ *linear unabhängig ist.* Bringt man aber diesen Satz der Reihe nach auf

$$q = 1, 2, 3, \ldots (p - 1)$$

in Anwendung, so gelangt man zu folgendem Resultat:

---

*) Es sollen also die L, M, ebenso wie die Λ, M, *reelle* Constanten vorstellen.

(11.) *Zur gegebenen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ gehören stets p Integrale erster Gattung: $W_1, W_2, \ldots W_p$, die von einander linear unabhängig sind, d. h. zwischen denen keine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten stattfindet.*

Denkt man sich jetzt diese $W_1, W_2, \ldots W_p$ in bestimmter Weise fixirt, so kann man aus denselben durch Multiplication mit constanten Coefficienten und Addition unendlich viele andere Integrale erster Gattung ableiten. Versteht man nämlich unter

$$K_0 = L_0 - iM_0, \quad K_1 = L_1 - iM_1, \ldots \quad K_p = L_p - iM_p$$

irgend welche *willkürlich zu wählende* Constanten, so wird das Aggregat

$$w = K_0 + K_1 W_1 + K_2 W_2 \ldots + K_p W_p, \tag{12.}$$

oder, ausführlicher geschrieben:

$$w = (L_0 - iM_0) + (L_1 - iM_1) W_1 + (L_2 - iM_2) W_2 \ldots + (L_p - iM_p) W_p \tag{13.}$$

stets wiederum ein Integral erster Gattung sein; wie solches aus unsern früheren Betrachtungen pg. 241 unmittelbar folgt. Auch sind die constanten Differenzen $\lambda^{(\varkappa)} + i\mu^{(\varkappa)}$, welche dieses neue Integral w in den Curven $\sigma_\varkappa$ besitzt, sofort angebbar. So ist z. B. [vgl. (9.)]:

$$\lambda^{(\varkappa)} = (L_1 \Lambda_1^{(\varkappa)} + L_2 \Lambda_2^{(\varkappa)} \ldots + L_p \Lambda_p^{(\varkappa)}) + (M_1 \mathsf{M}_1^{(\varkappa)} + M_2 \mathsf{M}_2^{(\varkappa)} \ldots + M_p \mathsf{M}_p^{(\varkappa)}), \tag{14.}$$
$$\varkappa = 1, 2, 3, \ldots 2p,$$

falls man nämlich unter $\Lambda_1^{(\varkappa)} + i\mathsf{M}_1^{(\varkappa)}, \Lambda_2^{(\varkappa)} + i\mathsf{M}_2^{(\varkappa)}, \ldots \Lambda_p^{(\varkappa)} + i\mathsf{M}_p^{(\varkappa)}$ die constanten Differenzen jener p Grundintegrale $W_1, W_2, \ldots W_p$ versteht.

Hieran knüpft sich die wichtige Bemerkung, dass die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Lambda_1^{(1)} & \Lambda_2^{(1)} & \ldots & \Lambda_p^{(1)} & \mathsf{M}_1^{(1)} & \mathsf{M}_2^{(1)} & \ldots & \mathsf{M}_p^{(1)} \\ \Lambda_1^{(2)} & \Lambda_2^{(2)} & \ldots & \Lambda_p^{(2)} & \mathsf{M}_1^{(2)} & \mathsf{M}_2^{(2)} & \ldots & \mathsf{M}_p^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Lambda_1^{(2p)} & \Lambda_2^{(2p)} & \ldots & \Lambda_p^{(2p)} & \mathsf{M}_1^{(2p)} & \mathsf{M}_2^{(2p)} & \ldots & \mathsf{M}_p^{(2p)} \end{vmatrix} \tag{15.}$$

nothwendiger Weise *von Null verschieden* ist. Wäre nämlich dieselbe $= 0$, so könnte man die Constanten L, M in (14.) so wählen, dass sämmtliche $\lambda^{(\varkappa)}$ *verschwinden* [man braucht zu diesem Zweck für die L, M nur gewisse Subdeterminanten von Δ zu nehmen]. Das diesen L, M entsprechende w (13.) würde alsdann in den Curven $\sigma_\varkappa$ mit lauter *rein imaginären* Differenzen behaftet, also [nach Satz (3.)] eine *Constante* sein. Es würde also dann die Formel (13.) eine zwischen den $W_1, W_2, \ldots W_p$ stattfindende Gleichung mit constanten Coefficienten vorstellen; — was der Natur der Functionen

W_1, W_2, ... W_p *widerspricht* [vgl. (11.)]. Folglich wird jene Determinante Δ (15.) nothwendiger Weise *von Null verschieden* sein.

Bemerkung. Diese von Riemann gegebene und von andern Autoren ohne Weiteres wiederholte Schlussfolgerung bedarf, falls sie *streng* sein soll, einer gewissen Modification, bei welcher nicht nur die Determinante Δ selber, sondern auch ihre *sämmtlichen Subdeterminanten* eine Rolle spielen. Dabei mag jedwede aus j Horizontal- und j Vertikalreihen bestehende Subdeterminante mit Δ_j bezeichnet werden; so dass also z. B. Δ_{2p} nichts Anderes sein wird als Δ selber, und Δ_1 nichts Anderes als eine Collectivbezeichnung sämmtlicher Elemente Λ, M.

Wir wollen nun annehmen, die Determinante Δ oder Δ_{2p} *sei* $= 0$, die hieraus sich ergebenden Consequenzen entwickeln, und zeigen, dass diese Consequenzen zu einem *Absurdum* führen.

Verschwindet Δ d. i. Δ_{2p}, so können sämmtliche $\lambda^{(\varkappa)}$ (14.) dadurch zu Null gemacht werden, das man die (quadratförmige) Tafel der $4p^2$ Subdeterminanten Δ_{2p-1} hinschreibt und die $2p$ Constanten L, M mit irgend einer beliebigen Horizontalreihe dieser Tafel identificirt. Hieraus folgt alsdann [wie vorhin ausführlich erörtert ist], dass zwischen den W_1, W_2, ... W_p eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten stattfindet; — *es sei denn, dass diese Coefficienten sämmtlich* $= 0$ *sind.*

Dieser Ausnahmefall ist aber, weil die in Rede stehenden Coefficienten durch eine *beliebige* Horizontalreihe aus der Tafel der Δ_{2p-1} dargestellt sind, nur dann von Gewicht, wenn die $4p^2$ Subdeterminanten Δ_{2p-1} *sämmtlich* verschwinden.

Verschwindet also Δ d. i. Δ_{2p}, so werden *entweder* sämmtliche Δ_{2p-1} ebenfalls verschwinden, *oder aber* es wird zwischen W_1, W_2, ... W_p eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten stattfinden. Und diesen Satz kann man, weil der *letztere* Fall [zufolge (11.)] *unmöglich* ist, einfacher so aussprechen: *Verschwindet* Δ *d. i.* Δ_{2p}, *so werden sämmtliche* Δ_{2p-1} *ebenfalls verschwinden.*

Verschwinden nun aber sämmtliche Δ_{2p-1}, so folgt hieraus weiter, durch Wiederholung der nämlichen Schlussfolge, dass auch sämmtliche Δ_{2p-2} verschwinden, sodann weiter, dass sämmtliche Δ_{2p-3} verschwinden, u. s. f. Und man gelangt also, in dieser Weise weiter und weiter gehend, schliesslich zu dem Resultat, dass auch sämmtliche Δ_1, d. i. sämmtliche Λ, M verschwinden. Um die Hauptsache hervorzuheben: *Verschwindet* Δ, *so folgt hieraus, dass sämmtliche* Λ, M *ebenfalls verschwinden.*

Die $(\Lambda + iM)$ repräsentiren aber die constanten Differenzen der Functionen W_1, W_2, ... W_p in den Curven σ. Aus dem Verschwinden sämmtlicher Λ, M würde daher [nach Satz (3.)] sich ergeben, dass die Functionen W_1, W_2, ... W_p lauter *Constanten* sind; — was der in (11.) gegebenen Definition dieser Functionen *widerspricht.*

Unsere Annahme, dass Δ *verschwindet*, führt also zu einem *absurden* Resultat. Folglich wird Δ *stets von Null verschieden* sein. Q. e. d.

Da nun Δ stets von Null verschieden ist, so kann man in den Gleichungen (14.) die Constanten L, M der Art wählen, dass die

$\lambda^{(\varkappa)}$ *beliebig vorgeschriebene* Werthe erhalten. Mit andern Worten: Man kann jene L, M der Art wählen, dass die reellen Theile derjenigen Differenzen, welche das Integral erster Gattung w (13.) in den Schnitten $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{2p}$ besitzt, *beliebig vorgeschriebene* Werthe erhalten. Hieraus aber folgt mit Rücksicht auf den Satz (8.), dass das durch die Formel (13.) dargestellte Integral w durch geeignete Wahl der Constanten L, M identisch gemacht werden kann mit *jedwedem* der Fläche $\mathfrak{R}$ zugehörigen Integral erster Gattung. Also der Satz:

Versteht man [ebenso wie in (11.)] *unter* $W_1, W_2, \ldots W_p$ *solche* p *Integrale erster Gattung, die von einander* l i n e a r *unabhängig sind* [d. i. zwischen denen keine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten stattfindet], *so wird jedwedes der Fläche* $\mathfrak{R}$ *zugehörige Integral erster Gattung durch die Formel darstellbar sein:*

$$w = K_0 + K_1 W_1 + K_2 W_2 + \ldots + K_p W_p, \tag{16.}$$

wo die K*'s Constanten sind.*

§ 5.

Die der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ zugehörigen Normalintegrale erster Gattung.

Es sei wiederum:

$$w = K_0 + K_1 W_1 + K_2 W_2 + \ldots K_p W_p, \tag{17.}$$

wo $W_1, W_2, \ldots W_p$ die in (11.) und (16.) genannten Bedeutungen haben sollen. Wir wollen jetzt aber zu unserer ursprünglichen Bezeichnungsweise zurückkehren, nämlich die $2p$ Curven $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{2p}$ wieder, nach Riemann, mit $a_1, a_2, \ldots a_p$, $b_1, b_2, \ldots b_p$ benennen. Sind $\alpha^{(\varkappa)}$ und $\mathsf{A}_1^{(\varkappa)}, \mathsf{A}_2^{(\varkappa)}, \ldots \mathsf{A}_p^{(\varkappa)}$ die (im Allgemeinen complexen) constanten Differenzen der Functionen w und $W_1, W_2, \ldots W_p$ in der Curve $a_\varkappa$, so ist nach (17.):

$$\alpha^{(\varkappa)} = K_1 \mathsf{A}_1^{(\varkappa)} + K_2 \mathsf{A}_2^{(\varkappa)} + \ldots + K_p \mathsf{A}_p^{(\varkappa)}, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots p. \tag{18.}$$

Wäre die Determinante der p^2 Grössen $\mathsf{A}_\iota^{(\varkappa)}$ gleich Null, so würde man in diesen Gleichungen (18.) die Constanten K so wählen können, dass sämmtliche $\alpha^{(\varkappa)}$ verschwinden [man brauchte zu diesem Behuf für die K nur gewisse Subdeterminanten der genannten Determinante zu nehmen]. Das diesen K entsprechende w (17.) würde alsdann in den Curven $a_\varkappa$ *gar keine* Differenzen haben, also [nach Satz (2.)] eine *Constante* sein. Demgemäss würde also die Formel (17.) in eine zwischen den $W_1, W_2, \ldots W_p$ stattfindende

Gleichung mit constanten Coefficienten sich verwandeln; — was nach (11.) *unmöglich* ist. Jene Determinante der $A_\iota^{(\varkappa)}$ ist daher stets *von Null verschieden.*

Will man diese Behauptung mit wirklicher Strenge beweisen, so hat man wieder ein analoges Verfahren einzuschlagen, wie in der Bemerkung pg. 244.

Da nun die Determinante der $A_\iota^{(\varkappa)}$ *von Null verschieden ist*, so kann man in den Gleichungen (18.) die K's so wählen, dass die $\alpha^{(\varkappa)}$ *beliebig vorgeschriebene Werthe* annehmen, z. B. so wählen, dass alle $\alpha^{(\varkappa)}$ den Werth 0 annehmen, mit alleiniger Ausnahme von $\alpha^{(1)}$, letzteres aber $= \pi i$ wird. Dass diesen speciellen K's zugehörige w (17.) mag mit w_1 bezeichnet werden. Desgleichen kann man z. B. die K's auch so wählen, dass alle $\alpha^{(\varkappa)}$, mit alleiniger Ausnahme von $\alpha^{(2)}$, verschwinden, $\alpha^{(2)}$ aber $= \pi i$ wird. Das in solcher Weise entstehende w mag w_2 heissen. U. s. f.

Bezeichnet man irgend eine beliebige unter diesen neuen Functionen $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}_3, \ldots \mathrm{w}_p$ mit w_ι, und die constanten Differenzen dieser Function w_ι in den Curven

$$a_1, a_2, \ldots a_p \quad \text{und} \quad b_1, b_2 \ldots b_p$$

respective mit

$$a_{\iota 1}, a_{\iota 2}, \ldots a_{\iota p} \quad \text{und} \quad b_{\iota 1}, b_{\iota 2}, \ldots b_{\iota p},$$

so erhält man folgende Tabelle:

(19.)

	$a_1,$	$a_2,$	$\ldots$	a_p	$b_1, b_2, \ldots b_p$
w_1	$a_{11} = \pi i,$	$a_{12} = 0$,	$\ldots$	$a_{1p} = 0$	$b_{11}, b_{12}, \ldots b_{1p}$
w_2	$a_{21} = 0$,	$a_{22} = \pi i,$	$\ldots$	$a_{2p} = 0$	$b_{21}, b_{22}, \ldots b_{2p}$
..	. . . .	. . . .	. . .	. . .	. . . .
w_p	$a_{p1} = 0$,	$a_{p2} = 0$,	$\ldots$	$a_{pp} = \pi i$	$b_{p1}, b_{p2}, \ldots b_{pp}$

Dabei sind die Constanten $b_{\iota\varkappa}$ einstweilen noch völlig unbekannt. So z. B. ist fraglich, ob $b_{\iota\varkappa}$ und $b_{\varkappa\iota}$ einander gleich sind oder nicht.

(20.) *Diese Functionen $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots \mathrm{w}_p$ mögen hinfort die p Normalintegrale erster Gattung genannt werden. Jedes derselben ist vollständig bestimmt, bis auf eine additive Constante.* Existirten nämlich *zwei* Integrale erster Gattung w_1 und w_1', welche in $a_1, a_2, a_3, \ldots a_p$ die Differenzen $\pi i, 0, 0, \ldots 0$ besitzen, so würde die Function

$$\omega = \mathrm{w}_1 - \mathrm{w}_1'$$

in jenen Curven $a_1, a_2, a_3 \ldots a_p$ *gar keine* Differenzen haben. Es würde mithin dieses ω auf der Fläche $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Cur-

ven $b_1, b_2, \ldots b_p$, *eindeutig und stetig*, in jeder dieser Curven aber mit einer constanten Differenz behaftet sein. Demgemäss würde dieses ω [nach Satz (2.)] eine *Constante* sein. *Q. e. d.*

(21.) *Die p Normalintegrale* $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots \mathrm{w}_p$ *sind von einander linear unabhängig. D. h. es kann zwischen ihnen keine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten stattfinden.* Denn existirte eine derartige Gleichung:

$$0 = K_0 + K_1 \mathrm{w}_1 + K_2 \mathrm{w}_2 \ldots + K_p \mathrm{w}_p,$$

so könnte man dieselbe z. B. bilden für zwei zu beiden Ufern der Curve a_1 einander gegenüberliegende Punkte, und würde so zwei Formeln erhalten, durch deren Subtraction sich ergiebt:

$$0 = 0 + K_1 \pi i + 0 + \ldots + 0, \quad \text{d. i. } K_1 = 0.$$

Existirte also eine Gleichung von der genannten Form, so müssten die in derselben enthaltenen Coefficienten $K_1, K_2, \ldots, K_p$ sämmtlich $= 0$ sein, wodurch die Gleichung aufhören würde, die $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots \mathrm{w}_p$ zu enthalten. *Q. e. d.*

Da nun $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots \mathrm{w}_p$ *von einander linear unabhängig sind, so ergiebt sich hieraus* [mittelst des Satzes (16.)], *dass jedwedes der Fläche* $\mathfrak{R}$ *zugehörige Integral erster Gattung W durch diese* $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots \mathrm{w}_p$ *folgendermassen ausdrückbar ist:*

$$W = K_0 + K_1 \mathrm{w}_1 + K_2 \mathrm{w}_2 \ldots + K_p \mathrm{w}_p, \tag{22.}$$

wo die K's Constanten sind.

In Betreff der Constanten $b_{\iota\varkappa}$ (19.) gelten *vier Sätze*, die wir hier sogleich angeben, aber erst im folgenden Paragraph beweisen werden.

I. *Es ist stets:*

$$b_{\iota\varkappa} = b_{\varkappa\iota}. \tag{23.}$$

II. *Bezeichnet man den Werth von* $b_{\iota\varkappa}$, *wie er bei Sonderung des Reellen und Imaginären sich gestaltet, mit*

$$b_{\iota\varkappa} = \varrho_{\iota\varkappa} + i\sigma_{\iota\varkappa}, \tag{24.}$$

und versteht man überdies unter $n_1, n_2, \ldots n_p$ *willkürliche reelle Grössen, so ist der Ausdruck*

$$\varrho_{11} n_1^2 + 2\varrho_{12} n_1 n_2 + \ldots + \varrho_{pp} n_p^2 \text{ stets } < 0, \tag{25.}$$

es sei denn, dass die $n_1, n_2, \ldots n_p$ *sämmtlich* $= 0$ *sind. In diesem besondern Fall hört der Ausdruck auf* < 0 *zu sein, indem er alsdann* $= 0$ *wird.*

III. *Die Determinante*

$$(26.)\qquad \begin{vmatrix} \varrho_{11} & \varrho_{12} & \cdots & \varrho_{1p} \\ \varrho_{21} & \varrho_{22} & \cdots & \varrho_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho_{p1} & \varrho_{p2} & \cdots & \varrho_{pp} \end{vmatrix} \text{ ist stets von Null verschieden.}$$

IV. *Sollen irgend welche positive oder negative ganze Zahlen M_1, $M_2, \ldots M_p$, $N_1, N_2, \ldots N_p$ so eingerichtet werden, dass die p Ausdrücke:*

$$(27.)\qquad \begin{aligned} Z_1 &= M_1\pi i + N_1 b_{11} + N_2 b_{21} \ldots + N_p b_{p1}, \\ Z_2 &= M_2\pi i + N_1 b_{12} + N_2 b_{22} \ldots + N_p b_{p2}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Z_p &= M_p\pi i + N_1 b_{1p} + N_2 b_{2p} \ldots + N_p b_{pp} \end{aligned}$$

sämmtlich unendlich klein werden, so ist man gezwungen, jene Zahlen M, N sämmtlich $= 0$ zu machen.

§ 6.

Nachträglicher Beweis der vier letzten Sätze.

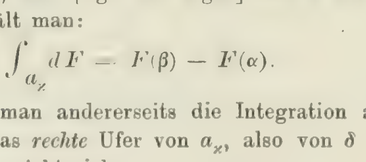
Es erscheint zweckmässig, dem Beweise dieser Sätze die *Ableitung zweier Hülfssätze*, die auch weiterhin vielfach von Nutzen sein werden, voranzuschicken.

Erster Hülfssatz. — *Denkt man sich auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ irgend eine Function F ausgebreitet, die in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ mit constanten Differenzen $A^{(\varkappa)}$, $B^{(\varkappa)}$ behaftet ist, so gelten die Formeln:*

$$(\alpha.)\qquad \int_{a_\varkappa} dF = B^{(\varkappa)}, \qquad \int_{b_\varkappa} dF = -A^{(\varkappa)},$$

die Integrationen stromabwärts hinerstreckt gedacht längs $a_\varkappa$, respective längs $b_\varkappa$. Dabei ist es gleichgültig, ob man diese Integrationen am linken oder am rechten Ufer jener Curven fortlaufen lässt.

Beweis. — Integrirt man das Differential dF *stromabwärts* längs des *linken* Ufers von $a_\varkappa$, also [vgl. die Figur] von α bis β, so erhält man:



$$\int_{a_\varkappa} dF = F(\beta) - F(\alpha).$$



Führt man andererseits die Integration aus über das *rechte* Ufer von $a_\varkappa$, also von δ bis γ, so ergiebt sich:

$$\int_{a_\varkappa} dF = F(\gamma) - F(\delta).$$

Nun ist aber die constante Differenz von F längs der *andern* Curve $b_\varkappa$ mit $B^{(\varkappa)}$ bezeichnet, folglich:

$$F(\beta) - F(\alpha) = F(\gamma) - F(\delta) = B^{(\varkappa)}.$$

Demgemäss sieht man also, dass jenes Integral

$$\int_{a_\varkappa} dF$$

stets $= B^{(\varkappa)}$ ist, einerlei, ob die Integration über das linke oder rechte Ufer von $a_\varkappa$ fortläuft.

Hiermit ist die *erste* der Formeln (α.) constatirt. In analoger Weise ergiebt sich der Beweis der *zweiten*.

Zweiter Hülfssatz. — *Denkt man sich auf der Fläche $\mathfrak{R}$ zwei Functionen F und Φ ausgebreitet, von denen die erstere in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ wiederum die constanten Differenzen $A^{(\varkappa)}$, $B^{(\varkappa)}$ besitzt, während die letztere ganz beliebig sein darf, so gilt die Formel:*

$$(\beta.)\qquad \int_{\mathfrak{R}_{ab}} \Phi\, dF = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \left\{ \int_{a_\varkappa} [\Phi(\lambda) - \Phi(\varrho)]\, dF + \int_{b_\varkappa} [\Phi(\lambda) - \Phi(\varrho)]\, dF \right\}.$$

Dabei ist das Integral linker Hand positiv erstreckt über den Rand derjenigen Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$, in welche $\mathfrak{R}$ durch Ausführung der $2p$ Schnitte $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ übergeht. Andererseits sind die Integrale rechter Hand stromabwärts erstreckt zu denken über die Curven $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$. Und zwar ist in jedem solchem Integral unter $[\Phi(\lambda) - \Phi(\varrho)]$ die Differenz derjenigen Werthe zu verstehen, welche Φ am linken und rechten Ufer der Integrationscurve besitzt.

Setzt man insbesondere voraus, dass nicht nur F, sondern ebenso auch Φ in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ constante Differenzen hat, und bezeichnet man diese Differenzen für F, wie schon festgesetzt wurde, mit $A^{(\varkappa)}$, $B^{(\varkappa)}$, andererseits für Φ mit $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$, $\mathsf{B}^{(\varkappa)}$, so nimmt die Formel (β.) die Gestalt an:

$$(\gamma.)\qquad \int_{\mathfrak{R}_{ab}} \Phi\, dF = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} (\mathsf{A}^{(\varkappa)} B^{(\varkappa)} - \mathsf{B}^{(\varkappa)} A^{(\varkappa)}).$$

Beweis. — Will man den Rand der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ *positiv* durchwandern, so hat man dabei die *linken* Ufer der Schnitte $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ *stromabwärts*, die *rechten stromaufwärts* zu durchlaufen. Will man also z. B. diejenigen Theile des Randintegrals

$$\int_{\mathfrak{R}_{ab}} \Phi\, dF$$

λ

ϱ

$\rightarrow a_\varkappa$

haben, welche den beiden Ufern von $a_\varkappa$ entsprechen, so hat man [vgl. die Figur] das Integral

$$\int \Phi(\lambda)\, dF(\lambda) \quad \textit{stromabwärts},$$

und andererseits das Integral

$$\int \Phi(\varrho)\, dF(\varrho) \quad \textit{stromaufwärts}$$

zu bilden. Statt dessen kann man beide Integrale strom*abwärts* nehmen, falls man nur dabei dem letztern den Factor (-1) zufügt. Demgemäss lautet also der den *beiden* Ufern von $a_\varkappa$ entsprechende Theil des vorgelegten Integrals folgendermassen:

$$\int_{a_\varkappa} [\Phi(\lambda)\, dF(\lambda) - \Phi(\varrho)\, dF(\varrho)].$$

Nach unserer Voraussetzung ist aber längs $a_\varkappa$:

$$F(\lambda) - F(\varrho) = A^{(\varkappa)},$$

mithin:

$$dF(\lambda) - dF(\varrho) = 0, \quad \text{d. i.} \quad dF(\lambda) = dF(\varrho).$$

Bezeichnet man jetzt den gemeinschaftlichen Werth von $dF(\lambda)$ und $dF(\varrho)$ kurzweg mit dF, so geht der in Rede stehende Integraltheil über in:

$$\int_{a_\varkappa} [\Phi(\lambda) - \Phi(\varrho)]\, dF.$$

Analoges gilt für den den *beiden* Ufern von $b_\varkappa$ entsprechenden Integraltheil. Man gelangt also in dieser Weise zur Formel (β.).

Dass schliesslich aus dem Satze (β.) sofort auch der speciellere Satz (γ.) folgt, bedarf, falls man nur die Formeln (α.) beachtet, keiner weiteren Erläuterung.

Zufolge des Hülfssatzes (γ.) ergiebt sich für die beiden Functionen w_1 und w_2 die Formel:

$$\int_{\mathfrak{R}_{ab}} w_1\, dw_2 = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} (a_{1\varkappa} b_{2\varkappa} - b_{1\varkappa} a_{2\varkappa})$$

wo die a, b die in (19.) genannten Bedeutungen haben, und wo also $a_{11} = a_{22} = \pi i$, alle übrigen a aber $= 0$ sind. Somit folgt:

$$\int_{\mathfrak{R}_{ab}} w_1\, dw_2 = \pi i\, b_{21} - \pi i\, b_{12}.$$

Das Integral linker Hand ist aber $= 0$ [Satz (4.) pg. 196]. Somit folgt $b_{21} = b_{12}$, und ebenso allgemein:

$$b_{\iota\varkappa} = b_{\varkappa\iota}. \tag{28.}$$

Somit ist also die Formel (23.) *constatirt.*

Um ferner den Satz (25.) zu beweisen, bilde man unter Zuhülfenahme willkürlicher *reeller* Constanten $n_1, n_2, \ldots n_p$ das Aggregat

$$W = n_1 w_1 + n_2 w_2 \ldots + n_p w_p,$$

und bezeichne die constanten Differenzen dieser Function W in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ mit $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$, $\mathsf{B}^{(\varkappa)}$. Ueberdies bezeichne man die Werthe W, $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$, $\mathsf{B}^{(\varkappa)}$, wie sie bei Sonderung des Reellen und Imaginären sich gestalten, in folgender Weise:

$$W = U + iV, \quad \mathsf{A}^{(\varkappa)} = \Lambda^{(\varkappa)} + i\mathsf{M}^{(\varkappa)}, \quad \mathsf{B}^{(\varkappa)} = \mathsf{P}^{(\varkappa)} + i\Sigma^{(\varkappa)}.$$

Alsdann ist nach (19.):

$$W = U + iV = n_1 w_1 + n_2 w_2 \ldots + n_p w_p,$$

$$\mathsf{A}^{(\varkappa)} = \Lambda^{(\varkappa)} + i\mathsf{M}^{(\varkappa)} = n_1 a_{1\varkappa} + n_2 a_{2\varkappa} \ldots + n_p a_{p\varkappa},$$

$$\mathsf{B}^{(\varkappa)} = \mathsf{P}^{(\varkappa)} + i\Sigma^{(\varkappa)} = n_1 b_{1\varkappa} + n_2 b_{2\varkappa} \ldots + n_p b_{p\varkappa},$$

also mit abermaliger Rücksicht auf (19.)

$$\mathsf{\Lambda}^{(\varkappa)} = 0 \quad \text{und} \quad \mathsf{M}^{(\varkappa)} = n_\varkappa \pi,$$

ferner mit Rücksicht auf (23.), (24.):

$$\mathsf{P}^{(\varkappa)} = n_1 \varrho_{1\varkappa} + n_2 \varrho_{2\varkappa} \ldots + n_p \varrho_{p\varkappa}, \text{ und } \Sigma^{(\varkappa)} = n_1 \sigma_{1\varkappa} + n_2 \sigma_{2\varkappa} \ldots + n_p \sigma_{p\varkappa}.$$

Bringt man jetzt den Hülfssatz (γ.) auf die Functionen $F = U$ und $\Phi = V$ in Anwendung, so erhält man:

$$\int_{\mathfrak{R}_{ab}} U\,dV = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} (\mathsf{\Lambda}^{(\varkappa)} \Sigma^{(\varkappa)} - \mathsf{M}^{(\varkappa)} \mathsf{P}^{(\varkappa)}),$$

oder, falls man die soeben für die $\mathsf{\Lambda}$, M, P, Σ gefundenen Werthe substituirt:

$$\int_{\mathfrak{R}_{ab}} U\,dV = -\pi \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} n_\varkappa (n_1 \varrho_{1\varkappa} + n_2 \varrho_{2\varkappa} \ldots + n_p \varrho_{p\varkappa}). \tag{29.}$$

Das Integral linker Hand ist [Satz (D.) pg. 233] stets > 0, niemals $= 0$; es sei denn, dass die Function $W = U + iV$ eine *Constante* wäre. Ein solches Constantsein des Ausdrucks

$$W = n_1 \mathrm{w}_1 + n_2 \mathrm{w}_2 \ldots + n_p \mathrm{w}_p$$

kann aber [zufolge (21)] nur dann eintreten, wenn die $n_1, n_2 \ldots n_p$ sämmtlich $= 0$ sind.

Abstrahirt man also von diesem singulären Fall, dass die n_1, $n_2, \ldots n_p$ sämmtlich verschwinden, so wird das Integral in (29.) stets > 0, mithin der in (29.) befindliche Ausdruck

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} n_\varkappa (n_1 \varrho_{1\varkappa} + n_2 \varrho_{2\varkappa} \ldots + n_p \varrho_{p\varkappa})$$

stets < 0 sein. *Hiermit aber ist der Satz* (25.) *bewiesen.*

Um ferner den Satz (26.) zu begründen, bilden wir von Neuem den Ausdruck

$$W = n_1 \mathrm{w}_1 + n_2 \mathrm{w}_2 \ldots + n_p \mathrm{w}_p, \tag{30.}$$

und bezeichnen wiederum die constanten Differenzen dieser Function W in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ mit $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$, $\mathsf{B}^{(\varkappa)}$. Die *reellen Theile* $\mathsf{\Lambda}^{(\varkappa)}$, $\mathsf{P}^{(\varkappa)}$ dieser Constanten $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$, $\mathsf{B}^{(\varkappa)}$ haben, wie vorhin gefunden wurde, die Werthe:

$$\begin{aligned} &\mathsf{\Lambda}^{(\varkappa)} = 0, \\ &\mathsf{P}^{(\varkappa)} = n_1 \varrho_{1\varkappa} + n_2 \varrho_{2\varkappa} \ldots + n_p \varrho_{p\varkappa}. \end{aligned} \tag{31.}$$

Wäre nun die Determinante der $\varrho_{\iota\varkappa}$ *gleich* 0, so könnte man in den Gleichungen (31.) die reellen Constanten $n_1, n_2, \ldots n_p$ der Art wählen, dass die $\mathsf{\Lambda}^{(\varkappa)}$ und $\mathsf{P}^{(\varkappa)}$ sämmtlich verschwinden. Das diesen speciellen $n_1, n_2, \ldots n_p$ zugehörige W (30.) würde alsdann in den

Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ lauter *rein imaginäre* constante Differenzen haben, also [nach Satz (3.)] eine *Constante* sein. Hierdurch würde die Formel (30.) sich verwandeln in eine lineare Relation mit constanten Coefficienten zwischen $w_1, w_2, \ldots w_p$. Eine derartige Relation aber ist nach (21.) *unmöglich*.

Demgemäss kann die Determinante der $\varrho_{\iota\varkappa}$ niemals $= 0$ sein; *so dass also der Beweis des Satzes* (26.) *geführt ist.*

Will man übrigens diesen Satz (26.) mit *voller Strenge* beweisen, so hat man wieder analoge Betrachtungen anzustellen, wie früher in der Bemerkung pg. 244.

Was schliesslich den Beweis des Satzes (27.) betrifft, so ist

$$Z_\varkappa = M_\varkappa \pi i + N_1 b_{1\varkappa} + N_2 b_{2\varkappa} \ldots + N_p b_{p\varkappa}, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots p. \tag{32.}$$

Bezeichnet man also den Werth dieses Ausdruckes $Z_\varkappa$, wie er bei Sonderung des Reellen und Imaginären sich gestaltet, mit

$$Z_\varkappa = \Xi_\varkappa + i \mathrm{H}_\varkappa, \tag{33.}$$

so erhält man mit Rücksicht auf (24.):

$$\Xi_\varkappa = N_1 \varrho_{1\varkappa} + N_2 \varrho_{2\varkappa} \ldots + N_p \varrho_{p\varkappa}, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots p, \tag{34.}$$

und andererseits:

$$\mathrm{H}_\varkappa = M_\varkappa \pi + N_1 \sigma_{1\varkappa} + N_2 \sigma_{2\varkappa} \ldots + N_p \sigma_{p\varkappa}, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots p. \tag{35.}$$

Aus diesen Gleichungen (34.), (35.) lassen sich die M, N berechnen, falls die Z, Ξ, H *gegeben* sind. Denkt man sich nun die gegebenen Werthe der Z, mithin auch die der Ξ und H *unendlich klein*, so erhält man aus (34.) für die N ebenfalls lauter *unendlich kleine* Werthe; denn es ist zu beachten, dass die Determinante der $\varrho_{\iota\varkappa}$ von 0 verschieden ist [zufolge (26.)]. Substituirt man diese Werthe der N in (35.), so ergeben sich für die M wiederum *unendlich kleine* Werthe.

Sollen also die Z unendlich kleine Werthe erhalten, so hat man sämmtlichen Grössen M, N ebenfalls unendlich kleine Werthe beizulegen. Letzteres aber kann, weil die M, N ganze Zahlen sein sollen, nur dadurch geschehen, dass man die M, N sämmtlich $= 0$ macht. *Hiermit ist der Satz* (27.) *bewiesen.*

§ 7.

Ueber die den Normalintegralen erster Gattung zugehörige Determinante D.

Setzt man zur Abkürzung

$$w_\sigma'(z) \text{ für } \frac{d\,w_\sigma(z)}{dz}, \quad \sigma = 1, 2, \ldots p. \tag{1.}$$

so sind offenbar [vgl. die Definitionen pg. 198] diese $w_\sigma'(z)$ lauter auf $\mathfrak{R}$ *reguläre* Functionen, also Functionen, die auf $\mathfrak{R}$ nur *einzelne* Pole, und ebenso auch nur *einzelne* Nullpunkte haben. Markirt man nun auf $\mathfrak{R}$ im Ganzen p Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$, und bildet man die Determinante:

$$(2.)\qquad D(z_1, z_2, \ldots z_p) = \begin{vmatrix} w_1'(z_1) & w_1'(z_2) & \ldots & w_1'(z_p) \\ w_2'(z_1) & w_2'(z_2) & \ldots & w_2'(z_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_p'(z_1) & w_p'(z_2) & \ldots & w_p'(z_p) \end{vmatrix},$$

so fragt es sich, ob diese Determinante vielleicht *identisch* verschwinden könne, d. h. ob sie verschwinden könne für *jedwede* Lage der p Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$. Diese Frage ist mit *Nein!* zu beantworten. Es gilt nämlich folgender, leicht zu beweisender Satz:

(3.) *Versteht man unter $\mathfrak{S}$ einen beliebig gegebenen Flächentheil von $\mathfrak{R}$ (z. B. einen beliebig kleinen Flächentheil von $\mathfrak{R}$), so werden auf $\mathfrak{S}$ stets p Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ existiren, für welche $D(z_1, z_2, \ldots z_p)$ nicht verschwindet.*

Erläuterung. — Um den Satz zu beweisen, werden wir einen apagogischen Weg einschlagen, nämlich zuvörderst *annehmen*,

(α.) *die Determinante $D(z_1, z_2, \ldots z_p)$ verschwinde stets, welche Lage die Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ auf der Fläche $\mathfrak{S}$ auch annehmen mögen;*

und sodann zeigen, dass diese Annahme zu *absurden* Resultaten hinleitet, mithin *unzulässig* ist.

Ordnet man die Determinante nach den Elementen der ersten Verticalreihe, so erhält man:

$$D(z_1, z_2, \ldots z_p) = K_1 w_1'(z_1) + K_2 w_2'(z_1) \ldots + K_p w_p'(z_1),$$

wo die K's nur noch von $z_2, z_3, \ldots z_p$ abhängen. Nimmt man nun für z_1 einen auf $\mathfrak{S}$ *variablen* Punkt, und für $z_2, z_3, \ldots z_p$ irgend welche auf $\mathfrak{S}$ *festliegende* Punkte, so folgt aus der Annahme (α.), dass für jedwede Lage des auf $\mathfrak{S}$ variirenden Punktes z_1 die Formel stattfindet:

$$0 = K_1 w_1'(z_1) + K_2 w_2'(z_1) \ldots + K_p w_p'(z_1),$$

dass mithin die von z_1 abhängende Function

$$K_1 w_1(z_1) + K_2 w_2(z_1) \ldots + K_p w_p(z_1)$$

constant ist, so lange z_1 innerhalb $\mathfrak{S}$ bleibt.

Diese Function ist aber, ebenso wie $w_1(z_1), w_2(z_1), \ldots w_p(z_1)$, auf der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ *eindeutig und stetig*. Aus ihrer Constanz auf $\mathfrak{S}$ folgt daher [mittelst des Satzes (1.) pg. 101] sofort, dass sie auf der ganzen Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$, mithin auch auf $\mathfrak{R}$ selber constant ist. Dies aber ist unmöglich. Denn zwischen $w_1(z_1), w_2(z_1), \ldots w_p(z_1)$ kann keine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten stattfinden [Satz (21.) pg. 247].

Die Annahme (α.) führt also zu einem absurden Resultat; — *es sei denn, dass jene constanten Coefficienten K sämmtlich $= 0$ wären.* Mit

andern Worten: Aus jener Annahme (α.) *folgt mit Nothwendigkeit, dass die K's sämmtlich $= 0$ sind;* wobei von Neuem daran zu erinnern ist, dass diese Constanten K lediglich dependiren von der Lage der *festen* Punkte $z_2, z_3, \ldots z_p$. Diese letztern aber waren innerhalb $\mathfrak{S}$ willkürlich gewählt. *Aus der Annahme (α.) folgt daher, dass die K's stets $= 0$ sind,*

(β.) *welche Lage man den Punkten $z_2, z_3, \ldots z_p$ innerhalb $\mathfrak{S}$ auch zuertheilen mag.*

Die K's repräsentiren die der *ersten* Vertikalreihe entsprechenden Partialdeterminanten. Zu genau demselben Resultat wird man gelangen mit Bezug auf diejenigen Partialdeterminanten, welche der *zweiten* Vertikalreihe entsprechen, u. s. f. Bezeichnet man also die Determinante D selber [weil sie von der p^{ten} Ordnung ist] mit D_p, und jedwede Subdeterminante j^{ter} Ordnung mit D_j, so kann man dem Satz (β.) folgende allgemeinere Fassung geben: *Aus der Annahme (α.), dass D oder D_p für sämmtliche*

(γ.) *Punkte $z_1, z_2, z_3, \ldots z_p$ der Fläche $\mathfrak{S}$ verschwindet, folgt mit Nothwendigkeit, dass alle Determinanten D_{p-1} die nämliche Eigenschaft besitzen.*

Hieraus aber folgt nun in analoger Weise, dass dieselbe Eigenschaft auch den D_{p-2} anhaftet, sodann, dass sie auch den D_{p-3} zukommt, u. s. f. Man gelangt so schliesslich zu den D_1, d. i. zu den Functionen $\mathrm{w}_\sigma'(z_j)$. Aus der Annahme (α.) folgt daher, dass diese $\mathrm{w}_\sigma'(z_j)$ für sämmtliche Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ der Fläche $\mathfrak{S}$ verschwinden, oder (einfacher ausgedrückt), dass die Functionen

$$\mathrm{w}_\sigma'(z), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p$$

auf der Fläche $\mathfrak{S}$ allenthalben $= 0$ sind, und dass mithin die Functionen

$$\mathrm{w}_\sigma(z), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p$$

auf $\mathfrak{S}$ allenthalben *constant* sind. Diese Functionen $\mathrm{w}_\sigma(z)$ sind aber auf $\mathfrak{R}_{ab}$ eindeutig und stetig. Aus ihrer Constanz auf $\mathfrak{S}$ folgt daher [Satz (1.) pg. 101], dass sie auf der ganzen Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$, mithin auch auf $\mathfrak{R}$ constant sind. *Die Annahme (α.) führt also schliesslich zu dem Resultat, dass*

(δ.) *die Functionen $\mathrm{w}_1(z), \mathrm{w}_2(z), \ldots \mathrm{w}_p(z)$ lauter Constanten sind; — was absurd ist.*

Folglich ist jene Annahme unzulässig, also die Richtigkeit des Satzes (3.) constatirt. *Q. e. d.*

Um den Satz (3.) unsern spätern Zwecken dienstbar zu machen, denken wir uns auf $\mathfrak{R}$ irgend einen Flächentheil $\mathfrak{S}$ abgegrenzt, welcher frei ist von den Polen der regulären Functionen

$$\mathrm{w}_\sigma'(z), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p,$$

und ferner frei ist von den Windungspunkten der Fläche $\mathfrak{R}$, sowie auch von den daselbst an der Stelle $z = \infty$ übereinander liegenden Punkten. Alsdann ist $\mathrm{w}_\sigma'(z)$ im Bereich eines jedweden innerhalb $\mathfrak{S}$ gelegenen Punktes c entwickelbar in eine Reihe von der Form:

$$(4.)\quad \mathrm{w}_\sigma'(z) = \mathrm{w}_\sigma'(c) + \mathsf{B}_\sigma(z-c) + \Gamma_\sigma(z-c)^2 + \ldots, \quad \text{[vgl. pg. 112]},$$

wo $\mathsf{B}_\sigma, \Gamma_\sigma, \ldots$ constante Coefficienten vorstellen. Markirt man also

innerhalb $\mathfrak{S}$ irgend welche Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$, beschreibt um dieselben (als Centra) auf der Fläche $\mathfrak{S}$ kleine Kreise und bezeichnet irgend welche innerhalb dieser p Kreise beliebig variirende Punkte respective mit $z_1, z_2, \ldots z_p$, so werden die Elemente $w_\sigma'(c_j)$ und $w_\sigma'(z_j)$ der beiden Determinanten

$$(5.)\qquad C = D(c_1, c_2, \ldots c_p), \quad \text{und} \quad Z = D(z_1, z_2, \ldots z_p)$$

mit einander verbunden sein durch die in (4.) angedeuteten Relationen:

$$(6.)\qquad w_\sigma'(z_j) - w_\sigma'(c_j) = \mathsf{B}_\sigma^{(j)}(z_j - c_j) + \Gamma_\sigma^{(j)}(z_j - c_j)^2 + \ldots$$

Man kann daher, wie aus diesen Relationen folgt, die genannten Kreise so klein machen, dass die Elemente der einen Determinante von denen der andern beliebig wenig abweichen, und dass mithin auch die *Werthe* der Determinanten selber beliebig wenig von einander differiren.

Denkt man sich also z. B., was zufolge des Satzes (3.) stets ausführbar ist, die festen Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ auf dem Flächentheil $\mathfrak{S}$ in solcher Weise markirt, dass die Determinante C *von* 0 *verschieden* ist, so wird man jene Kreise so klein machen können, dass die Determinante Z ebenfalls *von* 0 *verschieden* bleibt, welche Bewegung man den Punkten $z_1, z_2, \ldots z_p$ innerhalb jener Kreise auch zuertheilen mag. Demgemäss gelangt man zu folgendem Resultat:

Es sei $\mathfrak{S}$ irgend ein Theil der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$, und zwar sei dieser Theil $\mathfrak{S}$ frei von den Polen der regulären Functionen

$$w_\sigma'(z), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p,$$

ferner sei $\mathfrak{S}$ frei von den Windungspunkten der Fläche $\mathfrak{R}$, sowie auch von den bei $z = \infty$ liegenden Punkten.

Denkt man sich alsdann [was zufolge des vorhergehenden Satzes (3.) stets möglich ist] *auf $\mathfrak{S}$ p Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ markirt, für welche*

$$(7.)\qquad D(c_1, c_2, \ldots c_p)$$

von 0 *verschieden ist, so lassen sich um diese Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$* (als Centra) *Kreise von solcher Kleinheit beschreiben, dass die Determinante*

$$(8.)\qquad D(z_1, z_2, \ldots z_p)$$

beständig von 0 *verschieden bleibt, welche Bewegung man den Punkten $z_1, z_2, \ldots z_p$ innerhalb jener p Kreise auch zuertheilen mag.*

§ 8.

Die der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ zugehörigen Integrale zweiter Gattung. Definition der betreffenden Normal-Integrale.

Denkt man sich auf der Fläche $\mathfrak{R}$ ausser den Riemann'schen Curven $a_\varkappa, b_\varkappa$ noch irgend einen *Punkt* c markirt, so wird nach dem Riemann'schen Theorem (6.) pg. 239 stets eine Function $f(z)$ *existiren*, die folgenden Bedingungen entspricht:

I. $f(z)$ soll auf $\mathfrak{R}$, bis auf den Punkt c und die Linien $a_\varkappa, b_\varkappa$, eindeutig und stetig sein.

II. $f(z)$ soll im Bereich $\mathfrak{U}(c, z)$ oder $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$ des Punktes c in solcher Weise unstetig sein, dass die Differenz

$$f(z) - \frac{1}{\zeta - \gamma}$$

daselbst stetig bleibt. Ferner soll $f(z)$ in den Linien $a_\varkappa, b_\varkappa$ constante Differenzen besitzen, deren reelle Theile *beliebig vorgeschriebene* Werthe haben.

Auch ist die Function $f(z)$ *durch die Bedingungen* I., II. *vollständig bestimmt, bis auf eine additive Constante.* Denn existirten *zwei* diesen Bedingungen entsprechende Functionen $f(z)$ und $f'(z)$, so würde ihre Differenz

$$\chi(z) = f(z) - f'(z)$$

auf $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Curven $a_\varkappa, b_\varkappa$, eindeutig und stetig, in diesen Curven aber mit *rein imaginären* constanten Differenzen behaftet, also [Satz (3.) pg. 236] eine *Constante* sein. *Q. e. d.*

Diese durch die Bedingungen I., II. charakterisirte Function $f(z)$ ist aber nach (42.) pg. 220 nichts Anderes als ein *elementares Integral zweiter Gattung**): $T_c(z)$; so dass man also sagen kann:

(1.) *Für die gegebene Fläche* $\mathfrak{R}$ *existirt stets ein, und, abgesehen von einer additiven Constanten, nur ein einziges elementares Integral zweiter Gattung* $T_c(z)$, *dessen Unendlichkeitspunkt* c *eine vorgeschriebene Lage, und dessen constante Differenzen in den Curven* $a_\varkappa, b_\varkappa$ *vorgeschriebene reelle Theile besitzen.*

Ist nun $T_c(z)$ ein solches *elementares Integral zweiter Gattung*, so wird offenbar

$$T_c(z) + K_1 \mathrm{w}_1(z) + K_2 \mathrm{w}_2(z) \ldots K_p \mathrm{w}_p(z) \tag{2.}$$

wiederum ein *elementares Integral zweiter Gattung* sein; vorausgesetzt,

*) Vgl. die Note pg. 241.

dass man unter den K's Constanten, andererseits unter den $w(z)$ die Normalintegrale erster Gattung versteht. Man kann aber die K so einrichten, dass die Function (2.) in den Curven $a_\varkappa$ *gar keine* Differenzen hat. Sind nämlich $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$, $\mathsf{B}^{(\varkappa)}$ die constanten Differenzen von $T_c(z)$ in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, so braucht man zu diesem Zweck den K's nur die Werthe beizulegen:

$$K_1 = -\frac{\mathsf{A}^{(1)}}{\pi i}, \qquad K_2 = -\frac{\mathsf{A}^{(2)}}{\pi i}, \ldots \qquad K_p = -\frac{\mathsf{A}^{(p)}}{\pi i},$$

[vgl. (19.) pg. 246]. Also der Satz:

Es giebt unendlich viele elementare Integrale zweiter Gattung mit ein und demselben Unstetigkeitspunkt c. Unter diesen existirt eines, welches in den Curven $a_\varkappa$ gar keine Differenzen hat, welches also auf $\mathfrak{R}$, abgesehen vom Punkte c und den Curven $b_\varkappa$, überall eindeutig und stetig ist. Dieses besondere Integral mag mit

$$t_c(z) \tag{3.}$$

bezeichnet und das Normalintegral zweiter Gattung genannt werden.

(4.) *Dieses Normalintegral $t_c(z)$ ist durch Angabe seines Unstetigkeitspunktes c vollständig bestimmt, bis auf eine additive Constante.* Existirten nämlich *zwei* solche Integrale $t_c(z)$ und $t_c'(z)$, so würde ihre Differenz

$$\chi(z) = t_c(z) - t_c'(z)$$

auf $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Curven $b_\varkappa$, überall eindeutig und stetig, in diesen Curven aber mit constanten Differenzen behaftet, also [Satz (2.) pg. 236] eine *Constante* sein. *Q. e. d.*

Repräsentirt $T_c(z)$ ein *beliebiges* elementares Integral zweiter Gattung, ferner $t_c(z)$ das *demselben* Unstetigkeitspunkt c entsprechende Normalintegral, so wird die Function

$$T_c(z) - t_c(z)$$

auf $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, eindeutig und stetig; in diesen Curven aber mit constanten Differenzen behaftet sein. Demgemäss ist diese Function [Satz (8.) pg. 241] nichts Anderes als ein Integral erster Gattung $W(z)$. Also:

$$T_c(z) - t_c(z) = W(z).$$

Also der Satz:

Jedwedes elementare Integral zweiter Gattung $T_c(z)$ ist darstellbar in der Form:

$$T_c(z) = t_c(z) + W(z), \tag{5.}$$

wo $W(z)$ irgend ein Integral erster Gattung vorstellt.

Diesen Satz kann man übrigens [mit Rücksicht auf (22.) pg. 247] auch so aussprechen: *Jedwedes elementare Integral zweiter Gattung $T_c(z)$ ist darstellbar in der Form:*

(6.) $$T_c(z) = t_c(z) + K_0 + K_1 \mathrm{w}_1(z) + K_2 \mathrm{w}_2(z) \ldots + K_p \mathrm{w}_p(z),$$

wo die $\mathrm{w}(z)$ die Normalintegrale erster Gattung, und die K's constante Coefficienten vorstellen.

§ 9.*)

Darstellung der auf $\mathfrak{R}$ regulären Functionen mittelst der Integrale zweiter Gattung.

Es sei $f = f(z)$ irgend eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung, deren elementare Pole $c_1, c_2, \ldots c_q$ *vereinzelt* liegen, so dass also niemals zwei oder mehrere derselben mit einander zusammenfallen. Bezeichnet man irgend einen dieser elementaren Pole kurzweg mit c, so ist $f(z)$ im Bereich $\mathfrak{U}(c, z)$ oder $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$ desselben darstellbar durch

$$f(z) = (\zeta - \gamma)^{-1} E(\zeta).$$

Und diese Formel kann, falls man $E(\zeta)$ in eine Taylor'sche Reihe entwickelt, auch so geschrieben werden:

$$f(z) = \frac{K}{\zeta - \gamma} + K' + K''(\zeta - \gamma) + K'''(\zeta - \gamma)^2 + \ldots$$

oder auch so:

(7.) $$f(z) = \frac{K}{\zeta - \gamma} + (\text{eind. stet. Funct. von } \zeta),$$

wo K eine von 0 verschiedene Constante vorstellt.

Bildet man nun das diesem Punkte c entsprechende Normalintegral zweiter Gattung $t_c(z)$, so wird dasselbe [ebenso wie das allgemeinere Integral $T_c(z)$, vgl. pg. 256] im Bereich $\mathfrak{U}(c, z)$ oder $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$ des Punktes c darstellbar sein durch:

(8.) $$t_c(z) = \frac{1}{\zeta - \gamma} + (\text{eind. stet. Funct. von } \zeta).$$

Aus (7.) und (8.) folgt nun sofort, dass die Function

(9.) $$f(z) - K t_c(z)$$

im Bereich des Punktes c *eindeutig und stetig* ist.

In solcher Weise kann also die gegebene Function $f(z)$ ihrer polaren Unstetigkeit im Punkte c *beraubt* werden durch Subtraction eines Ausdrucks von der Form $K t_c(z)$. Dieses Verfahren kann nun successiv auf *sämmtliche* Pole $c_1, c_2, \ldots c_q$ in Anwendung gebracht werden. Und demgemäss wird also das Aggregat

*) Die in § 9 und § 10 aufgestellten Sätze sind nur *beiläufiger* Natur. Wenigstens wird in den weiter folgenden Paragraphen und Capiteln dieses Werks von jenen Sätzen *kein* Gebrauch gemacht werden.

$$f(z) - [K_1 t_{c_1}(z) + K_2 t_{c_2}(z) \ldots + K_q t_{c_q}(z)],$$

bei passender Bestimmung der K's, eine Function repräsentiren, die auf $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Curven $b_\varkappa$, überall *eindeutig und stetig*, in diesen Curven aber mit constanten Differenzen behaftet ist. Eine derartige Function ist aber [Satz (2.) pg. 236] eine *Constante*. Also der Satz:

Bezeichnet $f(z)$ irgend eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung mit den Polen $c_1, c_2, \ldots c_q$, so wird dieselbe stets in der Form darstellbar sein:

$$f(z) = K + K_1 t_{c_1}(z) + K_2 t_{c_2}(z) + \ldots + K_q t_{c_q}(z), \tag{10.}$$

wo die K's Constanten sind. Hieraus ergiebt sich von selber, dass diese K's folgenden Gleichungen Genüge leisten werden:

$$\begin{aligned} 0 &= K_1 \mathsf{B}_1^{(1)} + K_2 \mathsf{B}_2^{(1)} \ldots + K_q \mathsf{B}_q^{(1)}, \\ 0 &= K_1 \mathsf{B}_1^{(2)} + K_2 \mathsf{B}_2^{(2)} \ldots + K_q \mathsf{B}_q^{(2)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= K_1 \mathsf{B}_1^{(p)} + K_2 \mathsf{B}_2^{(p)} \ldots + K_q \mathsf{B}_q^{(p)}, \end{aligned} \tag{11.}$$

wo $\mathsf{B}_1^{(\varkappa)}, \mathsf{B}_2^{(\varkappa)}, \ldots \mathsf{B}_q^{(\varkappa)}$ die constanten Differenzen der Functionen $t_{c_1}(z), t_{c_2}(z), \ldots t_{c_q}(z)$ in den Curven $b_\varkappa$ vorstellen.

Dieser Satz lässt sich umkehren. *In der That übersieht man sofort, dass jedwedes Aggregat von der Form:*

$$K + K_1 t_{c_1}(z) + K_2 t_{c_2}(z) \ldots + K_q t_{c_q}(z) \tag{12.}$$

eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung sein wird, falls nur die Constanten K den Bedingungen (11.) *Genüge leisten.*

Für den Specialfall: $q = p + 1$ führt der Satz (10.), (11.), (12.), falls man die aus (11.) für die K sich ergebenden Werthe in (10.) substituirt, zu folgendem besonders einfachen Resultat:

Bezeichnet $f(z)$ irgend eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit den Polen $c_1, c_2, \ldots c_{p+1}$, so wird dieselbe stets in folgender Form darstellbar sein:

$$f(z) = K + H \begin{vmatrix} t_{c_1}(z) & t_{c_2}(z) \ldots & t_{c_{p+1}}(z) \\ \mathsf{B}_1^{(1)} & \mathsf{B}_2^{(1)} \ldots & \mathsf{B}_{p+1}^{(1)} \\ \mathsf{B}_1^{(2)} & \mathsf{B}_2^{(2)} \ldots & \mathsf{B}_{p+1}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathsf{B}_1^{(p)} & \mathsf{B}_2^{(p)} \ldots & \mathsf{B}_{p+1}^{(p)} \end{vmatrix}, \tag{13.}$$

wo K und H Constanten sind. Zur Abkürzung mag übrigens diese Formel (13.) *so geschrieben werden:*

$$f(z) = K + H\, \Phi_{c_1 c_2 \ldots c_{p+1}}(z). \tag{13a.}$$

Und umgekehrt: *Denkt man sich auf $\mathfrak{R}$ irgend welche Punkte $c_1, c_2, \ldots c_{p+1}$ ganz ad libitum markirt, so wird jede Function von der Gestalt* (13.) *oder* (13a.) *eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung sein.*

Wir haben in (3.) nachgewiesen, dass für jedwede Lage des Punktes c eine zugehörige Function $t_c(z)$ *existirt.* Nehmen wir an, wir hätten irgend welche Mittel in Händen, um für jede Lage von c diese Function $t_c(z)$ nebst den ihr zugehörigen Constanten $\mathsf{B}^{(\varkappa)}$ *wirklich zu bilden,* so werden wir auch für jedwede Lage der Punkte $c_1, c_2, \ldots c_{p+1}$ die zugehörige Function

$$\Phi_{c_1 c_2 \ldots c_{p+1}}(z)$$

zu bilden im Stande sein. Und jedwede reguläre Function $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit den Polen $c_1, c_2, \ldots c_{p+1}$ wird alsdann, nach (13.) respective (13a.), darstellbar sein durch:

$$f(z) = K + H\,\Phi_{c_1 c_2 \ldots c_{p+1}}(z),$$

wo H und K willkürliche Constanten sind.

Die $(p+1)$ Nullpunkte $z_1, z_2, \ldots z_{p+1}$ dieser Function bestimmen sich durch die Gleichung

$$0 = K + H\,\Phi_{c_1 c_2 \ldots c_{p+1}}(z),$$

und können also lediglich abhängen von $c_1, c_2, \ldots c_{p+1}$ und von dem Werth des Quotienten $\frac{H}{K}$; was angedeutet sein mag durch die Formeln:

$$\begin{aligned} z_1 &= \chi_1\left(c_1, c_2, \ldots c_{p+1}, \frac{H}{K}\right),\\ z_2 &= \chi_2\left(c_1, c_2, \ldots c_{p+1}, \frac{H}{K}\right),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ z_{p+1} &= \chi_{p+1}\left(c_1, c_2, \ldots c_{p+1}, \frac{H}{K}\right). \end{aligned}$$

Denkt man sich aber $\frac{H}{K}$ aus diesen $(p+1)$ Formeln eliminirt, so erhält man p Relationen, in denen nur noch $c_1, c_2, \ldots c_{p+1}$ und $z_1, z_2 \ldots z_{p+1}$ enthalten sind. Also der Satz:

(14.) *Sollen $(2p+2)$ auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ willkürlich markirte Punkte $c_1, c_2, \ldots c_{p+1}$ und $z_1, z_2, \ldots z_{p+1}$ die Pole und Nullpunkte irgend einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung darzustellen im Stande sein, so müssen diese Punkte gewissen p Relationen entsprechen, deren Beschaffenheit lediglich abhängt von der Gestalt der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$.* Näher sind wir diese p Relationen vorläufig

noch nicht anzugeben im Stande. Doch werden wir später (im folgenden Capitel) sehen, dass dieselben in einfacher Weise ausdrückbar sind mittelst der der Fläche $\mathfrak{R}$ zugehörigen Normalintegrale erster Gattung $w_1(z)$, $w_2(z)$, ... $w_p(z)$.

(15.) *Sollen also $c_1, c_2, \ldots c_{p+1}$ und $z_1, z_2, \ldots z_{p+1}$ die Pole und Nullpunkte einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung sein, so darf man nur $(p+2)$ dieser Punkte willkürlich wählen. Die übrigen p ergeben sich alsdann von selber auf Grund jener p Relationen.*

Ist $f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, so gilt Gleiches, falls man unter C, D irgend zwei Constanten versteht, auch von

$$F(z) = \frac{f(z) - D}{f(z) - C}.$$

Und zwar werden die Pole und Nullpunkte von $F(z)$ zwei *Niveaupunktsysteme* von $f(z)$, nämlich Punkte vorstellen, in denen $f(z)$ respective $= C$ und $= D$ wird. Demgemäss kann man den Sätzen (14.), (15.) folgende allgemeinere Fassung geben:

(16.) *Sollen $(2p+2)$ auf $\mathfrak{R}$ markirte Punkte $c_1, c_2, \ldots c_{p+1}$ und $z_1, z_2, \ldots z_{p+1}$ zwei Niveaupunktsysteme irgend einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung darzustellen im Stande sein, so müssen diese Punkte gewissen p Relationen Genüge leisten, deren Beschaffenheit lediglich abhängt von der Gestalt der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$.*

Sind also $(p+2)$ von jenen Punkten markirt, so ergeben sich die übrigen p bereits von selber auf Grund dieser p Relationen.

Weitere Ausdehnung der gefundenen Sätze. — Die soeben angestellten Betrachtungen sind durchweg ausdehnbar auf reguläre Functionen q^{ter} Ordnung, falls nur $q > p$ ist. Das dabei einzuschlagende Verfahren ist dem vorhin eingeschlagenen in solchem Grade ähnlich, dass darüber nur wenige Andeutungen erforderlich sind. So gelangt man z. B., ähnlich wie zum Satze (10.), (11.), (12.), auch zu folgendem allgemeineren Satz:

Bezeichnet $f(z)$ irgend eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung mit den Polen $c_1, c_2, \ldots c_q$, und ist $q > p$, so wird dieselbe stets in folgender Form darstellbar sein:

$$f(z) = K + \sum_{j=1}^{j=q-p} H_j \, \Phi_{c_1 c_2 c_3 \ldots c_p c_{p+j}}(z). \tag{17.}$$

Dabei repräsentirt Φ dieselbe Function wie in (13a.); *während K, H_1, H_2, ... H_{q-p} Constanten sind.*

Umgekehrt wird, bei willkürlicher Wahl von $c_1, c_2, \ldots c_q$ und $K, H_1, H_2, \ldots H_{q-p}$, jedwede Function von der Form (17.) *eine auf* $\mathfrak{R}$ ***reguläre Function q^{ter} Ordnung sein.***

Bemerkung. — $q > p$ gedacht, ist also eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung, im Ganzen mit

$$(2q - p + 1) \text{ willkürlichen Constanten}$$

behaftet, nämlich mit den q willkürlich zu wählenden Polen $c_1, c_2, \ldots c_q$ und überdies mit den $(q - p + 1)$ willkürlich zu wählenden constanten Coefficienten $K, H_1, H_2, \ldots H_{q-p}$.

Die Nullpunkte $z_1, z_2, \ldots z_q$ der Function (17.) bestimmen sich durch die Gleichung:

$$0 = K + \sum_{j=1}^{j=q-p} H_j \Phi_{c_1 c_2 c_3 \ldots c_p c_{p+j}}(z),$$

und hängen also lediglich ab von

$$c_1, c_2, c_3, \ldots c_q \quad \text{und} \quad \frac{H_1}{K}, \frac{H_2}{K}, \ldots \frac{H_{q-p}}{K}.$$

Denkt man sich diese q Formeln für $z_1, z_2, \ldots z_q$ wirklich hingestellt, und aus denselben die letzten $(q - p)$ Argumente

$$\frac{H_1}{K}, \frac{H_2}{K}, \ldots \frac{H_{q-p}}{K}$$

eliminirt, so erhält man $[q - (q - p)] = p$ Relationen, in denen nur noch $c_1, c_2, \ldots c_q$ und $z_1, z_2, \ldots z_q$ enthalten sind.

Die Pole und Nullpunkte einer regulären Function q^{ter} Ordnung sind also stets durch p Relationen mit einander verknüpft. Und dieses Resultat ist nun wiederum [vgl. den Uebergang von (14.), (15.) zu (16.)] leicht übertragbar auf zwei beliebige *Niveaupunktsysteme*; so dass man zu folgendem Satz gelangt:

(18.) *Es sei $q > p$. Sollen alsdann $2q$* auf $\mathfrak{R}$ markirte Punkte $c_1, c_2, \ldots c_q$ *und $z_1, z_2, \ldots z_q$ zwei Niveaupunktsysteme irgend einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function q^{ter} Ordnung darzustellen im Stande sein, so müssen diese Punkte gewissen p Relationen Genüge leisten, deren Beschaffenheit lediglich abhängt von der Gestalt der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$.*

§ 10.

Fortsetzung.

Es sei jetzt $q < p$. Indem wir auf diesen Fall wiederum den *allgemein gültigen Satz* (10.), (11.), (12.) anwenden, wollen wir die daselbst auftretenden Constanten $K_1, K_2, \ldots K_q$ zu *eliminiren* suchen.

Die Anzahl der Gleichungen (11.) ist $= p$, d. i.

$$= (q-1) + (p-q+1).$$

Substituirt man nun die aus den *ersten* $(q-1)$ Gleichungen für $K_1, K_2, \ldots K_q$ sich ergebenden Werthe in den $(p-q+1)$ folgenden Gleichungen, und ebenso in den Formeln (10.), (12.), so gewinnt der in Rede stehende Satz folgende Gestalt:

Ist $f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung mit den Polen $c_1, c_2, \ldots c_q$ und $q \leq p$, so wird diese Function $f(z)$ stets in der Form darstellbar sein:

$$f(z) = K + H \begin{vmatrix} t_{c_1}(z) & t_{c_2}(z) & \ldots & t_{c_q}(z) \\ \mathsf{B}_1^{(1)} & \mathsf{B}_2^{(1)} & \ldots & \mathsf{B}_q^{(1)} \\ \mathsf{B}_1^{(2)} & \mathsf{B}_2^{(2)} & \ldots & \mathsf{B}_q^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathsf{B}_1^{(q-1)} & \mathsf{B}_2^{(q-1)} & \ldots & \mathsf{B}_q^{(q-1)} \end{vmatrix}, \tag{19.}$$

wo K, H Constanten sind. Dabei werden zwischen jenen Polen $c_1, c_2, \ldots c_q$ stets folgende $(p-q+1)$ Relationen stattfinden:

$$\begin{vmatrix} \mathsf{B}_1^{(j)} & \mathsf{B}_2^{(j)} & \ldots & \mathsf{B}_q^{(j)} \\ \mathsf{B}_1^{(1)} & \mathsf{B}_2^{(1)} & \ldots & \mathsf{B}_q^{(1)} \\ \mathsf{B}_1^{(2)} & \mathsf{B}_2^{(2)} & \ldots & \mathsf{B}_q^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathsf{B}_1^{(q-1)} & \mathsf{B}_2^{(q-1)} & \ldots & \mathsf{B}_q^{(q-1)} \end{vmatrix} = 0, \tag{20.}$$

wo $j = q, (q+1), (q+2), \ldots p$.

(21.) *Umgekehrt wird jeder Ausdruck von der Form* (19.), *falls man unter K, H beliebige Constanten, und unter $c_1, c_2, \ldots c_q$ $(q < p)$ irgend welche den $(p-q+1)$ Relationen* (20.) *entsprechende Punkte versteht, eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung mit den Polen $c_1, c_2, \ldots c_q$ vorstellen.*

Bemerkung. — Die Zahl $q \leq p$ gedacht, ist also eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung im Ganzen mit

$$(2q - p + 1) \text{ *willkürlichen Constanten*}$$

behaftet. Denn jene Pole $c_1, c_2, \ldots c_q$, zwischen denen $(p-q+1)$ Relationen stattfinden, repräsentiren $[q - (p-q+1)] = (2q-p-1)$ willkürliche Constanten. Und hierzu kommen noch zwei weitere Constanten, nämlich K und H. — *Q. e. d.*

Da die q Pole $(p-q+1)$ Relationen zu entsprechen haben, so ist nothwendiger Weise:

$$q > p - q + 1, \tag{α.}$$

oder, was dasselbe:

$$q > \frac{p+1}{2}. \tag{β.}$$

Sämmtliche auf $\mathfrak{R}$ reguläre Functionen besitzen also Ordnungen, die $\geqq \frac{p+1}{2}$ sind. Dieser Satz kann noch weiter verschärft werden mittelst folgender Betrachtung:

Ist $f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung, so gilt Gleiches auch von

$$F(z) = \frac{f(z) - D}{f(z) - C},$$

falls C, D Constanten sind. Von den q Polen dieser letztern Function aber kann einer, durch geeignete Wahl von C, in eine *vorgeschriebene* Lage z_0 hineingedrängt werden. *Der allgemeine Ausdruck einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function q^{ter} Ordnung wird daher stets der Art beschaffen sein, dass einer ihrer q Pole, seiner Lage nach, vollkommen willkürlich bleibt.*

Da nun ($q < p$ gedacht) zwischen diesen q Polen $(p - q + 1)$ Relationen stattfinden müssen, *einer* derselben aber eine *willkürliche* Lage behalten muss, so folgt hieraus, dass q niemals $= (p - q + 1)$, sondern stets $> (p - q + 1)$ sein wird. Die Formel (α.) ist daher durch folgende zu ersetzen:

$$(\gamma.) \qquad q > p - q + 1;$$

und hieraus ergiebt sich:

$$(\delta.) \qquad q > \frac{p+1}{2}.$$

Also der Satz: *Repräsentirt $\mathfrak{R}$ eine $2p$-fach zusammenhängende Riemann'sche Kugelfläche, so wird die Ordnung q jedweder auf $\mathfrak{R}$ regulären Function der Formel entsprechen:*

$$(\varepsilon.) \qquad q > \frac{p+1}{2},$$

oder (was dasselbe ist) der Formel entsprechen:

$$(\zeta.) \qquad q \geqq \frac{p+2}{2};$$

es sei denn, dass die Beschaffenheit jener Fläche irgend welchen besondern Zufälligkeiten unterliegt. [Vgl. Riemann's Ges. Werke, pg. 101.]

Ist $q < p$, und sollen $2q$ auf $\mathfrak{R}$ beliebig markirte Punkte $c_1, c_2, \ldots c_q$ und $z_1, z_2, \ldots z_q$ die Pole und Nullpunkte irgend einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function q^{ter} Ordnung darzustellen im Stande sein, so müssen zuvörderst $c_1, c_2, \ldots c_q$ den in (20.) angegebenen

$$(22.) \qquad (p - q + 1) \text{ Relationen}$$

entsprechen. Diese Relationen erfüllt gedacht, wird alsdann jedwede mit den Polen $c_1, c_2, \ldots c_q$ behaftete reguläre Function q^{ter} Ordnung $f(z)$ die Gestalt (19.) haben:

$$f(z) = K + H\,\Psi_{c_1 c_2 \ldots c_q}(z),$$

wo K, H willkürliche Constanten sind, während Ψ als Abbreviatur dient für die in (19.) stehende Determinante. Die Nullpunkte $z_1, z_2, \ldots z_q$ von $f(z)$ bestimmen sich mittelst der Formel:

$$0 = K + H\Psi_{z_1 z_2 \ldots z_q}(z),$$

und hängen also ab von

$$c_1, c_2, \ldots c_q \quad \text{und} \quad \frac{H}{K}.$$

Denkt man sich diese q Formeln für $z_1, z_2, \ldots z_q$ wirklich hingestellt, und aus denselben das $\frac{H}{K}$ eliminirt, so erhält man

(23.) $$(q-1) \text{ Relationen,}$$

in denen nur noch $z_1, z_2, \ldots z_q$ und $c_1, c_2, \ldots c_q$ enthalten sind.

Die Relationen (22.) und (23.) zusammengenommen, erhält man *im Ganzen p Relationen*, also den Satz: *Ist $q < p$, so sind die Pole und Nullpunkte einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function q^{ter} Ordnung stets durch p Relationen mit einander verknüpft.* Dieses Resultat ist nun wieder [vgl. den Uebergang von (14.), (15.) zu (16.)] leicht übertragbar auf zwei beliebige *Niveaupunktsysteme*: so dass man zu folgendem Satze gelangt:

(24.) *Es sei $q < p$. Sollen alsdann $2p$ auf $\mathfrak{R}$ markirte Punkte $c_1, c_2, \ldots c_q$ und $z_1, z_2, \ldots z_q$ zwei Niveaupunktsysteme irgend einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function q^{ter} Ordnung darzustellen im Stande sein, so müssen diese Punkte gewissen p Relationen Genüge leisten, deren Beschaffenheit lediglich abhängt von der Gestalt der Fläche $\mathfrak{R}$.*

Wir sind also hier im Falle $q < p$ zu genau demselben Resultat gelangt, wie früher in (18.) für den Fall $q > p$. Die in Rede stehenden p Relationen lassen sich leicht ausdrücken mittelst der Integrale erster Gattung: wie weiterhin (im folgenden Capitel) gezeigt werden soll.

§ 11.

Die der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ zugehörigen elementaren Integrale dritter Gattung. Definition der betreffenden Normal-Integrale.

Man markire auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ irgend zwei Punkte c_1 und c_2, construire ferner die Riemann'schen Curven $a_\varkappa, b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$), und zwar in solcher Weise, dass c_1 und c_2 *nicht* hart an einer dieser Curven gelegen sind. Endlich ziehe man auf $\mathfrak{R}$ von c_1 nach c_2 eine beliebige, aber die Curven $a_\varkappa, b_\varkappa$ vermeidende Linie l.

Die Function $T_{c_1}(z)$ ist auf $\mathfrak{R}'$ regulär und daselbst nur mit einem einzigen, und zwar *elementaren* Pol c_1 behaftet: sie kann also auf $\mathfrak{R}'$ nur *einzelne* Nullpunkte haben, von denen möglicher Weise

einige gerade auf l liegen. Genau dasselbe gilt, falls man unter K_1 eine Constante versteht, auch von der Function

$$\Phi_1(z) = T_{c_1}(z) - \mathsf{K}_1 .$$

Doch wird man, was in der That geschehen mag, die Constante K_1 so wählen können, dass von den Nullpunkten dieser neuen Function $\Phi_1(z)$ *keiner* auf l liegt.

In analoger Weise kann man jetzt eine zweite Function

$$\Phi_2(z) = T_{c_2}(z) - \mathsf{K}_2$$

bilden, welche in c_2 einen *elementaren Pol*, und wiederum längs l *keinen* Nullpunkt hat.

Erläuterung. — Man bezeichne den Werth der Function $T_{c_2}(z)$ für den Augenblick mit $\Xi + i\mathsf{H}$ oder Z:

$$\mathsf{Z} = T_{c_2}(z).$$

Lässt man nun den Punkt z auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ längs der Curve l von c_1 nach c_2 fortschreiten, so wird gleichzeitig das Z auf der Z-Ebene eine correspondirende Curve Λ beschreiben, die von einem endlichen Punkte Γ_1 aus in *stetig zusammenhängender* Weise nach einem unendlich fernen Punkt Γ_2 hinläuft. Denn die Function $T_{c_2}(z)$ ist längs l, mit alleiniger Ausnahme des Punktes c_2 *stetig*; und hieraus folgt, dass die neue Curve Λ ebenfalls, mit alleiniger Ausnahme ihres Endpunktes Γ_2, eine *stetige* ist. Markirt man nun auf der Z-Ebene irgend einen Punkt K_2 *ausserhalb* der Curve Λ, so ist man sicher, dass $T_{c_2}(z)$ längs l niemals $= \mathsf{K}_2$ wird, dass mithin die Function

$$T_{c_2}(z) - \mathsf{K}_2 \quad \text{d. i.} \quad \Phi_2(z)$$

längs l keinen Nullpunkt besitzt. Analoges gilt für $\Phi_1(z)$.

Man construire jetzt das *Bereich* $\mathfrak{L}$ der Linie l. Da sämmtliche Nullpunkte von $\Phi_1(z)$ und $\Phi_2(z)$ ausserhalb l liegen, so werden dieselben, falls man das Bereich $\mathfrak{L}$ hinreichend klein macht, auch ausserhalb $\mathfrak{L}$ sich befinden. Demgemäss wird also der Quotient

$$\Psi(z) = \frac{\Phi_1(z)}{\Phi_2(z)}$$

eine auf $\mathfrak{L}$ reguläre Function sein, welche daselbst nur *einen* Pol, nämlich c_1, und nur *einen* Nullpunkt, nämlich c_2, hat. Und zwar ist sowohl der Pol wie auch der Nullpunkt von elementarer Natur, d. i. erster Ordnung.

Demgemäss wird [vgl. den Satz (F.) pg. 231] das Integral

$$f^*(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{d\Psi(z)}{\Psi(z)},$$

bei passender Einschränkung seiner Integrationscurve, eine Function von z vorstellen, die folgende Eigenschaften hat:

$f^*(z)$ ist auf $\mathfrak{L}$, abgesehen von der Linie l selber, eindeutig und stetig, und besitzt längs l die constante Differenz $2\pi i$. Ferner besitzt $f^*(z)$ in den Bereichen $\mathfrak{U}(c_1, z)$, $\mathfrak{U}(c_2, z)$ oder $\mathfrak{A}(\gamma_1, \zeta)$, $\mathfrak{A}(\gamma_2, \zeta)$ der Punkte c_1, c_2 respective die Werthe:

$$(\alpha.) \qquad f^*(z) = -\log(\zeta - \gamma_1) + (\text{eind. stet. Funct. von } \zeta),$$

$$(\beta.) \qquad f^*(z) = +\log(\zeta - \gamma_2) + (\text{eind. stet. Funct. von } \zeta).$$

Bemerkung. — Dieses etwas complicirte Verfahren zur Bildung von $f^*(z)$ kann durch ein *einfacheres* ersetzt werden, falls die Punkte c_1, c_2 weder Windungspunkte noch auch unendlich ferne Punkte sind, und falls Gleiches auch gilt von jedwedem Punkt der von c_1 nach c_2 laufenden Linie l. Alsdann nämlich kann man für Φ_1, Φ_2, Ψ die Functionen nehmen

$$\Phi_1 = \frac{1}{z - c_1}, \quad \Phi_2 = \frac{1}{z - c_2}, \quad \Psi = \frac{z - c_2}{z - c_1}.$$

Denn diese Function Ψ wird in der That eine auf $\mathfrak{L}$ reguläre Function sein, und daselbst nur den *einen* Pol c_1 und nur den *einen* Nullpunkt c_2 haben. Auch wird jeder derselben *elementarer* Natur sein. Demgemäss kann man also in dem genannten speciellen Fall für $f^*(z)$ das Integral nehmen:

$$f^*(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{d\Psi}{\Psi} = \int_{z_0}^{z} d \log \frac{z - c_2}{z - c_1},$$

falls man nur wiederum die Beweglichkeit der Integrationscurve in geeigneter Weise beschränkt.

Diese Function $f^*(z)$ bildet die Grundlage, von welcher aus wir jetzt das Riemann'sche Theorem [pg. 239] in Anwendung bringen. Zufolge dieses Theorems muss nämlich eine Function $f(z)$ *existiren*, die folgenden Bedingungen entspricht:

I. $f(z)$ soll auf $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Curven l und $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, eindeutig und stetig sein.

II. $f(z)$ soll in l in solcher Weise unstetig sein, dass die Differenz $f(z) - f^*(z)$ im Bereich $\mathfrak{L}$ stetig bleibt. Ferner soll $f(z)$ in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ constante Differenzen haben, deren reelle Theile *vorgeschriebene* Werthe besitzen.

Man kann nun den Bedingungen II., durch Rücksichtnahme auf die Beschaffenheit der Function $f^*(z)$ [vgl. $(\alpha.)$, $(\beta.)$], eine etwas andere Form geben, und demgemäss sich *so* ausdrücken:

Es existirt stets eine Function $f(z)$, die folgenden Bedingungen entspricht:

I. $f(z)$ soll auf $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Curven l, $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, eindeutig und stetig sein.

II. $f(z)$ soll in den Bereichen $\mathfrak{U}(c_1, z)$, $\mathfrak{U}(c_2, z)$ oder $\mathfrak{A}(\gamma_1, \zeta)$, $\mathfrak{A}(\gamma_2, \zeta)$ der Punkte c_1, c_2 respective die Werthe besitzen:

$$f(z) = -\log(\zeta - \gamma_1) + (\text{eind. stet. Funct. von } \zeta),$$
$$f(z) = +\log(\zeta - \gamma_2) + (\text{eind. stet. Funct. von } \zeta).$$

Ferner soll $f(z)$ in der von c_1 nach c_2 laufenden Linie l die Differenz $2\pi i$ haben. Und schliesslich soll $f(z)$ in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ constante Differenzen haben, deren reelle Theile vorgeschriebene Werthe besitzen.

Zusatz. — *Auch ist die Function $f(z)$ durch die Bedingungen* I., II. *vollständig bestimmt, bis auf eine additive Constante.* Denn existirten *zwei* diesen Bedingungen entsprechende Functionen $f(z)$ und $f'(z)$, so würde

$$\chi(z) = f(z) - f'(z)$$

auf $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, eindeutig und stetig, in diesen Curven aber mit *rein imaginären* constanten Differenzen behaftet, also [nach Satz (3.) pg. 236] eine *Constante* sein. — *Q. e. d.*

Diese durch die Bedingungen I., II. charakterisirte Function $f(z)$ ist aber nach (65.) p. 227 nichts Anderes als ein *elementares Integral dritter Gattung**) $\Pi_{c_1 c_2}(z)$; so dass man also sagen kann:

(1.) *Für die gegebene Fläche $\mathfrak{R}$ existirt stets ein, und, abgesehen von einer additiven Constanten, nur ein einziges elementares Integral dritter Gattung $\Pi_{c_1 c_2}(z)$, dessen Unstetigkeitspunkte c_1 und c_2 vorgeschriebene Lagen, und dessen constante Differenzen in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ vorgeschriebene reelle Theile besitzen.*

Von hier aus kann man nun Schritt für Schritt dieselben Ueberlegungen anstellen, wie früher [pg. 256] bei den Integralen *zweiter* Gattung, also z. B. bemerken, dass das Aggregat

$$\Pi_{c_1 c_2}(z) + K_1 w_1(z) + K_2 w_2(z) \ldots + K_p w_p(z), \tag{2.}$$

ebenso wie $\Pi_{c_1 c_2}(z)$ selber, ein elementares Integral dritter Gattung repräsentirt. Man gelangt in solcher Weise zu folgenden Sätzen:

Unter den unendlich vielen mit denselben Unstetigkeitspunkten c_1, c_2 behafteten elementaren Integralen dritter Gattung existirt eines, welches in den Curven $a_\varkappa$ gar keine Differenzen hat, welches also auf $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Curven l und $b_\varkappa$, überall eindeutig und stetig ist. Dieses besondere Integral mag mit

$$\varpi_{c_1 c_2}(z) \tag{3.}$$

bezeichnet und das Normalintegral dritter Gattung genannt werden.

(4.) *Dieses Normalintegral $\varpi_{c_1 c_2}(z)$ ist durch Angabe seiner Unstetigkeitspunkte c_1, c_2 vollständig bestimmt, bis auf eine additive Constante.*

---

*) Vergl. die Note pg. 241.

Jedwedes elementare Integral dritter Gattung $\Pi_{c_1 c_2}(z)$ kann in die Form versetzt werden:

$$\Pi_{c_1 c_2}(z) = \varpi_{c_1 c_2}(z) + W(z), \tag{5.}$$

wo $W(z)$ ein Integral erster Gattung vorstellt, oder auch in folgende Form:

$$\Pi_{c_1 c_2}(z) = \varpi_{c_1 c_2}(z) + K_0 + K_1 w_1(z) \ldots + K_p w_p(z), \tag{6.}$$

wo die $w(z)$ die Normalintegrale erster Gattung und die K's constante Coefficienten vorstellen.

§ 12.

Ueber die den elementaren Integralen dritter Gattung zugehörigen constanten Differenzen.

Wir wollen die constanten Differenzen $A^{(\varkappa)}$, $B^{(\varkappa)}$, mit denen das Integral

$$\Pi = \Pi(z) = \Pi_{c_1 c_2}(z) \tag{7.}$$

in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$) behaftet ist, näher untersuchen, indem wir uns dabei der Normalintegrale *erster* Gattung $w_\sigma(z)$, ($\sigma = 1, 2, \ldots p$), als eines zweckmässigen Instrumentes bedienen.

Bezeichnet man das Bereich der von c_1 nach c_2 laufenden Linie l mit $\mathfrak{L}$, und das nach Absonderung dieses Bereichs noch übrig bleibende Stück der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ mit $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{R}_{ab} - \mathfrak{L},$$

so sind $\Pi(z)$ und $w_\sigma(z)$ auf $\mathfrak{S}$ überall *eindeutig und stetig.* Hieraus folgt [Satz (4.) pg. 196]:

$$\int_{\mathfrak{S}} \Pi \, d w_\sigma = 0, \tag{8.}$$

die Integration positiv erstreckt über den Rand von $\mathfrak{S}$. Will man aber $\mathfrak{S}$ positiv umlaufen, so hat man erstens den Rand von $\mathfrak{R}_{ab}$ *positiv*, und sodann den Rand von $\mathfrak{L}$ *negativ* zu durchwandern. Demgemäss kann die Formel (8.) auch so geschrieben werden:

$$\int_{\mathfrak{R}_{ab}} \Pi \, d w_\sigma - \int_{\mathfrak{L}} \Pi \, d w_\sigma = 0, \tag{9.}$$

wo die Indices $\mathfrak{R}_{ab}$ und $\mathfrak{L}$ die den betreffenden Flächen entsprechenden *positiven* Randintegrationen andeuten. Diese Formel (9.), welche, weil $\Pi \, d w_\sigma = d(\Pi w_\sigma) - w_\sigma d\Pi$ ist, auch so geschrieben werden kann:

$$\int_{\mathfrak{R}_{ab}} \Pi \, d w_\sigma + \int_{\mathfrak{L}} w_\sigma \, d\Pi = 0, \tag{10.}$$

wird gültig bleiben *bei beliebiger Verkleinerung* des Bereiches $\mathfrak{L}$. Man kann also z. B. $\mathfrak{L}$ zusammenschrumpfen lassen auf die Bereiche $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ der Punkte c_1, c_2 und das zwischen $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ liegende Segment der Curve l. Hat man aber $\mathfrak{L}$ in dieser Weise reducirt, so nimmt das zweite Integral der Formel (10.) die Gestalt an:

$$\int_{\mathfrak{L}} \mathrm{w}_\sigma \, d\Pi = \int_{\mathfrak{U}_1} \mathrm{w}_\sigma \, d\Pi + \int_l [\mathrm{w}_\sigma(\lambda) - \mathrm{w}_\sigma(\varrho)] \, d\Pi + \int_{\mathfrak{U}_2} \mathrm{w}_\sigma \, d\Pi;$$

wie solches sich unmittelbar ergiebt, falls man nur beachtet, dass Π längs l eine *constante* Differenz ($= 2\pi i$) hat, dass mithin das Differential $d\Pi$ zu beiden Ufern von l *einerlei* Werthe besitzt. Nun ist aber w_σ auf $\mathfrak{R}_{\alpha l}$, mithin z. B. auch in der Linie l stetig, also $\mathrm{w}_\sigma(\lambda) - \mathrm{w}_\sigma(\varrho) = 0$. Demgemäss folgt:

$$\int_{\mathfrak{L}} \mathrm{w}_\sigma \, d\Pi = \int_{\mathfrak{U}_1} \mathrm{w}_\sigma \, d\Pi + \int_{\mathfrak{U}_2} \mathrm{w}_\sigma \, d\Pi;$$

so dass also die Formel (10.) übergeht in:

$$(11.) \qquad \int_{\mathfrak{R}_{\alpha l}} \Pi \, d\mathrm{w}_\sigma + \int_{\mathfrak{U}_1} \mathrm{w}_\sigma \, d\Pi + \int_{\mathfrak{U}_2} \mathrm{w}_\sigma \, d\Pi = 0.$$

Bezeichnet man jetzt irgend einen der beiden Punkte c_1, c_2 mit c_j, und sein Bereich mit $\mathfrak{U}_j(c_j, z)$ oder $\mathfrak{A}_j(\gamma_j, \zeta)$, so ist innerhalb dieses Bereiches:

$$\Pi = (-1)^j \log(\zeta - \gamma_j) + O(\zeta),$$

wo $O(\zeta)$ eine eindeutige und stetige Function vorstellt. Hieraus folgt:

$$d\Pi = \frac{(-1)^j d\zeta}{\zeta - \gamma_j} + dO(\zeta),$$

also, falls man mit w_σ multiplicirt, und über den Rand von $\mathfrak{U}_j$ oder $\mathfrak{A}_j$ integrirt:

$$\int_{\mathfrak{U}_j} \mathrm{w}_\sigma \, d\Pi = \int_{\mathfrak{A}_j} \mathrm{w}_\sigma \, d\Pi = (-1)^j \int_{\mathfrak{A}_j} \frac{\mathrm{w}_\sigma \, d\zeta}{\zeta - \gamma_j} + \int_{\mathfrak{A}_j} \mathrm{w}_\sigma \, dO(\zeta).$$

Nach bekannten Sätzen [(16.) pg. 23 und (10.) pg. 21] ist aber das *letzte* Integral $= 0$, und das *vorletzte* $= 2\pi i \, \mathrm{w}_\sigma[\gamma_j]$, d. i. $= 2\pi i \, \mathrm{w}_\sigma(c_j)$, falls man nämlich unter $\mathrm{w}_\sigma[\gamma_j]$ oder $\mathrm{w}_\sigma(c_j)$ den Werth der Function w_σ in γ_j respective in c_j versteht. Somit folgt:

$$(\text{f.}) \qquad \int_{\mathfrak{U}_j} \mathrm{w}_\sigma \, d\Pi = (-1)^j \cdot 2\pi i \, \mathrm{w}_\sigma(c_j), \quad \text{wo } j = 1, 2.$$

Dies in (11.) substituirt, erhält man:

$$(12.) \qquad \int_{\mathfrak{R}_{\alpha l}} \Pi \, d\mathrm{w}_\sigma = 2\pi i [\mathrm{w}_\sigma(c_1) - \mathrm{w}_\sigma(c_2)].$$

Das Integral linker Hand hat aber [zufolge des Hülfssatzes ($\gamma.$) pg. 249] den Werth:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} [\mathsf{A}^{(\varkappa)} b_{\sigma\varkappa} - \mathsf{B}^{(\varkappa)} a_{\sigma\varkappa}],$$

wo $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$, $\mathsf{B}^{(\varkappa)}$ und $a_{\sigma\varkappa}$, $b_{\sigma\varkappa}$ die constanten Differenzen von Π und w_σ in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ vorstellen. Substituirt man diesen Werth in (12.), und berücksichtigt man dabei zugleich die eigenthümlichen Werthe [(19.) pg. 246] der Constanten $a_{\sigma\varkappa}$, so erhält man:

$$\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \mathsf{A}^{(\varkappa)} b_{\sigma\varkappa}\right) - \mathsf{B}^{(\sigma)}\pi i = 2\pi i[\mathrm{w}_\sigma(c_1) - \mathrm{w}_\sigma(c_2)], \tag{13.}$$

wo σ eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots p$ vorstellt. Demgemäss gelangt man zu folgendem Satz:

Bezeichnet

$$\Pi_{c_1 c_2}(z) \tag{14.}$$

ein beliebiges elementares Integral dritter Gattung mit den Unendlichkeitspunkten c_1 *und* c_2, *so werden die constanten Differenzen* $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$, $\mathsf{B}^{(\varkappa)}$, *mit denen dieses Integral in den Curven* $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$) *behaftet ist, jederzeit folgenden Relationen entsprechen:*

$$\mathsf{A}^{(1)} b_{1\sigma} + \mathsf{A}^{(2)} b_{2\sigma} \ldots + \mathsf{A}^{(p)} b_{p\sigma} - \mathsf{B}^{(\sigma)}\pi i = 2\pi i[\mathrm{w}_\sigma(c_1) - \mathrm{w}_\sigma(c_2)], \quad \sigma = 1, 2, \ldots p. \tag{15.}$$

Dabei bezeichnen die b's *die den Normalintegralen erster Gattung* w_1, $\mathrm{w}_2, \ldots \mathrm{w}_p$ *zugehörigen Constanten* [(19. pg. 246)].

Nimmt man insbesondere statt des Integrals (14.) das betreffende *Normal*-Integral $\varpi_{c_1 c_2}(z)$, so sind die A's sämmtlich $= 0$ [vgl. pg. 268]; so dass die Relationen alsdann übergehen in:

$$-\mathsf{B}^{(\sigma)} = 2[\mathrm{w}_\sigma(c_1) - \mathrm{w}_\sigma(c_2)], \quad \sigma = 1, 2, \ldots p.$$

Vertauscht man hier den Buchstaben σ mit $\varkappa$, so gelangt man zu folgendem Zusatz:

Das den Unendlichkeitspunkten c_1, c_2 *entsprechende Normalintegral dritter Gattung*

$$\varpi_{c_1 c_2}(z) \tag{16.}$$

besitzt in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$) *folgende Differenzen:*

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\varkappa\text{: } \varpi_{c_1 c_2}(\lambda) - \varpi_{c_1 c_2}(\varrho) = 0, \\ &\text{längs } b_\varkappa\text{: } \varpi_{c_1 c_2}(\lambda) - \varpi_{c_1 c_2}(\varrho) = 2[\mathrm{w}_\varkappa(c_2) - \mathrm{w}_\varkappa(c_1)]. \end{aligned} \tag{17.}$$

Diese Differenzen drücken sich also in einfacher Weise mittelst derjenigen Werthe aus, welche die Normalintegrale erster Gattung w_1, $\mathrm{w}_2, \ldots \mathrm{w}_p$ *in jenen Punkten* c_1 *und* c_2 *besitzen.*

§ 13.

Bemerkungen über die Integrale erster Gattung.

Jedwedes Integral erster Gattung $W(z)$ ist auf der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ *eindeutig und stetig.* Folglich wird

$$\eta(z) = e^{W(z)}$$

nicht nur dieselben Eigenschaften haben, sondern überdies auch eine Function sein, die auf $\mathfrak{R}_{ab}$ *nirgends verschwindet.* Denn zum Verschwinden von $\eta(z)$ würde ein Unendlichwerden von $W(z)$ erforderlich sein; was der Natur von $W(z)$ widerspricht.

Bezeichnet man ferner irgend zwei am linken und rechten Ufer von $a_\varkappa$ einander gegenüberliegende Punkte mit λ und ϱ, so ist

$$\eta(\lambda) = e^{W(\lambda)} \quad \text{und} \quad \eta(\varrho) = e^{W(\varrho)},$$

folglich:

$$\frac{\eta(\lambda)}{\eta(\varrho)} = e^{W(\lambda) - W(\varrho)} = e^{A^{(\varkappa)}},$$

falls nämlich $A^{(\varkappa)}$ die constante Differenz der Function $W(z)$ in der Curve $a_\varkappa$ vorstellt.

Analoges gilt für $b_\varkappa$; so dass man also zu folgendem Satz gelangt: *Ist $W(z)$ irgend ein Integral erster Gattung, so wird die Function*

$$\eta(z) = e^{W(z)} \tag{1.}$$

auf $\mathfrak{R}_{ab}$ eindeutig, stetig und nichtverschwindend sein, also den Charakter der Functionen $E(z)$ besitzen. Ueberdies wird $\eta(z)$ in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ mit constanten Quotienten behaftet sein, nämlich den Formeln entsprechen:

$$\begin{aligned} &\textit{längs } a_\varkappa\colon \quad \frac{\eta(\lambda)}{\eta(\varrho)} = e^{A^{(\varkappa)}}, \\ &\textit{längs } b_\varkappa\colon \quad \frac{\eta(\lambda)}{\eta(\varrho)} = e^{B^{(\varkappa)}}, \end{aligned} \tag{2.}$$

wo $A^{(\varkappa)}$, $B^{(\varkappa)}$ die constanten Differenzen von $W(z)$ in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ vorstellen.

Nach (22.) pg. 247 ist jedwedes Integral erster Gattung $W(z)$ in der Form darstellbar:

$$W(z) = K_0 + K_1 \mathrm{w}_1(z) + K_2 \mathrm{w}_2(z) \ldots + K_p \mathrm{w}_p(z);$$

so dass man also [vgl. (19.) pg. 246] für $A^{(\varkappa)}$, $B^{(\varkappa)}$ die Werthe erhält:

$$\begin{aligned} A^{(\varkappa)} &= K_1 a_{1\varkappa} + K_2 a_{2\varkappa} \ldots + K_p a_{p\varkappa} = K_\varkappa \pi i, \\ B^{(\varkappa)} &= K_1 b_{1\varkappa} + K_2 b_{2\varkappa} \ldots + K_p b_{p\varkappa}. \end{aligned}$$

Demgemäss kann man den Satz (1.), (2.) auch so aussprechen:

Sind $K_0, K_1, K_2, \ldots K_p$ beliebige Constanten, so wird die Function

$$\eta(z) = e^{K_0 + K_1 \mathrm{w}_1(z) + K_2 \mathrm{w}_2(z) \ldots + K_p \mathrm{w}_p(z)} \tag{3.}$$

auf $\mathfrak{R}_{ab}$ eindeutig, stetig und nichtverschwindend, überdies aber in den Curven $a_\varkappa, b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$) mit folgenden constanten Quotienten behaftet sein:

$$\text{längs } a_\varkappa\text{:} \quad \frac{\eta(\lambda)}{\eta(\varrho)} = e^{K_\varkappa \pi i}, \tag{4.}$$

$$\text{längs } b_\varkappa\text{:} \quad \frac{\eta(\lambda)}{\eta(\varrho)} = e^{K_1 b_{1\varkappa} + K_2 b_{2\varkappa} \ldots + K_p b_{p\varkappa}}.$$

§. 14.

Bemerkungen über die Integrale dritter Gattung.

Vergegenwärtigt man sich [pg. 226 und 268] die Eigenschaften des Integrals dritter Gattung $\Pi_{c_1 c_2}(z)$, so erkennt man sofort, dass die Function

$$\Phi(z) = e^{\Pi_{c_1 c_2}(z)}$$

auf der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$, mit Ausnahme der Punkte c_1, c_2, *eindeutig, stetig* und *nichtverschwindend* ist. Im Bereich $\mathfrak{U}(c_j, z)$ oder $\mathfrak{A}(\gamma_j, \zeta)$ des Punktes c_j ist:

$$\Pi_{c_1 c_2}(z) = (-1)^j \log(\zeta - \gamma_j) + O_j(\zeta),$$

wo $O_j(\zeta)$ eine *eindeutige und stetige* Function vorstellt. Hieraus folgt mit Bezug auf dasselbe Bereich:

$$\Phi(z) = (\zeta - \gamma_j)^{(-1)^j} . E_j(\zeta),$$

wo $E_j(\zeta) = e^{O_j(\zeta)}$ eine Function repräsentirt, die *eindeutig, stetig* und *nichtverschwindend* ist. Setzt man j successive $= 1, 2$, so erhält man für c_1:

$$\Phi(z) = (\zeta - \gamma_1)^{-1} E_1(\zeta),$$

und für c_2:

$$\Phi(z) = (\zeta - \gamma_2)^{+1} E_2(\zeta);$$

woraus folgt, dass $\Phi(z)$ in c_1 einen *elementaren Pol*, andererseits in c_2 einen *elementaren Nullpunkt* hat.

Was die Werthe von $\Phi(z)$ in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ betrifft, so findet man sofort:

$$\text{längs } a_\varkappa\text{:} \quad \frac{\Phi(\lambda)}{\Phi(\varrho)} = e^{\mathsf{A}^{(\varkappa)}},$$

$$\text{längs } b_\varkappa\text{:} \quad \frac{\Phi(\lambda)}{\Phi(\varrho)} = e^{\mathsf{B}^{(\varkappa)}},$$

wo $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$, $\mathsf{B}^{(\varkappa)}$ die constanten Differenzen von $\Pi_{c_1 c_2}(z)$ in diesen Curven vorstellen.

Vertauscht man schliesslich die Function $\Pi_{c_1 c_2}(z)$ mit der *speciellern* Function $\varpi_{c_1 c_2}(z)$, und beachtet, dass in diesem Fall

$$\mathsf{A}^{(\varkappa)} = 0 \quad \text{und} \quad \mathsf{B}^{(\varkappa)} = 2[\mathrm{w}_\varkappa(c_2) - \mathrm{w}_\varkappa(c_1)]$$

wird [vgl. (17.) pg. 271], so gelangt man, falls man die Buchstaben α, β für c_1, c_2 substituirt, zu folgendem Satz:

Die Function

$$\Phi(z) = e^{\varpi_{\alpha\beta}(z)} \tag{5.}$$

ist auf der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ regulär, und besitzt daselbst nur einen Pol und nur einen Nullpunkt. Ersterer liegt in α, letzterer in β; und beide sind elementarer Natur d. i. erster Ordnung. Ferner ist die Function in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ mit folgenden constanten Quotienten behaftet:

$$\begin{aligned} &\textit{längs } a_\varkappa\text{:} \quad \frac{\Phi(\lambda)}{\Phi(\varrho)} = 1, \\ &\textit{längs } b_\varkappa\text{:} \quad \frac{\Phi(\lambda)}{\Phi(\varrho)} = e^{2[\mathrm{w}_\varkappa(\beta) - \mathrm{w}_\varkappa(\alpha)]}. \end{aligned} \tag{6.}$$

Sind mithin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ beliebig gegebene Punkte, so wird die Function

$$\mathsf{X}(z) = e^{\varpi_{\alpha_1\beta_1}(z) + \varpi_{\alpha_2\beta_2}(z) \ldots + \varpi_{\alpha_q\beta_q}(z)}$$

ebenfalls auf $\mathfrak{R}_{ab}$ *regulär* sein, und daselbst im Ganzen q elementare Pole: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ und ebenso viele elementare Nullpunkte: $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ besitzen. Genau dasselbe gilt daher nach (3.) z. B. auch von der Function:

$$\Psi(z) = e^{[\varpi_{\alpha_1\beta_1}(z) + \varpi_{\alpha_2\beta_2}(z) \ldots + \varpi_{\alpha_q\beta_q}(z)] - 2[N_1 \mathrm{w}_1(z) + N_2 \mathrm{w}_2(z) \ldots + N_p \mathrm{w}_p(z)]},$$

wo die N *Constanten* sein sollen. Ueberdies ist diese Function $\Psi(z)$, wie aus (6.) und (4.) sich ergiebt, in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ mit folgenden Quotienten behaftet:

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\varkappa\text{:} \quad \frac{\Psi(\lambda)}{\Psi(\varrho)} = e^{-2N_\varkappa \pi i}, \\ &\text{längs } b_\varkappa\text{:} \quad \frac{\Psi(\lambda)}{\Psi(\varrho)} = e^{2(\Sigma_j[\mathrm{w}_\varkappa(\beta_j) - \mathrm{w}_\varkappa(\alpha_j)]) - 2(N_1 b_{1\varkappa} + N_2 b_{2\varkappa} \ldots + N_p b_{p\varkappa})}, \end{aligned}$$

die Summation im Exponenten ausgedehnt über $j = 1, 2, \ldots q$.

Demgemäss wird $\Psi(z)$ nicht nur auf $\mathfrak{R}_{ab}$, sondern auch *auf* $\mathfrak{R}$ *selber* regulär sein, sobald man die Exponenten der beiden letzten Formeln in *gerade Vielfache* von πi verwandelt. Dies aber kann dadurch erreicht werden, dass man unter den $N_\varkappa$ *ganze Zahlen* versteht und überdies den letzten Exponent $= 2M_\varkappa \pi i$ setzt, wo die

$M_\varkappa$ ebenfalls ganze Zahlen sein sollen. Man gelangt daher zu folgendem Satz:

Sind auf der Fläche $\mathfrak{R}$ irgend zwei von einander verschiedene Punktsysteme $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ markirt, die den p Bedingungen Genüge leisten:

$$(7.) \qquad \sum_{j=1}^{j=q} [\mathrm{w}_\varkappa(\beta_j) - \mathrm{w}_\varkappa(\alpha_j)] = M_\varkappa \pi i + N_1 b_{1\varkappa} + N_2 b_{2\varkappa} \ldots + N_p b_{p\varkappa},$$
$$\varkappa = 1, 2 \ldots p,$$

wo die M, N beliebige ganze Zahlen vorstellen; — so existirt stets eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung $\Psi(z)$, deren Pole in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$, und deren Nullpunkte in $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ gelegen sind. Und zwar lässt sich diese Function $\Psi(z)$ folgendermassen darstellen:

$$(8.) \qquad \Psi(z) = e^{[\varpi_{\alpha_1\beta_1}(z) + \varpi_{\alpha_2\beta_2}(z) \ldots + \varpi_{\alpha_q\beta_q}(z)] - 2[N_1 \mathrm{w}_1(z) + N_2 \mathrm{w}_2(z) \ldots + N_p \mathrm{w}_p(z)]},$$

wo unter den N ebendieselben Zahlen, wie in (7.), zu verstehen sind.

Sind A und B beliebig gegebene Constanten, und setzt man:

$$\Omega(z) = \frac{\mathsf{A}\Psi(z) + \mathsf{B}}{\Psi(z) + 1},$$

so wird offenbar $\Omega(z)$, ebenso wie $\Psi(z)$, eine reguläre Function q^{ter} Ordnung sein. Diese neue Function $\Omega(z)$ hat in $\alpha_1, \alpha_1, \ldots \alpha_q$, wo $\Psi(z) = \infty$ ist, den Werth A, und in $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$, wo $\Psi(z) = 0$ ist, den Werth B. Somit ergiebt sich folgender Zusatz:

Sind auf $\mathfrak{R}$ irgend zwei von einander verschiedene Punktsysteme $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ markirt, die den Bedingungen entsprechen:

$$(9.) \qquad \sum_{j=1}^{j=q} [\mathrm{w}_\varkappa(\beta_j) - \mathrm{w}_\varkappa(\alpha_j)] = M_\varkappa \pi i + N_1 b_{1\varkappa} + N_2 b_{2\varkappa} + \ldots + N_p b_{p\varkappa},$$
$$\varkappa = 1, 2, \ldots p,$$

wo die M, N beliebige ganze Zahlen vorstellen, und sind überdies irgend zwei Constanten A, B gegeben, so existirt stets eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung, welche in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ den vorgeschriebenen Werth A, andererseits in $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ den vorgeschriebenen Werth B annimmt.

§ 15.

Darstellung der auf $\mathfrak{R}$ regulären Functionen mittelst der Integrale dritter Gattung. Abel'sches Theorem.

Es sei $f(z)$ irgend eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung mit den Polen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ und den Nullpunkten $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$.

Ferner mögen innerhalb $\mathfrak{R}_{ab}$ q einander nicht schneidende Linien $l_1, l_2, \ldots l_q$ gezogen sein, der Art, dass l_j von α_j nach β_j geht. Alsdann ist [Satz pg. 230] die durch die Formel

$$(1.)\qquad F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{df(z)}{f(z)}$$

definirte Function $F(z)$, bei geeigneter Einschränkung der Integrationscurve, auf $\mathfrak{R}$ *eindeutig und stetig*, mit Ausnahme der Linien l_j und $a_\varkappa$, $b_\varkappa$. Zugleich besitzt diese Function $F(z)$ im Bereich eines jeden der Punkte α_j, β_j Werthe von der Form

$$(2.)\qquad F(z) = \mp \log(\zeta - \gamma) + (\text{eind. stet. Funct. von } \zeta),$$

wo von den beiden Zeichen $\mp$ das obere oder untere gilt, jenachdem der Punkt zu den α_j oder β_j gehört. Ferner besitzt dieselbe in den Curven l_j, $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ folgende Differenzen:

$$(3.)\qquad \text{längs } l_j\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = +2\pi i,$$

$$(4.)\qquad \text{längs } a_\varkappa\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = -2\pi i N_\varkappa,$$

$$(5.)\qquad \text{längs } b_\varkappa\text{: } F(\lambda) - F(\varrho) = +2\pi i M_\varkappa,$$

wo die M, N (nicht näher bekannte) ganze Zahlen vorstellen.

Ganz analoge Eigenschaften besitzt aber, wie man leicht übersieht, auch die Function:

$$(1\text{a.})\qquad \Phi(z) = \sum_{j=1}^{j=q} \varpi_{\alpha_j \beta_j}(z) - 2\,[N_1 \mathrm{w}_1(z) + N_2 \mathrm{w}_2(z) \ldots + N_p \mathrm{w}_p(z)];$$

wo die N's die in (4.) angegebenen ganzen Zahlen vorstellen sollen. In der That ist $\Phi(z)$, ebenso wie $F(z)$, auf der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$, mit Ausnahme der Curven l_j, $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, eindeutig und stetig. Auch entspricht $\Phi(z)$ den Formeln (2.), (3.), (4.), während an Stelle von (5.) die Formel eintritt:

$$(5\text{a.})\qquad \text{längs } b_\varkappa\text{: } \Phi(\lambda) - \Phi(\varrho) = 2\sum_{j=1}^{j=q} [\mathrm{w}_\varkappa(\beta_j) - \mathrm{w}_\varkappa(\alpha_j)]$$
$$- 2\,[N_1 b_{1\varkappa} + N_2 b_{2\varkappa} \ldots + N_p b_{p\varkappa}];$$

wie solches sich leicht ergiebt mit Rücksicht auf (17.) pg. 271.

Demgemäss ist also die Function

$$F(z) - \Phi(z)$$

auf $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Curven $b_\varkappa$, allenthalben eindeutig und stetig, und in diesen Curven mit constanten Differenzen behaftet. Hieraus folgt [Satz (2.) pg. 236], dass diese Function eine *Constante* ist, mithin ihre Differenzen in den Curven $b_\varkappa$ gleich *Null* sind. Man erhält also die Formeln:

$$F(z) - \Phi(z) = \text{Const.} \tag{6.}$$

und:

$$2\sum_{j=1}^{j=q}[\mathrm{w}_\varkappa(\beta_j) - \mathrm{w}_\varkappa(\alpha_j)] - 2[N_1 b_{1\varkappa} + N_2 b_{2\varkappa} \ldots + N_p b_{p\varkappa}] - 2M_\varkappa \pi i = 0, \tag{7.}$$
$$\varkappa = 1, 2, \ldots p.$$

Die Formel (6.) kann man mit Rücksicht auf (1.) auch so schreiben:

$$\log \frac{f(z)}{f(z_0)} - \Phi(z) = \text{Const.},$$

oder auch so:

$$f(z) = Ke^{\Phi(z)}, \tag{8.}$$

wo K eine Constante vorstellt.

Die Formeln (7.) und (8.) führen nun, falls man für $\Phi(z)$ seine eigentliche Bedeutung (1a.) substituirt, zu folgendem Resultat:

Ist $f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung, so werden die Pole $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ und Nullpunkte $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ derselben stets folgenden Formeln entsprechen:

$$\sum_{j=1}^{j=q}[\mathrm{w}_\varkappa(\beta_j) - \mathrm{w}_\varkappa(\alpha_j)] = M_\varkappa \pi i + N_1 b_{1\varkappa} + N_2 b_{2\varkappa} \ldots + N_p b_{p\varkappa}, \tag{9.}$$
$$\varkappa = 1, 2, \ldots p,$$

wo die M, N ganze Zahlen vorstellen.

Auch wird diese Function $f(z)$ stets darstellbar sein in folgender Form:

$$f(z) = Ke^{[\varpi_{\alpha_1\beta_1}(z) + \varpi_{\alpha_2\beta_2}(z) \ldots + \varpi_{\alpha_q\beta_q}(z)] - 2[N_1 \mathrm{w}_1(z) + N_2 \mathrm{w}_2(z) \ldots + N_p \mathrm{w}_p(z)]}, \tag{10.}$$

wo die N dieselben Zahlen sind wie in (9.), während K einen constanten Factor vorstellt.

Der Satz (9.) kann noch ein wenig verallgemeinert werden. Sind nämlich $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ irgend zwei *Niveaupunktsysteme* einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function q^{ter} Ordnung $F(z)$, so kann [vgl. pg. 261] sofort eine *andere* auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function $f(z)$ gebildet werden, für welche $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ die Pole, und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ die Nullpunkte sind. Demgemäss werden wir also jenen Satz (9.) auch so aussprechen können:

Theorem. — *Versteht man unter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ irgend zwei Niveaupunktsysteme einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function q^{ter} Ordnung, so finden zwischen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ stets folgende p Relationen statt:*

$$\sum_{j=1}^{j=q}[\mathrm{w}_\varkappa(\beta_j) - \mathrm{w}_\varkappa(\alpha_j)] = M_\varkappa \pi i + N_1 b_{1\varkappa} + N_2 b_{2\varkappa} \ldots + N_p b_{p\varkappa}, \tag{A.}$$
$$\varkappa = 1, 2, \ldots p,$$

wo die M, N (nicht näher bekannte) ganze Zahlen vorstellen, während die b's die früher (19.) pg. 246 *definirten Constanten vorstellen.*

Und umgekehrt: — *Denkt man sich auf $\mathfrak{R}$ irgend zwei von einander verschiedene Punktsysteme $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ markirt, die in Verbindung mit irgend welchen ganzen Zahlen M, N* (B.) *den p Relationen* (A.) *entsprechen, so wird stets eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung existiren, für welche $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ zwei Systeme von Niveaupunkten sind.* Dieses umgekehrte Theorem ist nämlich bereits früher bewiesen worden, vgl. (9.) pg. 275

Uebrigens repräsentirt die Formel (A.) das *Abel'sche Theorem*, so weit dasselbe die Integrale *erster* Gattung, nämlich die $\mathrm{w}(z)$, betrifft. Wir werden im folgenden Capitel dieses Abel'sche Theorem auf *anderem* Wege begründen und zugleich in *allgemeinerer* Gestalt darlegen.

§ 16.

Ueber die den Normalintegralen erster Gattung zugehörige Determinante Δ.

Versteht man unter $f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ *reguläre* Function p^{ter} Ordnung, und setzt man

$$f(z) = S,$$

so ergeben sich auf $\mathfrak{R}$ für jedwedes S im Ganzen p dieser Gleichung entsprechende Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$, welche zu bezeichnen sind als die p *elementaren Wurzeln* der Gleichung $f(z) = S$, oder einfacher als ein *Niveaupunktsystem* der gegebenen Function $f(z)$. Sind nun $z_1 + dz_1, z_2 + dz_2, \ldots z_p + dz_p$ diejenigen Lagen, welche diese Niveaupunkte annehmen, sobald man S in $S + dS$ übergehen lässt, so finden zufolge des vorhergehenden Theorems die Formeln statt:

$$\sum_{j=1}^{j=p} [\mathrm{w}_\sigma(z_j + dz_j) - \mathrm{w}_\sigma(z_j)] = M_\sigma \pi i + N_1 b_{1\sigma} + N_2 b_{2\sigma} \ldots + N_p b_{p\sigma},$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots p.$$

Da die linken Seiten dieser Formeln *unendlich klein* sind, so werden die rechts stehenden ganzen Zahlen M, N [zufolge des Satzes IV. pg. 248] sämmtlich $= 0$ sein. Demgemäss erhält man:

$$\sum_{j=1}^{j=p} [\mathrm{w}_\sigma(z_j + dz_j) - \mathrm{w}_\sigma(z_j)] = 0, \quad \sigma = 1, 2, \ldots p.$$

oder, was dasselbe ist:

$$\sum_{j=1}^{j=p} \frac{d\,\mathrm{w}_\sigma(z_j)}{dz_j}\, dz_j = 0, \quad \sigma = 1, 2, \ldots p.$$

Aus diesen p linearen Gleichungen folgt aber sofort, dass die zugehörige Determinante*)

$$\text{Det.} \left| \frac{d\,\mathrm{w}_\sigma(z_j)}{d z_j} \right|$$

$= 0$ ist. Man gelangt in solcher Weise also zu dem Satz, *dass diese Determinante für jedwedes Niveaupunktsystem $z_1, z_2, \ldots z_p$ einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function p^{ter} Ordnung verschwindet.*

Die Art und Weise, wie wir hier zu diesem Satz gelangt sind, ist indessen *wenig stringent*, und der Satz selber auch nicht einmal richtig. In der That kann man leicht Fälle angeben, in denen die Determinante für ein solches Niveaupunktsystem einen *unendlichen* oder wenigstens *unbestimmten* Werth annimmt. Ist z. B. einer von jenen Niveaupunkten ein *Windungspunkt* der Fläche $\mathfrak{R}$, so werden die diesem Punkt entsprechenden p Elemente der Determinante im Allgemeinen unendlich gross sein.

Trotzdem enthält die angestellte Betrachtung einen gewissen Kern von Wahrheit. Und es handelt sich darum, diesen Kern in deutlicher und strenger Form zu Tage zu fördern; wozu allerdings einige Mühe erforderlich ist.

Markirt man auf $\mathfrak{R}$ irgend einen Punkt c, und bezeichnet das Bereich desselben mit $\mathfrak{U}(c, z)$ oder $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$, so ist bekanntlich $\mathrm{w}_\sigma(z)$ auf $\mathfrak{U}$, mithin auch auf $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig; — es sei denn, dass c gerade auf einer der Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ gelegen ist. In diesem besondern Fall erleidet nämlich jene Eindeutigkeit und Stetigkeit insofern eine Ausnahme, als $\mathrm{w}_\sigma(z)$ auf $\mathfrak{U}$, mithin auch auf $\mathfrak{A}$ längs jener Curve mit einer constanten Differenz behaftet ist. Diese constante Differenz verschwindet aber, falls man nach z oder ζ differenzirt. Und demgemäss erkennt man [auf Grund des Satzes (15.) pg. 23], dass der Differentialquotient $\frac{d\,\mathrm{w}_\sigma(z)}{d\zeta}$ auf der Fläche $\mathfrak{A}$ *ausnahmslos* eindeutig und stetig ist; was angedeutet werden mag durch die Formel:

$$(1.)\qquad \frac{d\,\mathrm{w}_\sigma(z)}{d\zeta} = (\text{eindeut. stet. Funct. von } \zeta).$$

Bezeichnet man also z. B. den Werth dieser Function (1.) im Punkte γ oder (was dasselbe ist) im Punkte c mit

---

*) Unter dem Zeichen: Det. A_σ^j soll die Determinante derjenigen p^2 Elemente verstanden werden, welche aus A_σ^j sich ergeben, wenn man jedem der beiden Indices σ, j der Reihe nach die Werthe $1, 2, \ldots p$ zuertheilt.

$$\overline{\mathrm{w}}_\sigma(c) \tag{2.}$$

so wird die so definirte Grösse $\overline{\mathrm{w}}_\sigma(c)$ unter allen Umständen eine *endliche* sein.

Will man diesen Werth $\overline{\mathrm{w}}_\sigma(c)$ wirklich bilden, so hat man zu beachten, dass zwischen z und ζ [vgl. pg. 96] *entweder* die Relation stattfindet:

$$\zeta - \gamma = (z - c)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{woraus folgt:} \quad \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{m}(z-c)^{\frac{1}{m}-1}, \tag{α.}$$

oder aber die Relation:

$$\zeta - \gamma = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{woraus folgt:} \quad \frac{d\zeta}{d\frac{1}{z}} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{m}-1}, \tag{β.}$$

wo m die Anzahl der im Punkte c mit einander zusammenhängenden Blätter der Fläche $\mathfrak{R}$ vorstellt. Demgemäss erhält man im *ersten* Fall:

$$\frac{d\,\mathrm{w}_\sigma(z)}{d\zeta} = \frac{d\,\mathrm{w}_\sigma(z)}{dz}\, m\,(z-c)^{1-\frac{1}{m}}, \tag{γ.}$$

andererseits im *zweiten* Fall:

$$\frac{d\,\mathrm{w}_\sigma(z)}{d\zeta} = \frac{d\,\mathrm{w}_\sigma(z)}{d\frac{1}{z}}\, m\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c}\right)^{1-\frac{1}{m}}. \tag{δ.}$$

Will man jetzt endlich den Werth $\overline{\mathrm{w}}_\sigma(c)$ bilden, so hat man in den Ausdrücken (γ.) und (δ.) das dortige z übergehen zu lassen in c. Dabei mag die Formel (γ.) für alle *endlichen* Punkte c benutzt, hingegen die Anwendung von (δ.) auf den Fall $c = \infty$ beschränkt werden. *Solches festgesetzt, wird alsdann $\overline{\mathrm{w}}_\sigma(c)$ für solche Punkte c, die weder Windungspunkte sind, noch auch bei $z = \infty$ liegen, stets die Bedeutung haben:*

$$\overline{\mathrm{w}}_\sigma(c) = \left(\frac{d\,\mathrm{w}_\sigma(z)}{dz}\right)_{z=c}. \tag{ε.}$$

Denkt man sich auf $\mathfrak{R}$ irgend welche p Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ markirt, so soll im Folgenden die diesen Punkten zugehörige Determinante

$$\left|\begin{matrix} \overline{\mathrm{w}}_1(c_1) & \overline{\mathrm{w}}_1(c_2) & \ldots & \overline{\mathrm{w}}_1(c_p) \\ \overline{\mathrm{w}}_2(c_1) & \overline{\mathrm{w}}_2(c_2) & \ldots & \overline{\mathrm{w}}_2(c_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{\mathrm{w}}_p(c_1) & \overline{\mathrm{w}}_p(c_2) & \ldots & \overline{\mathrm{w}}_p(c_p) \end{matrix}\right| \text{ kurzweg mit } \Delta(c_1, c_2, \ldots c_p) \tag{ζ.}$$

bezeichnet werden.

Dies vorangeschickt, wollen wir uns jetzt, ebenso wie zu Anfang dieses Paragraphs, irgend eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function p^{ter} Ordnung $f(z)$ gegeben denken. Setzt man

(3.) $$f(z) = S,$$

und betrachtet man dieses S als einen Punkt auf der einblättrigen S-Kugelfläche, so entsprechen jedweder Lage des Punktes S im Ganzen p Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ der Fläche $\mathfrak{R}$. Und zwar sind die *Lagen* dieser p Punkte auf der Fläche $\mathfrak{R}$ *stetige* Functionen derjenigen *Lage*, welche dem Punkte S auf jener einblättrigen S-Kugelfläche zuertheilt wird [vgl. den Satz pg. 138].

Wir wollen jetzt dem Punkte S eine beliebige *Anfangslage* K zuertheilen, und die zugehörigen Anfangslagen der Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ mit $c_1, c_2, \ldots c_p$ bezeichnen, *dabei aber voraussetzen, dass diese Punkte* $c_1, c_2, \ldots c_p$ *sämmtlich von einander verschieden seien.* Alsdann können die Bereiche $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots \mathfrak{U}_p$ der Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ so klein gemacht werden, dass zwischen ihnen keine Berührung oder Vermischung stattfindet. Sodann aber kann, weil die Lagen der Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ *stetige* Functionen von der Lage des Punktes S sind, auf der einblättrigen S-Kugelfläche um K (als Centrum) eine Kreisfläche $\mathfrak{S}_K$ von solcher Kleinheit beschrieben werden, dass $z_1, z_2, \ldots z_p$ respective innerhalb $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots \mathfrak{U}_p$ bleiben, so lange S innerhalb $\mathfrak{S}_K$ bleibt. Solches ausgeführt, und das Bereich $\mathfrak{U}_j(c_j, z_j)$ des Punktes c_j in seinem natürlichen Zustande mit $\mathfrak{A}_j(\gamma_j, \zeta_j)$ bezeichnet gedacht, sind alsdann die Grössen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_p$, so lange S innerhalb $\mathfrak{S}_K$ bleibt, nicht nur *stetige*, sondern auch *eindeutige* Functionen von S. Und Gleiches gilt daher [Satz (15.) pg. 23] auch von den nach S genommenen Differentialquotienten dieser Functionen. Versteht man also unter j eine der Zahlen $1, 2, \ldots p$, so ist

(4.) $$\zeta_j = (\text{eindeut. stet. Funct. von } S), \text{ innerhalb } \mathfrak{S}_K,$$

und ebenso auch:

(5.) $$\frac{d\zeta_j}{dS} = (\text{eindeut. stet. Funct. von } S), \text{ innerhalb } \mathfrak{S}_K.$$

Nun ist [nach (1.)] der Differentialquotient

$$\frac{d\,\mathrm{w}_\sigma(z_j)}{d\zeta_j}$$

eine *eindeutige und stetige* Function von ζ_j, während ζ_j seinerseits [zufolge (4.)] eine *eindeutige und stetige* Function von S ist. Somit folgt:

(6.) $$\frac{d\,\mathrm{w}_\sigma(z_j)}{d\zeta_j} = (\text{eindeut. stet. Funct. von } S), \text{ innerhalb } \mathfrak{S}_K.$$

Solches constatirt, verfolgen wir jetzt von Neuem den zu Anfang dieses Paragraphs angegebenen Weg. Giebt man dem Punkte

S innerhalb $\mathfrak{S}_k$ irgend zwei einander unendlich nahe Lagen S und $S + dS$, und bezeichnet man die correspondirenden Lagen der Punkte z_j, ζ_j ($j = 1, 2, \ldots p$) respective mit z_j, ζ_j und $z_j + dz_j$, $\zeta_j + d\zeta_j$; so ist [zufolge des Theorems pg. 277]:

$$\sum_{j=1}^{j=p} [\mathrm{w}_\sigma(z_j + dz_j) - \mathrm{w}_\sigma(z_j)] = M_\sigma \pi i + N_1 b_{1\sigma} + N_2 b_{2\sigma} \ldots + N_p b_{p\sigma}, \qquad \sigma = 1, 2, \ldots p, \tag{7.}$$

wo die M, N unbekannte ganze Zahlen vorstellen. Denkt man sich nun die Curven $a_1, a_2, \ldots a_p, b_1, b_2, \ldots b_p$, was stets durch eine geringe Deformation derselben erreichbar ist, auf der Fläche $\mathfrak{R}$ in solcher Weise verlaufend, dass die kleinen Flächenstücke $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots \mathfrak{U}_p$ von denselben frei sind, so wird die Differenz

$$\mathrm{w}_\sigma(z_j + dz_j) - \mathrm{w}_\sigma(z_j),$$

weil z_j und $z_j + dz_j$ beide innerhalb $\mathfrak{U}_j$ liegen, *unendlich klein* sein; so dass also die linken Seiten der Formeln (7.) ebenfalls *unendlich klein* sind. Hieraus aber folgt [wie bereits zu Anfang dieses Paragraphs explicirt wurde], dass die Zahlen M, N sämmtlich $= 0$ sind.

Die in solcher Weise sich ergebenden Formeln:

$$\sum_{j=1}^{j=p} [\mathrm{w}_\sigma(z_j + dz_j) - \mathrm{w}_\sigma(z_j)] = 0, \qquad \sigma = 1, 2, \ldots p, \tag{8.}$$

kann man aber, auf Grund der für dz_j und $d\zeta_j$ gegebenen Definition, auch so schreiben:

$$\sum_{j=1}^{j=p} \frac{d\,\mathrm{w}_\sigma(z_j)}{dz_j} \frac{dz_j}{dS} = 0, \qquad \sigma = 1, 2, \ldots p, \tag{9.}$$

oder auch so:

$$\sum_{j=1}^{j=p} \frac{d\,\mathrm{w}_\sigma(z_j)}{d\zeta_j} \frac{d\zeta_j}{dS} = 0, \qquad \sigma = 1, 2, \ldots p. \tag{10.}$$

Sämmtliche in diesen p linearen Gleichungen (10.) vorhandenen Grössen:

$$\frac{d\,\mathrm{w}_\sigma(z_j)}{d\zeta_j} \quad \text{und} \quad \frac{d\zeta_j}{dS}$$

sind Functionen von S. Und zwar sind diese Functionen [vgl. (5.), (6.)] innerhalb $\mathfrak{S}_K$ *eindeutig und stetig*, also von solcher Beschaffenheit, dass sie innerhalb $\mathfrak{S}_K$ nur in *einzelnen* Punkten verschwinden können. Demgemäss folgt aus den Gleichungen (10.), dass die Determinante

$$\text{(11.)}\qquad \text{Det.}\left|\frac{d\,\mathrm{w}_\sigma(z_j)}{d\zeta_j}\right|$$

in jedwedem Punkte S der Fläche $\mathfrak{S}_K$ verschwindet; — es sei denn, dass $\frac{d\zeta_1}{dS}, \frac{d\zeta_2}{dS} \ldots \frac{d\zeta_p}{dS}$ in diesem Punkte sämmtlich $= 0$ wären, was (wie schon bemerkt) nur für *vereinzelte* Lagen des Punktes S möglich ist. Vgl. die Erläuterung auf pg. 284.

Die Determinante (11.) repräsentirt also eine Function von S, welche auf der Fläche $\mathfrak{S}_K$ überall verschwindet, mit etwaiger Ausnahme *einzelner* Punkte. Derartige Ausnahmepunkte sind aber unmöglich, weil die Determinante, ebenso wie die Grössen (6.), eine *stetige* Function von S ist.

Ausnahmslos gilt also für *jedweden* Punkt S der Fläche $\mathfrak{S}_K$ die Gleichung:

$$\text{(12.)}\qquad \text{Det.}\left|\frac{d\,\mathrm{w}_\sigma(z_j)}{d\zeta_j}\right| = 0.$$

Es muss daher diese Gleichung z. B. auch *dann* in Kraft bleiben, wenn man S in das *Centrum* K der Fläche $\mathfrak{S}_K$, mithin die Punkte z_j, ζ_j in die Lagen c_j, γ_j hineinfallen lässt. In solcher Weise ergiebt sich, mit Rücksicht auf die in (1.), (2.) eingeführte Bezeichnungsweise, die Formel:

$$\text{(13.)}\qquad \text{Det.}\,|\overline{\mathrm{w}}_\sigma(c_j)| = 0,$$

eine Formel, die man, unter Anwendung der in (ξ.) pg. 280 eingeführten Abbreviatur, auch so schreiben kann:

$$\text{(13a.)}\qquad \Delta(c_1, c_2, \ldots c_p) = 0.$$

Bei diesen Betrachtungen und Formeln (4.) — (13.) ist stillschweigend vorausgesetzt, dass K *endlich* sei. Ist aber $K = \infty$ [also an der tiefsten Stelle der S-Kugelfläche gelegen], so kann man Schritt für Schritt *genau dieselben* Formeln und Betrachtungen wiederholen, falls man nur überall $\frac{1}{S}$ statt S setzt. Man findet auf diese Weise, dass die Formel (13.) oder (13a.) ganz allgemein gilt, für *jedwede* Lage des Punktes K, falls nur die zugehörigen Punkte c_1, c_2, ... c_p sämmtlich von einander verschieden sind [vgl. die auf pg. 281 gemachte Voraussetzung]. Aber auch diese Restriction ist überflüssig. Denn ist z. B. c_1 identisch mit c_2, so werden zwei Parallelreihen der Determinante (13.) unter einander identisch, mithin ihr Werth wiederum $= 0$ sein. Man gelangt somit zu folgendem Resultat:

Erster Satz. — *Versteht man unter $f(z)$ irgend eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function p^{ter} Ordnung, so wird für jedwedes Niveaupunktsystem $c_1, c_2, \ldots c_p$ dieser Function die Formel stattfinden:*

$$\Delta(c_1, c_2, \ldots c_p) = 0. \tag{14.}$$

Dabei bezeichnet $\Delta(c_1, c_2, \ldots c_p)$ die auf pg. 280 *definirte Function.*

Dieser Satz gilt in voller Strenge. So z. B. kann ein Unbestimmtwerden der Determinante niemals eintreten, weil ihre einzelnen Elemente durchweg *endlich* sind [vgl. (2.) pg. 280]. Aus diesem Satze ergiebt sich nun weiter folgender

Zweiter Satz. — *Denkt man sich auf $\mathfrak{R}$ irgend zwei von einander verschiedene Punktsysteme $c_1, c_2, \ldots c_p$ und $d_1, d_2, \ldots d_p$ markirt, die in Verbindung mit irgend welchen ganzen Zahlen M, N den Formeln entsprechen:*

$$\sum_{j=1}^{j=p}[w_\sigma(c_j) - w_\sigma(d_j)] = M_\sigma \pi i + N_1 b_{1\sigma} + N_2 b_{2\sigma} \ldots + N_p b_{p\sigma}, \tag{15.}$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots p,$$

so werden die Determinanten

$$\Delta(c_1, c_2, \ldots c_p) \quad \textit{und} \quad \Delta(d_1, d_2, \ldots d_p) \tag{16.}$$

stets $= 0$ sein.

Beweis. — Entsprechen $c_1, c_2, \ldots c_p$ und $d_1, d_2, \ldots d_p$ den hier gemachten Voraussetzungen, so existirt [zufolge des Theorems (B.) pg. 278] eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function p^{ter} Ordnung, für welche $c_1, c_2, \ldots c_p$ und $d_1, d_2, \ldots d_p$ zwei Systeme von Niveaupunkten sind. Demgemäss wird aber [zufolge (14.)] z. B. $\Delta(c_1, c_2, \ldots c_p) = 0$ sein. — *Q. e. d.*

Nachträgliche Erläuterung. — Die in (11.) über die dortige Determinante angestellten Betrachtungen stützen sich auf folgenden evidenten Satz:

Sind p Gleichungen gegeben von der Form:

$$\mathsf{A}_1^{(\sigma)}\mathsf{B}_1 + \mathsf{A}_2^{(\sigma)}\mathsf{B}_2 \ldots + \mathsf{A}_p^{(\sigma)}\mathsf{B}_p = 0, \quad \sigma = 1, 2, \ldots p,$$

und ist überdies bekannt, dass sämmtliche A, B *endliche Werthe haben, so wird die Determinante der* A *stets verschwinden; — es sei denn, dass die* B*'s sämmtlich $= 0$ wären.*

Eilftes Capitel.

Das Abel'sche Theorem.

Speciell für die Integrale *erster* Gattung haben wir das Abel'sche Theorem bereits im vorhergehenden Capitel [pg. 278] kennen gelernt. Im gegenwärtigen Capitel soll eine andere Methode eingeschlagen werden, welche dieses Theorem nicht blos für die Integrale der *ersten*, sondern auch für die der *zweiten* und *dritten* Gattung aufzustellen gestattet.

§ 1.

Das Abel'sche Theorem für die Integrale erster Gattung.

Es sei $W = W(z)$ ein beliebiges Integral erster Gattung, also eine Function, die auf $\mathfrak{R}_{ab}$ *eindeutig und stetig*, in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$) aber mit constanten Differenzen $A^{(\varkappa)}$, $B^{(\varkappa)}$ behaftet ist. Ferner sei $f = f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ *reguläre* Function, deren Pole und Nullpunkte *promiscue* mit $c_1, c_2, \ldots c_g$, und deren zugehörige Ordnungszahlen mit $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_g$ bezeichnet sein mögen. Ueberdies mögen die Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$), was durch eine geringe Deformation derselben stets erreichbar ist, der Art gedacht werden, dass *keiner* der Punkte $c_1, c_2, \ldots c_g$ hart am Rande von $\mathfrak{R}_{ab}$ liegt. Gleichzeitig mögen die Bereiche $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots \mathfrak{U}_g$ so klein gedacht werden, dass dieselben vollständig *innerhalb* $\mathfrak{R}_{ab}$ liegen.

Bezeichnet man also das nach Absonderung dieser Bereiche $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots \mathfrak{U}_g$ noch übrig bleibende Stück der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ mit $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{R}_{ab} - (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 + \ldots + \mathfrak{U}_g),$$

so sind

$$W,\ f \text{ und } \frac{1}{f}, \text{ mithin auch } \frac{W}{f}$$

auf $\mathfrak{S}$ *eindeutig und stetig*. Hieraus folgt [Satz (4.) pg. 196] die Formel:

$$\int_{\mathfrak{S}} \frac{W}{f}\, df = 0, \quad \text{d. i.} \quad \int_{\mathfrak{S}} W d \log f = 0.$$

die Integration positiv erstreckt über den Rand von $\mathfrak{S}$. Will man aber diese Fläche $\mathfrak{S}$ positiv umlaufen, so hat man den Rand von $\mathfrak{R}_{\omega\lambda}$ *positiv*, und hierauf die Ränder von $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots \mathfrak{U}_g$ *negativ* zu durchwandern. Demgemäss kann die vorstehende Formel auch so geschrieben werden:

$$(1.)\qquad \int_{\mathfrak{R}_{\omega\lambda}} W\,d\log f - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \int_{\mathfrak{U}_\varkappa} W\,d\log f = 0,$$

wo durch die Indices $\mathfrak{R}_{\omega\lambda}$ und $\mathfrak{U}_\varkappa$ (wie gewöhnlich) die *positiven* Randintegrationen der betreffenden Flächen angedeutet sein sollen.

Diese Formel (1.) enthält bereits das *Abel'sche Theorem* für ein Integral erster Gattung $W(z)$. Es handelt sich nur noch um die weitere Entwicklung der Formel.

Es sei c *irgend einer* der Punkte $c_1, c_2, \ldots c_g$. Im Bereich $\mathfrak{U}(c, z)$ oder $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$ dieses Punktes c ist alsdann die gegebene, auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function f darstellbar durch die Formel:

$$f = (\zeta - \gamma)^\mu E,$$

wo μ die Ordnungszahl von f in c oder γ vorstellt, während E eine eindeutige, stetige und nichtverschwindende Function bezeichnet. Hieraus folgt sofort:

$$d\log f = \frac{\mu\,d\zeta}{\zeta - \gamma} + \mathsf{E}\,dE,$$

wo $\mathsf{E} = \frac{1}{E}$ die nämlichen Eigenschaften besitzt wie E selber. Somit ergiebt sich, falls man mit W multiplicirt und sodann über den Rand von $\mathfrak{U}$ oder $\mathfrak{A}$ integrirt:

$$(\alpha.)\qquad \int_{\mathfrak{U}} W\,d\log f = \int_{\mathfrak{A}} W\,d\log f = \mu \int_{\mathfrak{A}} \frac{W\,d\zeta}{\zeta - \gamma} + \int_{\mathfrak{A}} W\mathsf{E}\,dE.$$

Da nun E und E, ebenso wie W, auf $\mathfrak{A}$ *eindeutig und stetig* sind, so sind die Werthe der beiden letzten Integrale sofort angebbar. In der That wird nach bekannten Cauchy'schen Theoremen [pg. 21 und 23] das *letzte* Integral $= 0$ und das *vorletzte* $= 2\pi i\, W[\gamma] = 2\pi i\, W(c)$ sein, falls man nämlich unter $W[\gamma]$ und $W(c)$ diejenigen (einander gleichen) Werthe versteht, welche W in den Punkten γ und c besitzt. Man erhält daher:

$$(\beta.)\qquad \int_{\mathfrak{U}} W\,d\log f = 2\pi i\,.\,\mu\, W(c);$$

so dass also die Formel (1.) die Gestalt annimmt:

$$(2.)\qquad \int_{\mathfrak{R}_{\omega\lambda}} W\,d\log f = 2\pi i\,[\mu_1 W(c_1) + \mu_2 W(c_2) \ldots + \mu_g W(c_g)].$$

Das Integral linker Hand kann übrigens [vgl. die Betrachtungen auf pg. 248, 249] auch so geschrieben werden:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}\left(A^{(\varkappa)}\int_{a_\varkappa} d\log f + B^{(\varkappa)}\int_{b_\varkappa} d\log f\right), \tag{3.}$$

wo die $A^{(\varkappa)}$, $B^{(\varkappa)}$ die constanten Differenzen der Function W in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ vorstellen. Auch übersieht man leicht, dass die in diesem Ausdruck (3.) vorhandenen Integrale Werthe von folgender Form besitzen:

$$\int_{a_\varkappa} d\log f = 2\pi i M^{(\varkappa)}, \qquad \int_{b_\varkappa} d\log f = 2\pi i N^{(\varkappa)}, \tag{4.}$$

wo die $M^{(\varkappa)}$, $N^{(\varkappa)}$ *ganze Zahlen* vorstellen.

Erläuterung. — Es ist offenbar:

$$\int_{a_\varkappa} d\log f = \log f'' - \log f', \tag{a.}$$

wo f' und f'' die Werthe von f im Anfangspunkt und im Endpunkt der Curve $a_\varkappa$ bezeichnen. In der That unterliegt diese Formel (a.) keinem Bedenken. Denn die Pole und Nullpunkte c_1, c_2, ... c_g liegen nach unserer Voraussetzung nicht hart am Rande von $\mathfrak{R}_{ab}$, so dass also f und $\frac{1}{f}$, mithin auch $\log f$ längs der Curve $a_\varkappa$ *stetig* sind.

Nun liegen aber der Anfangs- und Endpunkt der Curve $a_\varkappa$ beide [vgl. die Figur pg. 248] an *ein und derselben* Stelle, nämlich beide im Knotenpunkt $(a_\varkappa, b_\varkappa)$. Folglich ist $f'' = f'$, und also $\log f'' - \log f' = 2\pi i M^{(\varkappa)}$, wo $M^{(\varkappa)}$ eine unbekannte ganze Zahl vorstellt. U. s. w.

Auf Grund der Formeln (2.), (3.), (4.) gelangt man also zu folgendem Satz:

Versteht man unter $f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function, und bezeichnet man die Pole und Nullpunkte derselben promiscue mit c_1, c_2, ... c_g, ferner ihre zugehörigen Ordnungszahlen mit μ_1, μ_2, ... μ_g, so findet für jedwedes Integral erster Gattung $W(z)$ die Formel statt:

$$\mu_1 W(c_1) + \mu_2 W(c_2) \ldots + \mu_g W(c_g) = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}[M^{(\varkappa)}A^{(\varkappa)} + N^{(\varkappa)}B^{(\varkappa)}], \tag{5.}$$

wo die $A^{(\varkappa)}$, $B^{(\varkappa)}$ die constanten Differenzen von W in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$) bezeichnen, während die $M^{(\varkappa)}$, $N^{(\varkappa)}$ ganze Zahlen vorstellen. Und zwar sind die Werthe dieser ganzen Zahlen ausdrückbar durch die Formeln:

$$M^{(\varkappa)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a_\varkappa}\frac{df(z)}{f(z)} \quad \text{und} \quad N^{(\varkappa)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{b_\varkappa}\frac{df(z)}{f(z)}, \tag{6.}$$

die Integrationen stromabwärts hinerstreckt gedacht längs der Curven $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$.

Bei der Ableitung dieses Satzes ist vorausgesetzt, die Curven $a_\varkappa$,
(7.) *$b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$) seien, was durch eine kleine Deformation derselben stets erreichbar ist, der Art beschaffen, dass keiner der Punkte c_1, c_2, $\ldots c_g$ hart am Rande von $\mathfrak{R}_{ab}$ liegt.*

Nimmt man an, die Function $f(z)$ sei eine reguläre Function q^{ter} Ordnung, und bezeichnet man ihre elementaren Nullpunkte und Pole respective mit $z_1, z_2, \ldots z_q$ und $\overset{\infty}{z}_1, \overset{\infty}{z}_2, \ldots \overset{\infty}{z}_q$, so kann man offenbar die linke Seite der Formel (5.) auch so schreiben:

$$\sum_{j=1}^{j=q} [W(z_j) - W(\overset{\infty}{z}_j)].$$

Dabei ist noch Folgendes zu bemerken: Ist $f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung, so gilt Gleiches auch von

$$f(z) - K,$$

falls man nämlich unter K irgend welche *Constante* versteht. Demgemäss kann man den für f selber abgeleiteten Satz (5.), (6.), (7.) ebenso gut auch auf die Function $f - K$ in Anwendung bringen. Alsdann aber gelangt man zu folgendem allgemeinern Satz:

Es sei K eine willkürliche Constante. Ferner sei $f(z)$, mithin auch $f(z) - K$, eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung. Ueberdies seien $z_1, z_2, \ldots z_q$ und $\overset{\infty}{z}_1, \overset{\infty}{z}_2, \ldots \overset{\infty}{z}_q$ die elementaren Nullpunkte und Pole der Function $f(z) - K$. Alsdann gilt für jedwedes Integral erster Gattung $W(z)$ die Formel:

$$(8.)\qquad \sum_{j=1}^{j=q} [W(z_j) - W(\overset{\infty}{z}_j)] = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} [M^{(\varkappa)} A^{(\varkappa)} + N^{(\varkappa)} B^{(\varkappa)}],$$

wo die $A^{(\varkappa)}$, $B^{(\varkappa)}$ die constanten Differenzen von W in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ vorstellen; während die $M^{(\varkappa)}$, $N^{(\varkappa)}$ ganze Zahlen sind, die den Formeln entsprechen:

$$(9.)\qquad M^{(\varkappa)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_\varkappa} \frac{df(z)}{f(z) - K}, \qquad N^{(\varkappa)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b_\varkappa} \frac{df(z)}{f(z) - K}.$$

(10.) *Dabei sind die Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ der Art zu denken, dass keiner der Punkte z_j, $\overset{\infty}{z}_j$ ($j = 1, 2, \ldots q$) hart am Rande von $\mathfrak{R}_{ab}$ liegt.*

Dieser Satz ist anwendbar auf jedweden Werth der Constanten K. Variirt man aber das K, so werden sich dabei von allen in (8.), (9.) enthaltenen Grössen nur die Punkte z_j und die Zahlen $M^{(\varkappa)}$, $N^{(\varkappa)}$ ändern können. Denn die $\overset{\infty}{z}_j$ sind die *Pole* von $f(z) - K$, also identisch mit den Polen von $f(z)$ selber, und bleiben daher

völlig ungeändert, welche Werthe man der Constanten K auch zuertheilen mag.

Von allen in (8.), (9.) *enthaltenen Grössen können sich also, bei einer Variation von K, nur die Punkte z_j und die Zahlen $M^{(\varkappa)}$, $N^{(\varkappa)}$ ändern.* Und zwar wird die bei einer solchen Variation von K eintretende Verschiebung der Punkte z_j [d. i. der Nullpunkte von $f(z) - K$] eine *stetige* sein, zufolge des Satzes (8.) pg. 138; während andererseits die gleichzeitige Aenderung der Zahlen $M^{(\varkappa)}$, $N^{(\varkappa)}$ [weil dieselben *ganze* Zahlen sind] immer nur eine *sprungweise* d. i. *unstetige* sein kann.

Nun sind aber [vgl. (10.)] die Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ der Art beschaffen, dass keiner der Punkte z_j, $\overset{\infty}{z}_j$ hart am Rande von $\mathfrak{R}_{ab}$ liegt. Demgemäss kann man dem K einen Zuwachs ΔK von solcher Kleinheit geben, dass die daraus entspringenden Verschiebungen Δz_j der Nullpunkte z_j vollständig *innerhalb* $\mathfrak{R}_{ab}$ bleiben, während gleichzeitig die Pole $\overset{\infty}{z}_j$ (als *festliegende* Punkte) ebenfalls innerhalb $\mathfrak{R}_{ab}$ verharren. Bei Ausführung dieser Operation bleiben also die Unstetigkeitspunkte $\overset{\infty}{z}_j$ und z_j der beiden Functionen

$$f(z) - K \quad \text{und} \quad \frac{1}{f(z) - K}$$

von den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ stets durch irgend welche Zwischenräume getrennt. Demgemäss können sich die Werthe der Integrale (9.) während der genannten Operation nur in *stetiger* Weise ändern. Hieraus aber folgt, dass die durch diese Integrale dargestellten ganzen Zahlen $M^{(\varkappa)}$, $N^{(\varkappa)}$ *ungeändert* bleiben.

Um die Hauptsache zusammenzufassen: *Giebt man der Constante K einen Zuwachs ΔK von hinreichender Kleinheit, so werden die z_j kleine Verschiebungen Δz_j erhalten, hingegen die $\overset{\infty}{z}_j$ und die $M^{(\varkappa)}$, $N^{(\varkappa)}$ ungeändert bleiben.* Bildet man also die Formel (8.) einmal für K selber, das andere Mal für $K + \Delta K$, und subtrahirt die beiden so entstehenden Gleichungen von einander, so erhält man:

$$\sum_{j=1}^{j=q} [W(z_j + \Delta z_j) - W(z_j)] = 0. \tag{11.}$$

Die hier auftretenden Punkte z_j und $z_j + \Delta z_j$ können kurzweg als zwei *Niveaupunktsysteme* der gegebenen Function $f(z)$ bezeichnet werden. Setzt man also schliesslich d statt Δ, so gelangt man zu folgendem einfachen Satz:

Versteht man unter $f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung, und bezeichnet man irgend zwei einander unendlich nahe Niveaupunktsysteme dieser Function mit $z_1, z_2, \ldots z_q$ und $z_1 + dz_1$, $z_2 + dz_2$, $\ldots z_q + dz_q$, so gilt für jedwedes Integral erster Gattung $W(z)$ die Formel:

$$\sum_{j=1}^{j=q} [W(z_j + dz_j) - W(z_j)] = 0; \tag{12.}$$

oder, einfacher geschrieben, die Formel:

$$\sum_{j=1}^{j=q} d\,W(z_j) = 0. \tag{13.}$$

Man hat sich hier die Grössen dz_j geometrisch als kleine Verschiebungen, d. i. als kleine Wegelemente auf der Fläche $\mathfrak{R}$ vorzustellen. Und bei Ableitung des Satzes ist vorausgesetzt, dass all' (14.) *diese kleinen Wegelemente dz_j innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ liegen, dass also keins derselben von einer der Curven $a_\varkappa, b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$) durchschnitten werde, — eine Voraussetzung, deren Realisirung jederzeit erreichbar ist durch eine kleine Deformation jener Curven.*

Im Vorhergehenden ist unter W irgend ein der Fläche $\mathfrak{R}$ zugehöriges Abel'sches Integral erster Gattung

$$W = \int \Phi\, dz$$

zu verstehen; so dass also $\Phi = \Phi(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function vorstellt. Insbesondere ist ferner unter $W(z)$ die durch die Formel

$$W(z) = \int_{z_0}^{z} \Phi\, dz \quad [\mathfrak{R}_{ab}]$$

definirte Function zu verstehen*), also eine Function, die auf $\mathfrak{R}_{ab}$ eindeutig und stetig, in den Curven $a_\varkappa, b_\varkappa$ aber mit constanten Differenzen $A^{(\varkappa)}$, $B^{(\varkappa)}$ behaftet ist.

Denkt man sich nun auf $\mathfrak{R}$ irgend zwei einander unendlich nahe liegende Punkte z und $z + dz$ markirt, so wird unter $d\,W(z)$ derjenige Zuwachs zu verstehen sein, welchen $W(z)$ erfährt beim Uebergange vom ersten zum zweiten Punkte. Das so definirte $d\,W(z)$ ist völlig bestimmt, *ausser* wenn die beiden Punkte durch eine der Curven $a_\varkappa, b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$) von einander getrennt sind.

Liegt z. B. z auf dem rechten und $z + dz$ auf dem linken Ufer der Curve $a_\varkappa$, so kann man das zugehörige $d\,W(z)$ in doppelter Weise bilden: *Entweder geradezu*, ohne die Curve $a_\varkappa$ zu ändern:

*) Der Unterschied zwischen W und $W(z)$ ist derselbe wie früher zwischen F und $F(z)$. Vgl. die Schlussbemerkung pg. 231.

$$\cdot\, z + dz \qquad\qquad \rightarrow a_\varkappa$$
$$\cdot\, z$$

alsdann wird dieses $dW(z)$ *endlich*, nämlich nahezu $= A^{(\varkappa)}$ sein.

Oder aber der Art, dass man die Curve $a_\varkappa$ zuvörderst einer kleinen Deformation unterwirft, nämlich dieselbe auf einem kleinen Umwege um die Punkte z und $z + dz$ herumleitet:

$$\cdot\, z + dz \qquad\qquad \rightarrow a_\varkappa$$
$$\cdot\, z$$

und hierauf erst das $dW(z)$ bildet; alsdann wird dieses $dW(z)$ *unendlich klein*, nämlich nahezu $= 0$ sein.

Im Folgenden soll nun $dW(z)$ stets in der *letztern* Bedeutung, also stets als eine *unendlich kleine* Grösse aufgefasst werden. Solches festgesetzt, wird alsdann die Restriction (14.) des vorhergehenden Satzes überflüssig; so dass man denselben einfacher so aussprechen kann:

Theorem. — *Versteht man unter $f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung, und bezeichnet man irgend zwei einander unendlich nahe Niveaupunktsysteme dieser Function mit $z_1, z_2, \ldots z_q$ und $z_1 + dz_1, z_2 + dz_2, \ldots z_q + dz_q$, so gilt für jedwedes Integral erster Gattung $W(z)$ die Formel:*

$$\sum_{j=1}^{j=q} dW(z_j) = 0, \tag{15.}$$

wo die $dW(z_j)$ die den Verschiebungen dz_j entsprechenden unendlich kleinen Zuwüchse vorstellen.

Demgemäss gilt z. B. [wie aus (15.) durch Integration folgt] *auch folgende Formel:*

$$\sum_{j=1}^{j=q} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} dW(z_j) = 0, \tag{16.}$$

die Integrationen hinerstreckt gedacht über irgend welche simultane Bahnen $(\alpha_1 \ldots \beta_1)$, $(\alpha_2 \ldots \beta_2)$, $\ldots (\alpha_q \ldots \beta_q)$ der in Rede stehenden Niveaupunkte $z_1, z_2, \ldots z_q$.

Die Niveaupunkte $z_1, z_2, \ldots z_q$ der Function $f(z)$ sind nämlich nichts Anderes als die elementaren Nullpunkte der Function $f(z) - K$, wo K eine willkürliche Constante vorstellt. Lässt man nun dieses K in irgend welcher *stetigen* Weise sich ändern, etwa vom Werthe $K = \mathsf{A}$ aus, bis zum Werthe $K = \mathsf{B}$, so werden gleichzeitig die

Punkte $z_1, z_2, \ldots z_q$ auf der Fläche $\mathfrak{R}$ irgend welche *stetige* Curven beschreiben [Satz (8.) pg. 138]. Und diese Curven sind es, welche wir kurzweg als ein System *simultaner Bahnen* der Punkte $z_1, z_2, \ldots z_q$ bezeichnen.

Betrachtet man ausser $W(z)$ noch irgend ein anderes Integral erster Gattung $W_1(z)$, so erhält man für $W(z)$ die Formel (16.):

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} dW(z_1) + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} dW(z_2) \ldots + \int_{\alpha_q}^{\beta_q} dW(z_q) = 0,$$

oder kürzer geschrieben:

$$(F.) \qquad \int_{\alpha_1}^{\beta_1} dW(z) + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} dW(z) \ldots + \int_{\alpha_q}^{\beta_q} dW(z) = 0,$$

und ebenso für $W_1(z)$ die analoge Formel:

$$(F_1.) \qquad \int_{\alpha_1}^{\beta_1} dW_1(z) + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} dW_1(z) \ldots + \int_{\alpha_q}^{\beta_q} dW_1(z) = 0.$$

Dabei mögen die Integrale in (F.) wie in (F_1.) hinerstreckt gedacht werden über *ein und dieselben* simultanen Bahnen $(\alpha_1 \ldots \beta_1)$, $(\alpha_2 \ldots \beta_2)$, $\ldots (\alpha_q \ldots \beta_q)$ der in Rede stehenden Niveaupunkte.

Betrachtet man *irgend eine* dieser Bahnen, etwa die Bahn $(\alpha_j \ldots \beta_j)$, so werden die betreffenden Integrale die Werthe haben:

$$(J.) \qquad \int_{\alpha_j}^{\beta_j} dW(z) = W(\beta_j) - W(\alpha_j),$$

$$(J_1.) \qquad \int_{\alpha_j}^{\beta_j} dW_1(z) = W_1(\beta_j) - W_1(\alpha_j),$$

vorausgesetzt, dass die Curven $a_\varkappa, b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ von jener Bahn $(\alpha_j \ldots \beta_j)$ nirgends überschritten, mithin $W(z)$ und $W_1(z)$ längs jener Bahn stetig sind. Haben hingegen derartige Ueberschreitungen stattgefunden, so hat man, um die Werthe der Integrale (J.), (J_1.) zu finden, dieselben zuerst für die einzelnen Stücke zu berechnen, in welche jene Bahn $(\alpha_j \ldots \beta_j)$ durch die Curven oder Schnitte $a_\varkappa, b_\varkappa$ zerlegt wird, und die so sich ergebenden Partial-Integrale zusammenzuaddiren. Man findet alsdann statt der Werthe (J.), (J_1.) folgende:

$$(Y.) \qquad \int_{\alpha_j}^{\beta_j} dW(z) = W(\beta_j) - W(\alpha_j) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} [m_{j\varkappa} A^{(\varkappa)} + n_{j\varkappa} B^{(\varkappa)}],$$

$$(Y_1.)\qquad \int_{\alpha_j}^{\beta_j} dW_1(z) = W_1(\beta_j) - W_1(\alpha_j) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} [m_j^{(\varkappa)} A_1^{(\varkappa)} + n_j^{(\varkappa)} B_1^{(\varkappa)}],$$

wo die $m_j^{(\varkappa)}$, $n_j^{(\varkappa)}$ in beiden Formeln *ein und dieselben* ganzen Zahlen vorstellen, während die $A^{(\varkappa)}$, $B^{(\varkappa)}$ und $A_1^{(\varkappa)}$, $B_1^{(\varkappa)}$ die constanten Differenzen der Integrale $W(z)$ und $W_1(z)$ in den Schnitten $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ bezeichnen. Die Werthe der Zahlen $m_j^{(\varkappa)}$, $n_j^{(\varkappa)}$ sind übrigens noch genauer angebbar. Es ist nämlich:

$$(Z.)\qquad m_j^{(\varkappa)} = l_j^{(\varkappa)} - r_j^{(\varkappa)} \quad \text{und} \quad n_j^{(\varkappa)} = \lambda_j^{(\varkappa)} - \varrho_j^{(\varkappa)}. \quad \text{[Vgl. pg. 194.]}$$

Dabei bezeichnet $l_j^{(\varkappa)}$ die Zahl, welche angiebt, wie oft jene Integrationscurve $(\alpha_j \ldots \beta_j)$ den Schnitt $a_\varkappa$ vom *linken* zum rechten Ufer, und $r_j^{(\varkappa)}$ die Zahl, welche angiebt, wie oft jene Integrationscurve den Schnitt $a_\varkappa$ vom *rechten* zum linken Ufer überschritten hat; während $\lambda_j^{(\varkappa)}$ und $\varrho_j^{(\varkappa)}$ die analogen Bedeutungen besitzen mit Bezug auf den Schnitt $b_\varkappa$. Man gelangt durch diese Betrachtungen zu folgendem Resultat:

Andere Form des Theorems. — *Es seien $W(z)$ und $W_1(z)$ irgend zwei Integrale erster Gattung, ferner sei $f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung. Versteht man alsdann unter $(\alpha_1 \ldots \beta_1)$, $(\alpha_2 \ldots \beta_2)$, $\ldots (\alpha_q \ldots \beta_q)$ irgend welche simultane Bahnen der q Niveaupunkte von $f(z)$, so werden, falls diese Bahnen die Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ nirgends überschreiten, die Formeln gelten:*

$$(17.)\qquad \begin{aligned} \sum_{j=1}^{j=q} [W(\beta_j) - W(\alpha_j)] &= 0; \\ \sum_{j=1}^{j=q} [W_1(\beta_j) - W_1(\alpha_j)] &= 0. \end{aligned}$$

Finden hingegen derartige Ueberschreitungen wirklich statt, an beliebigen Stellen und in beliebiger Anzahl, so gelten, statt der Formeln (17.), *folgende:*

$$(18.)\qquad \begin{aligned} \sum_{j=1}^{j=q} [W(\beta_j) - W(\alpha_j)] &= \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} [M^{(\varkappa)} A^{(\varkappa)} + N^{(\varkappa)} B^{(\varkappa)}], \\ \sum_{j=1}^{j=q} [W_1(\beta_j) - W_1(\alpha_j)] &= \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} [M^{(\varkappa)} A_1^{(\varkappa)} + N^{(\varkappa)} B_1^{(\varkappa)}], \end{aligned}$$

wo die $M^{(\varkappa)}$, $N^{(\varkappa)}$ in beiden Formeln ein und dieselben ganzen Zahlen vorstellen, während die $A^{(\varkappa)}$, $B^{(\varkappa)}$ und $A_1^{(\varkappa)}$, $B_1^{(\varkappa)}$ die constanten Differenzen der Integrale $W(z)$ und $W_1(z)$ in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ bezeichnen.

Erste Bemerkung. — Man kann diesen Satz z. B. in Anwendung bringen auf die p *Normalintegrale* erster Gattung: $w_1(z)$, $w_2(z)$, ... $w_p(z)$, und gelangt alsdann zu folgendem Resultat:

Versteht man unter $z_1, z_2, \ldots z_q$ die Niveaupunkte einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function $f(z)$ q^{ter} Ordnung, und versteht man ferner unter $(\alpha_1 \ldots \beta_1)$, $(\alpha_2 \ldots \beta_2)$, ... $(\alpha_q \ldots \beta_q)$ irgend welche simultane Bahnen dieser Niveaupunkte, so finden stets die Formeln statt:

$$\text{(A.)} \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^{j=q} [w_1(\beta_j) - w_1(\alpha_j)] &= M_1 \pi i + N_1 b_{11} + N_2 b_{21} \ldots + N_p b_{p1}, \\ \sum_{j=1}^{j=q} [w_2(\beta_j) - w_2(\alpha_j)] &= M_2 \pi i + N_1 b_{12} + N_2 b_{22} \ldots + N_p b_{p2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{j=1}^{j=q} [w_p(\beta_j) - w_p(\alpha_j)] &= M_p \pi i + N_1 b_{1p} + N_2 b_{2p} \ldots + N_p b_{pp}, \end{aligned}$$

wo die M, N ganze Zahlen vorstellen, während die b's die in (19.) pg. 246 *festgesetzten Bedeutungen besitzen.*

Insbesondere werden die Zahlen M, N sämmtlich $= 0$ sein, falls jene simultanen Bahnen $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$) die Curven nirgends überschreiten.

Zweite Bemerkung. — Im Satze (18.) werden, wie aus der Ableitung dieses Satzes folgt, die Zahlen N sämmtlich $= 0$ sein, falls die simultanen Bahnen $(\alpha_1 \ldots \beta_1)$, $(\alpha_2 \ldots \beta_2)$, ... $(\alpha_q \ldots \beta_q)$ wohl die Curven $a_\varkappa$, *nicht* aber die Curven $b_\varkappa$ überschritten haben. Analoges gilt von den aus (18.) abgeleiteten Formeln (A.). Demgemäss ergiebt sich folgender Satz, von dem später Gebrauch zu machen ist:

(B.) *Sind die in* (A.) *genannten simultanen Bahnen $(\alpha_1 \ldots \beta_1)$, $(\alpha_2 \ldots \beta_2)$, ... $(\alpha_q \ldots \beta_q)$ der Art, dass sie allerdings die Curven $a_\varkappa$, nicht aber die Curven $b_\varkappa$ überschreiten, so werden die in den Formeln* (A.) *enthaltenen ganzen Zahlen $N_1, N_2, \ldots N_p$ sämmtlich $= 0$ sein.*

Dritte Bemerkung. — Es seien beliebig viele auf $\mathfrak{R}$ reguläre Functionen gegeben: $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... $f_g(z)$. Ferner sei:

$$(\alpha.) \quad \varphi(z) = K_1 f_1(z) + K_2 f_2(z) \ldots + K_g f_g(z),$$

wo die K's beliebige, jedoch von Null verschiedene Constanten sein sollen. Bezeichnet man alsdann die elementaren Pole aller Functionen $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... $f_g(z)$ zusammengenommen mit $\overset{\varepsilon}{z}_1, \overset{\varepsilon}{z}_2, \ldots \overset{\varepsilon}{z}_q$, so werden offenbar die elementaren Pole von $\varphi(z)$ ebenfalls durch $\overset{\varepsilon}{z}_1, \overset{\varepsilon}{z}_2, \ldots \overset{\varepsilon}{z}_q$ dargestellt sein; mithin wird $\varphi(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung sein.

Vor allen Dingen sehen wir aus dieser Betrachtung, dass die elementaren *Pole* $\overset{\varepsilon}{z}_1, \overset{\varepsilon}{z}_2, \ldots \overset{\varepsilon}{z}_q$ der Function $\varphi(z)$ ungeändert *ein und dieselben* bleiben, welche Werthe man den Constanten K auch beilegen mag, falls man dieselben nur vom Nullwerden abhält. Andererseits aber werden die elementaren *Nullpunkte* $z_1, z_2, \ldots z_q$ der Function $\varphi(z)$ wesentlich von den K's abhängen, was angedeutet sein mag durch die Formeln:

$$z_1 = F_1(K_1, K_2, \dots K_g),$$
$$z_2 = F_2(K_1, K_2, \dots K_g),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$z_q = F_q(K_1, K_2, \dots K_g).$$

Wir wollen nun die Verschiebungen dz_j untersuchen, welche diese Nullpunkte z_j erleiden, sobald man den K's irgend welche Zuwüchse dK zuertheilt.

Zwischen den Polen und Nullpunkten der Function $\varphi(z)$ d. i. zwischen $\overset{x}{z}_1, \overset{x}{z}_2, \dots \overset{x}{z}_q$ und $z_1, z_2, \dots z_q$, finden [nach (A.)] die Formeln statt:

$$(\beta.)\qquad \sum_{j=1}^{j=q} [\mathrm{w}_\sigma(z_j) - \mathrm{w}_\sigma(\overset{x}{z}_j)] = M_\sigma \pi i + N_1 b_{1\sigma} + N_2 b_{2\sigma} \dots N_p b_{p\sigma},$$
$$\sigma = 1, 2, \dots p,$$

wo die M, N unbekannte ganze Zahlen vorstellen.

Analoge Formeln gelten aber auch offenbar für die Pole $\overset{x}{z}_1, \overset{x}{z}_2, \dots \overset{x}{z}_q$ und die Nullpunkte $(z_1 + dz_1)$, $(z_2 + dz_2)$, $\dots (z_q + dz_q)$ der *variirten* Function:

$$\psi(z) = (K_1 + dK_1)f_1(z) + (K_2 + dK_2)f_2(z) \dots + (K_g + dK_g)f_g(z).$$

Man erhält also:

$$(\gamma.)\qquad \sum_{j=1}^{j=q} [\mathrm{w}_\sigma(z_j + dz_j) - \mathrm{w}_\sigma(\overset{x}{z}_j)] = M'_\sigma \pi i + N_1' b_{1\sigma} + N_2' b_{2\sigma} \dots + N_p' b_{p\sigma},$$
$$\sigma = 1, 2, \dots p,$$

und sodann durch Subtraction der beiderlei Formeln $(\beta.)$ und $(\gamma.)$:

$$(\delta.)\qquad \sum_{j=1}^{j=q} [\mathrm{w}_\sigma(z_j + dz_j) - \mathrm{w}_\sigma(z_j)] = m_\sigma \pi i + n_1 b_{1\sigma} + n_2 b_{2\sigma} \dots + n_p b_{p\sigma},$$
$$\sigma = 1, 2, \dots p,$$

wo die $m = M' - M$ und die $n = N' - N$ *ganze Zahlen* sind.

Diese Formeln $(\beta.)$, $(\gamma.)$, $(\delta.)$ ergeben sich offenbar auch *dann*, wenn die Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \dots p)$ *vor* Bildung der Formeln in solcher Weise deformirt gedacht werden, dass die kleinen Verschiebungen oder Wegelemente dz_j $(j = 1, 2, \dots p)$ sämmtlich *innerhalb* $\mathfrak{R}_{ab}$ liegen. Dies vorausgesetzt ist aber die Differenz

$$\mathrm{w}_\sigma(z_j + dz_j) - \mathrm{w}_\sigma(z_j)$$

nichts Anderes als die mit $d\mathrm{w}_\sigma(z_j)$ zu bezeichnende *unendlich kleine* Grösse; so dass man erhält:

$$(\varepsilon.)\qquad \sum_{j=1}^{j=q} d\mathrm{w}_\sigma(z_j) = m_\sigma \pi i + n_1 b_{1\sigma} + n_2 b_{2\sigma} \dots + n_p b_{p\sigma},$$
$$\sigma = 1, 2, \dots p.$$

Da nun in diesen Formeln $(\varepsilon.)$ die linken Seiten *unendlich klein* sind, so müssen [Satz IV. pg. 248] die rechts stehenden Zahlen m, n sämmtlich $= 0$ sein, so dass sich also folgender Satz ergiebt.

Setzt man

$$q(z) = K_1 f_1(z) + K_2 f_2(z) \ldots + K_g f_g(z), \tag{5.}$$

wo die $f(z)$ gegebene auf $\mathfrak{R}$ reguläre Functionen, und die K's willkürliche, von Null verschiedene Constanten vorstellen sollen, so werden die elementaren Nullpunkte $z_1, z_2, \ldots z_q$ der Function $q(z)$ wesentlich von den Werthen der K's abhängen, und in Bewegung gerathen, sobald man die K's sich ändern lässt.

In welcher Weise man aber auch die K's, ohne sie zu Null zu machen, sich ändern lässt, stets werden für jedes Zeitelement der eintretenden Bewegung die p Gleichungen gelten:

$$d\mathrm{w}_\sigma(z_1) + d\mathrm{w}_\sigma(z_2) \ldots d\mathrm{w}_\sigma(z_q) = 0, \qquad \sigma = 1, 2, \ldots p. \tag{6.}$$

Dabei repräsentiren $dz_1, dz_2, \ldots dz_q$ die während des betrachteten Zeitelementes eintretenden Verschiebungen jener Nullpunkte, und $d\mathrm{w}_\sigma(z_1)$, $d\mathrm{w}_\sigma(z_2)$, $\ldots d\mathrm{w}_\sigma(z_q)$ die diesen Verschiebungen entsprechenden unendlich kleinen Zuwüchse der Werthe $\mathrm{w}_\sigma(z_1)$, $\mathrm{w}_\sigma(z_2)$, $\ldots \mathrm{w}_\sigma(z_q)$.

§ 2.

Das Abel'sche Theorem für die elementaren Integrale dritter Gattung.

Das irgend welchen festen Punkten ε_1 und ε_2 zugehörige elementare Integral dritter Gattung:

$$\Pi = \Pi(z) = \Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(z) \tag{1.}$$

ist auf $\mathfrak{R}_{ab}$ eindeutig und stetig, abgesehen von den Punkten $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ und einer von ε_1 nach ε_2 gehenden Linie η. In dieser Linie ist dasselbe mit der *constanten* Differenz $2\pi i$ behaftet; wie solches angedeutet sein mag durch die Formel:

$$\text{längs } \eta: \ \Pi(\lambda) - \Pi(\varrho) = 2\pi i. \tag{2.}$$

Ausserdem hat dasselbe in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ebenfalls *constante* Differenzen. [Vgl. pg. 227.]

Es sei nun ferner $f = f(z)$ irgend eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function, deren Pole und Nullpunkte promiscue mit $c_1, c_2, \ldots c_g$, und deren zugehörige Ordnungszahlen mit $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_g$ bezeichnet sein mögen. Wir denken uns eine von c_1 über c_2, c_3 etc. bis c_g fortlaufende Linie l gezogen, benennen die einzelnen Segmente dieser Linie mit $l_{12}, l_{23}, l_{34}, \ldots l_{g-1,g}$, und setzen die Werthe des Integrals

$$F = F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{df}{f} = \int_{z_0}^{z} d \log f \tag{3.}$$

[durch geeignete Beschränkung der Integrationscurve, vgl. pg. 229] in solcher Weise fest, dass dasselbe auf $\mathfrak{R}_{ab}$ eindeutig und stetig

ist, mit alleiniger Ausnahme der Linie l. Dasselbe hat alsdann längs der einzelnen Strecken $l_{12}, l_{23}, l_{31}, \ldots$ dieser Linie [nach pg. 229] folgende *constante* Differenzen:

$$
(4.)\qquad \begin{aligned}
L_{12} &= -2\pi i \cdot \mu_1, \\
L_{23} &= -2\pi i \cdot (\mu_1 + \mu_2), \\
L_{31} &= -2\pi i \cdot (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3), \\
&\text{etc. etc. etc.}
\end{aligned}
$$

Und ebenso wird dasselbe *constante* Differenzen haben in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$.

Wir setzen bei den folgenden Betrachtungen voraus, dass keiner der Punkte $c_1, c_2, \ldots c_g$ mit einem der Punkte ε_1, ε_2 zusammenfällt. Was ferner die Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ und die Linien l, η betrifft, so sind diese im Grunde genommen nur Hülfslinien, über welche innerhalb gewisser Grenzen nach Belieben, respective nach Zweckmässigkeitsrücksichten verfügt werden darf. Sobald jene $(g + 2)$ Punkte $c_1, c_2, \ldots c_g, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ in bestimmter Weise markirt worden sind, mögen zuvörderst die Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$, (5.) was durch eine geringe Deformation derselben leicht zu erreichen ist, so eingerichtet werden, dass jene $(g + 2)$ Punkte sämmtlich *innerhalb* der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ [nicht etwa hart am Rande derselben] liegen. Sodann aber mag die Linie l von c_1 aus, über $c_2, c_3, \ldots c_{g-1}$ bis c_g in solcher Weise gezogen werden, dass sie ebenfalls vollständig *innerhalb* $\mathfrak{R}_{ab}$ verläuft. Und hierauf endlich mag die von ε_1 nach ε_2 gehende Linie η in solcher Weise construirt werden, dass sie ebenfalls vollständig *innerhalb* $\mathfrak{R}_{ab}$ bleibt, und zugleich der Linie l *nirgends begegnet*.

Solches ausgeführt, repräsentiren also die Linien l und η gewissermassen zwei von einander getrennte, langgestreckte Inseln inmitten der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$. Gleichzeitig repräsentirt alsdann $\Pi = \Pi(z)$ eine Function, deren Stetigkeit auf der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ nur in η, nicht aber in l eine Unterbrechung erleidet. Und umgekehrt repräsentirt alsdann $F = F(z)$ eine Function, deren Stetigkeit auf $\mathfrak{R}_{ab}$ nur in l, nicht aber in η unterbrochen ist.

Denkt man sich die Bereiche $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{E}$ der Linien l und η von $\mathfrak{R}_{ab}$ abgesondert, und die alsdann noch übrig bleibende Fläche mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{R}_{ab} - \mathfrak{L} - \mathfrak{E},$$

so werden also F und Π auf $\mathfrak{S}$ *allenthalben* eindeutig und stetig sein. Folglich ist [Satz (4.) pg. 196]:

$$\int_{\mathfrak{S}} \Pi \, dF = 0, \tag{6.}$$

oder, was dasselbe ist:

$$\int_{\mathfrak{R}_{a,b}} \Pi \, dF - \int_{\mathfrak{L}} \Pi \, dF - \int_{\mathfrak{E}} \Pi \, dF = 0, \tag{7.}$$

wo die Indices, wie gewöhnlich, die *positiven* Randintegrationen für die betreffenden Flächen andeuten. Es ist aber $\Pi dF = d(\Pi F) - F d\Pi$. Dies angewandt auf das *letzte* der Integrale (7.), erhält man:

$$\int_{\mathfrak{R}_{a,b}} \Pi \, dF = \int_{\mathfrak{L}} \Pi \, dF - \int_{\mathfrak{E}} F \, d\Pi. \tag{8.}$$

All' diese Formeln bleiben gültig bei *beliebiger Verkleinerung* der Bereiche $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{E}$. Man kann daher z. B. das Bereich $\mathfrak{E}$ zusammenschrumpfen lassen auf die Bereiche $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ der beiden Punkte ε_1 und ε_2 und auf das zwischen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ befindliche Segment der Linie η. Denkt man sich diese Zusammenschrumpfung oder Reduction von $\mathfrak{E}$ wirklich eingetreten, so nimmt das letzte Integral der Formel (8.) die Gestalt an:

$$\int_{\mathfrak{E}} F \, d\Pi = \int_{\mathfrak{E}_1} F \, d\Pi + \int_{\eta} |F(\lambda) - F(\varrho)| \, d\Pi + \int_{\mathfrak{E}_2} F \, d\Pi; \tag{α.}$$

wie solches sofort sich ergiebt, falls man nur beachtet, dass Π längs η eine *constante* Differenz $(= 2\pi i)$ hat, dass also das Differential $d\Pi$ zu beiden Ufern der Linie η *einerlei* Werthe besitzt. Nun ist aber die Stetigkeit von F in η nicht unterbrochen, mithin längs η: $F(\lambda) = F(\varrho)$. Demgemäss verschwindet in (α.) das *mittlere* Integral der rechten Seite; so dass man erhält:

$$\int_{\mathfrak{E}} F \, d\Pi = \int_{\mathfrak{E}_1} F \, d\Pi + \int_{\mathfrak{E}_2} F \, d\Pi. \tag{β.}$$

Einer analogen Behandlung ist offenbar auch das *vorletzte* Integral der Formel (8.) fähig. Man erhält:

$$\int_{\mathfrak{L}} \Pi \, dF = \int_{\mathfrak{U}_1} \Pi \, dF + \int_{\mathfrak{U}_2} \Pi \, dF + \ldots + \int_{\mathfrak{U}_y} \Pi \, dF, \tag{γ.}$$

wo $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots \mathfrak{U}_y$ die Bereiche der auf l gelegenen Punkte $c_1, c_2, \ldots c_y$ vorstellen. Mit Rücksicht auf diese Ergebnisse (β.), (γ.) gewinnt nun die Formel (8.) die Gestalt:

$$\int_{\mathfrak{R}_{a,b}} \Pi \, dF = \sum_{j=1}^{j=y} \int_{\mathfrak{U}_j} \Pi \, dF - \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\mathfrak{E}_j} F \, d\Pi. \tag{9.}$$

Die Integrale rechter Hand sind einfacher ausdrückbar. Das über den Rand von $\mathfrak{U}_j$ erstreckte Integral kann nämlich, nach (3.), auch so geschrieben werden:

$$\int_{\mathfrak{U}_j} \Pi \, dF = \int_{\mathfrak{U}_j} \Pi \, d \log f\,;$$

woraus mit Rücksicht auf frühere Betrachtungen [(α.), (β.) pg. 286] sich ergiebt:

$$(\sigma.) \qquad \int_{\mathfrak{U}_j} \Pi \, dF = 2\pi i \cdot \mu_j \Pi(c_j).$$

Andererseits besitzt das über den Rand von $\mathfrak{E}_j$ erstreckte Integral [vgl. (f.) pg. 270, wo übrigens statt der gegenwärtigen Buchstaben ε, $\mathfrak{E}$ respective c, $\mathfrak{U}$ stehen] den Werth:

$$(\tau.) \qquad \int_{\mathfrak{E}_j} F \, d\Pi = (-1)^j \cdot 2\pi i \, F(\varepsilon_j).$$

Durch Substitution der Werthe (σ.), (τ.) gewinnt die Formel (9.) die Gestalt:

$$(10.) \qquad \int_{\mathfrak{R}_{ab}} \Pi \, dF = 2\pi i \left\{ \left(\sum_{j=1}^{j=g} \mu_j \Pi(c_j) \right) + F(\varepsilon_1) - F(\varepsilon_2) \right\},$$

oder, falls man beachtet, dass, nach (3.), $dF = d \log f$ und $F(\varepsilon_1) - F(\varepsilon_2) = \log f(\varepsilon_1) - \log f(\varepsilon_2)$ ist, folgende Gestalt:

$$(11.) \qquad \int_{\mathfrak{R}_{ab}} \Pi \, d \log f = 2\pi i \left\{ \log \frac{f(\varepsilon_1)}{f(\varepsilon_2)} + \sum_{j=1}^{j=g} \mu_j \Pi(c_j) \right\} \cdot$$

Das Integral linker Hand hat aber [nach (β.) pg. 249] den Werth:

$$(12.) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \left(\mathsf{A}^{(\varkappa)} \int_{a_\varkappa} d \log f + \mathsf{B}^{(\varkappa)} \int_{b_\varkappa} d \log f \right),$$

wo die $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$, $\mathsf{B}^{(\varkappa)}$ die constanten Differenzen von Π in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ vorstellen. Auch übersieht man leicht [vgl. die Erläuterung auf pg. 287], dass die in diesem Ausdruck (12.) enthaltenen Integrale Werthe von folgender Form besitzen:

$$(13.) \qquad \int_{a_\varkappa} d \log f = 2\pi i \, M^{(\varkappa)}, \qquad \int_{b_\varkappa} d \log f = 2\pi i \, N^{(\varkappa)},$$

wo die $M^{(\varkappa)}$, $N^{(\varkappa)}$ *ganze Zahlen* sind. — Auf Grund dieser Formeln (11.), (12.), (13.) gelangt man daher zu folgendem Resultat:

Repräsentirt $f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function, und bezeichnet man die Pole und Nullpunkte derselben promiscue mit $c_1, c_2, \ldots c_g$, ferner ihre zugehörigen Ordnungszahlen mit $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_g$, so gilt für das elementare Integral dritter Gattung;

$$\Pi = \Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(z)$$

die Formel:

$$(14.) \qquad \sum_{j=1}^{j=g} \mu_j \Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(c_j) = \log \frac{f(\varepsilon_2)}{f(\varepsilon_1)} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} (M^{(\varkappa)} \mathsf{A}^{(\varkappa)} + N^{(\varkappa)} \mathsf{B}^{(\varkappa)}).$$

Hier bezeichnen die $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$, $\mathsf{B}^{(\varkappa)}$ *die constanten Differenzen von* Π *in den Curven* $a_\varkappa, b_\varkappa$; *während* $M^{(\varkappa)}$, $N^{(\varkappa)}$ *ganze Zahlen vorstellen, deren Werthe sich bestimmen mittelst der Formeln:*

$$M^{(\varkappa)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a_\varkappa}\frac{df(z)}{f(z)}, \qquad N^{(\varkappa)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{b_\varkappa}\frac{df(z)}{f(z)}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass keiner der Punkte $c_1, c_2, \ldots c_g$ *mit einem der Punkte* $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ *coincidirt, und ferner vorausgesetzt, die Curven* $a_\varkappa, b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ *seien* [was durch eine kleine Deformation derselben stets zu bewerkstelligen ist] *so eingerichtet, dass all' jene* $(g + 2)$ *Punkte* $c_1, c_2, \ldots c_g, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ *innerhalb* $\mathfrak{R}_{ab}$ *liegen.*

Hiermit sind in der That alle in (5.) gemachten Voraussetzungen, so weit sie für den vorstehenden Satz wesentlich sind, recapitulirt. Denn die Linie l spielt in diesem Satz keine Rolle mehr, so dass also die betreffs derselben gemachten Voraussetzungen zu wiederholen überflüssig sein würde.

Vom vorstehenden Satze aus gelangt man nun, indem man $f(z) - K$ statt $f(z)$ setzt [vgl. die analogen Betrachtungen auf pg. 288], zu folgendem etwas allgemeinern Satze:

Es sei K *eine beliebig gegebene Constante. Ferner sei* $f(z)$, *mithin auch* $f(z) - K$ *eine auf* $\mathfrak{R}$ *reguläre Function* q^{ter} *Ordnung. Ueberdies seien* $z_1, z_2, \ldots z_q$ *und* $\overset{\infty}{z}_1, \overset{\infty}{z}_2, \ldots \overset{\infty}{z}_q$ *die elementaren Nullpunkte und Pole der Function* $f(z) - K$. *Alsdann gilt für das elementare Integral dritter Gattung:*

$$\Pi = \Pi_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(z)$$

die Formel:

$$(15.)\quad \sum_{j=1}^{j=q}[\Pi_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(z_j) - \Pi_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\overset{\infty}{z}_j)] = \log\frac{f(\varepsilon_2) - K}{f(\varepsilon_1) - K} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}(M^{(\varkappa)}\mathsf{A}^{(\varkappa)} + N^{(\varkappa)}\mathsf{B}^{(\varkappa)}).$$

Hier bezeichnen $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$, $\mathsf{B}^{(\varkappa)}$ *die constanten Differenzen von* Π *in den Curven* $a_\varkappa, b_\varkappa$; *während die* $M^{(\varkappa)}$, $N^{(\varkappa)}$ *ganze Zahlen vorstellen, deren Werthe sich durch die Formeln bestimmen:*

$$M^{(\varkappa)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a_\varkappa}\frac{df(z)}{f(z) - K}, \qquad N^{(\varkappa)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{b_\varkappa}\frac{df(z)}{f(z) - K}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass keiner der Punkte $z_j, \overset{\infty}{z}_j$ $(j = 1, 2, \ldots q)$ *mit einem der Punkte* $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ *coincidirt, und ferner vorausgesetzt, die Curven* $a_\varkappa, b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ *seien so eingerichtet, dass all' jene Punkte* $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ *und* $z_j, \overset{\infty}{z}_j$ $(j = 1, 2, \ldots q)$ *innerhalb* $\mathfrak{R}_{ab}$ *liegen.* Uebrigens kann von diesen Voraussetzungen die erste fallen gelassen werden. Denn sollte einer der Punkte $z_j, \overset{\infty}{z}_j$ einem der beiden Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

bis zur Coincidenz sich nähern, so würden, wie man sofort übersieht, beide Seiten der Formel (15.) unendlich werden, die Formel also gültig bleiben.

Giebt man jetzt der Constante K einen unendlich kleinen Zuwachs dK, so werden die Punkte z_j unendlich kleine Verschiebungen dz_j erfahren, während die Punkte $\overset{x}{z}_j$ und ebenso auch die ganzen Zahlen $M^{(\varkappa)}$, $N^{(\varkappa)}$ ungeändert bleiben [vgl. die analogen Betrachtungen auf. pg. 289, 290]. Man gelangt daher zu folgendem Satz:

Theorem. — *Versteht man unter $f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung, bezeichnet man ferner irgend zwei einander unendlich nahe Niveaupunktsysteme derselben mit $z_1, z_2, \ldots z_q$ und $z_1 + dz_1$, $z_2 + dz_2$, $\ldots z_q + dz_q$, und bezeichnet man endlich die Werthe von $f(z)$ in diesen beiden Niveaupunktsystemen mit K und $K + dK$, so gilt für das elementare Integral dritter Gattung:*

$$\Pi = \Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(z)$$

die Formel:

$$\sum_{j=1}^{j=q} d\,\Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(z_j) = d \log \frac{f(\varepsilon_2) - K}{f(\varepsilon_1) - K}, \tag{16.}$$

wo das vorgesetzte d die unendlich kleinen Aenderungen bezeichnet, welche die betreffenden Grössen durch Vertauschung von $z_1, z_2, \ldots z_q$, K mit $z_1 + dz_1$, $z_2 + dz_2$, $\ldots z_q + dz_q$, $K + dK$ erfahren.

Aus (16.) *ergiebt sich nun weiter die Formel:*

$$\sum_{j=1}^{j=q} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} d\,\Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(z_j) = \log \frac{f(\varepsilon_2) - \mathsf{B}}{f(\varepsilon_1) - \mathsf{B}} - \log \frac{f(\varepsilon_2) - \mathsf{A}}{f(\varepsilon_1) - \mathsf{A}}, \tag{17.}$$

die Integrationen hinerstreckt gedacht über irgend welche simultane Bahnen $(\alpha_1 \ldots \beta_1)$, $(\alpha_2 \ldots \beta_2)$, $\ldots (\alpha_q \ldots \beta_q)$ der in Rede stehenden Niveaupunkte $z_1, z_2, \ldots z_q$. Dabei sind unter A *und* B *diejenigen beiden Werthe zu verstehen, welche $f(z)$ einerseits in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$, andererseits in $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ besitzt.*

Soll die Bahn $(\alpha_j \ldots \beta_j)$ keine der Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$, noch auch die von ε_1 nach ε_2 gehende Unstetigkeitslinie η des Integrals Π überschreiten dürfen, so ist offenbar:

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} d\,\Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(z_j) = \Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\beta_j) - \Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\alpha_j). \tag{J.}$$

Gestattet man hingegen jener Bahn, die Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ und η beliebig oft zu überschreiten, so erhält man die [mit (Y.) pg. 292] analoge Formel:

$$(\mathrm{Y.})\quad \int_{\alpha_j}^{\beta_j} d\Pi_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(z) = \Pi_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\beta_j) - \Pi_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\alpha_j) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}{}' [m_j^{(\varkappa)}\mathsf{A}^{(\varkappa)} + n_j^{(\varkappa)}\mathsf{B}^{(\varkappa)}] + \mu_j \cdot 2\pi i,$$

wo die m, n, μ ganze Zahlen vorstellen. Und zwar geht aus der Bedeutung dieser Zahlen [vgl. (Z.) p. 293] deutlich hervor, dass die Zahlen m sämmtlich $= 0$ sind, falls die in Rede stehende Bahn $(\alpha_j \ldots \beta_j)$ keine der Curven $a_\varkappa$ überschritten hat, dass ferner die n sämmtlich $= 0$ sind, falls jene Bahn keine der Curven $b_\varkappa$ überschritten hat, und dass endlich die Zahl μ (d. i. μ_j) den Werth 0 besitzt, falls jene Bahn die Curve η nicht überschritten hat. Substituirt man den Werth (Y.) in (17.), so kann man dabei die Zahlen μ_j unterdrücken, weil die in (17.) vorhandenen Logarithmen an und für sich bereits mit Unbestimmtheiten von der Form $\mathsf{M} \cdot 2\pi i$ behaftet sind. Man gelangt daher durch diese Substitution zu folgendem Resultat:

Andere Form des Theorems. — *Es sei $f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung. Versteht man alsdann unter $(\alpha_1 \ldots \beta_1)$, $(\alpha_2 \ldots \beta_2)$, $\ldots (\alpha_q \ldots \beta_q)$ irgend welche simultane Bahnen der q Niveaupunkte von $f(z)$, so gilt die Formel:*

$$(18.)\quad \sum_{j=1}^{j=q}{}' [\Pi_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\beta_j) - \Pi_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\alpha_j)] = \log\frac{f(\varepsilon_2) - \mathsf{B}}{f(\varepsilon_1) - \mathsf{B}} - \log\frac{f(\varepsilon_2) - \mathsf{A}}{f(\varepsilon_1) - \mathsf{A}} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}{}' [M^{(\varkappa)}\mathsf{A}^{(\varkappa)} + N^{(\varkappa)}\mathsf{B}^{(\varkappa)}].$$

Dabei sind unter A und B die Werthe der Function $f(z)$ in den Niveaupunktsystemen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ zu verstehen. Andererseits sind unter $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$, $\mathsf{B}^{(\varkappa)}$ die constanten Differenzen von $\Pi_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(z)$ in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, endlich unter $M^{(\varkappa)}$, $N^{(\varkappa)}$ ganze Zahlen zu verstehen.

(19.) *Ueberschreiten jene simultane Bahnen $(\alpha_1 \ldots \beta_1)$, $(\alpha_2 \ldots \beta_2)$, $\ldots (\alpha_q \ldots \beta_q)$ keine der Curven $a_\varkappa$, so sind die $M^{(\varkappa)}$ sämmtlich $= 0$. Und sollte andererseits der Fall vorliegen, dass jene Bahnen keine der Curven $b_\varkappa$ überschreiten, so werden die $N^{(\varkappa)}$ sämmtlich $= 0$ sein.*

Beispiel. — Betrachtet man insbesondere das *Normal*-Integral ϖ (an Stelle von Π), so sind bekanntlich [vgl. pg. 268] die Differenzen $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$ sämmtlich $= 0$. Demgemäss ergiebt sich aus (18.) und mit Rücksicht auf (19.) der Satz:

Es sei $f(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung. Versteht man alsdann unter $(\alpha_1 \ldots \beta_1)$, $(\alpha_2 \ldots \beta_2)$, $\ldots (\alpha_q \ldots \beta_q)$ irgend welche simultane Bahnen der q Niveaupunkte von $f(z)$, und setzt man

voraus, dass diese Bahnen allerdings die Curven $a_\varkappa$, nicht aber die Curven $b_\varkappa$ überschreiten, so gilt die Formel:

$$(20.)\qquad \sum_{j=1}^{j=q} [\bar{\omega}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\beta_j) - \bar{\omega}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\alpha_j)] = \log \frac{f(\varepsilon_2) - \mathsf{B}}{f(\varepsilon_1) - \mathsf{B}} - \log \frac{f(\varepsilon_2) - \mathsf{A}}{f(\varepsilon_1) - \mathsf{A}}.$$

Dabei repräsentiren A *und* B *die Werthe von $f(z)$ in den Niveaupunktsystemen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$.*

§ 3.

Ueber die Vertauschung der Argumente und Parameter in den elementaren Integralen dritter Gattung.

Wir betrachten irgend zwei elementare Integrale dritter Gattung, die wir zur Abkürzung mit Φ und Φ' bezeichnen:

$$(1.)\qquad \Phi = \Pi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(z) \quad \text{und} \quad \Phi' = \Pi'_{\varepsilon_1' \varepsilon_2'}(z).$$

Sind η und η' die Unstetigkeitslinien von Φ und Φ', ferner $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ die Bereiche dieser Linien, und setzt man

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{R}_{ab} - \mathfrak{E} - \mathfrak{E}',$$

so sind Φ und Φ' auf der Fläche $\mathfrak{S}$ eindeutig und stetig. Folglich ist [nach (4.) pg. 196]:

$$(2.)\qquad \int_{\mathfrak{S}} \Phi \, d\Phi' = 0.$$

Diese Formel kann man auch so schreiben:

$$(3.)\qquad \int_{\mathfrak{R}_{ab}} \Phi \, d\Phi' - \int_{\mathfrak{E}} \Phi \, d\Phi' - \int_{\mathfrak{E}'} \Phi \, d\Phi' = 0,$$

oder, weil $\Phi \, d\Phi' = d(\Phi\Phi') - \Phi' d\Phi$ ist, auch so:

$$(4.)\qquad \int_{\mathfrak{R}_{ab}} \Phi \, d\Phi' + \int_{\mathfrak{E}} \Phi' \, d\Phi - \int_{\mathfrak{E}'} \Phi \, d\Phi' = 0,$$

oder, falls man die beiden letzten Integrale nach Maassgabe der Betrachtungen (α.), (β.) p. 298 umgestaltet, auch so:

$$(5.)\qquad \int_{\mathfrak{R}_{ab}} \Phi \, d\Phi' + \sum_{j=1}^{j=2} \left\{ \int_{\mathfrak{E}_j} \Phi' \, d\Phi - \int_{\mathfrak{E}_j'} \Phi \, d\Phi' \right\} = 0.$$

Nach (f.) pg. 270, oder wenigstens *analog* zur dortigen Formel, ist aber:

$$\int_{\mathfrak{E}_j} \Phi' \, d\Phi = (-1)^j \, 2\pi i \, \Phi'(\varepsilon_j).$$

Desgleichen wird offenbar:

$$\int_{\mathfrak{E}_j'} \Phi \, d\Phi' = (-1)^j \cdot 2\pi i \, \Phi(\varepsilon_j');$$

so dass also die Formel (5.) die Gestalt erhält:

$$(6.)\quad \int_{\mathfrak{R}_{ab}} \Phi\, d\Phi' - 2\pi i\,[\Phi'(\varepsilon_1) - \Phi'(\varepsilon_2)] + 2\pi i\,[\Phi(\varepsilon_1') - \Phi(\varepsilon_2')] = 0.$$

Dividirt man diese Formel durch $2\pi i$, und beachtet man den Satz (γ.) pg. 249, so folgt:

$$(7.)\quad \frac{1}{2\pi i}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}(A^{(\varkappa)}B'^{(\varkappa)} - A'^{(\varkappa)}B^{(\varkappa)}) - [\Phi'(\varepsilon_1) - \Phi'(\varepsilon_2)] + [\Phi(\varepsilon_1') - \Phi(\varepsilon_2')] = 0.$$

wo die $A^{(\varkappa)}$, $B^{(\varkappa)}$ und $A'^{(\varkappa)}$, $B'^{(\varkappa)}$ die constanten Differenzen der Functionen Φ und Φ' in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ bezeichnen.

Einfacher gestaltet sich die Formel (7.), wenn man für Φ und Φ' zwei *Normal*-Integrale dritter Gattung nimmt; denn alsdann sind die $A^{(\varkappa)}$ und $A'^{(\varkappa)}$ *Null*. Man gelangt so zu folgendem Satze:

Bildet man das Normal-Integral dritter Gattung ϖ successive für ein Punktpaar ε_1, ε_2 und für irgend ein anderes Punktpaar ε_1', ε_2', so wird für diese Functionen

$$(8.)\qquad \varpi_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(z) \quad \textit{und} \quad \varpi_{\varepsilon_1'\varepsilon_2'}(z)$$

jederzeit folgende Relation stattfinden:

$$(9.)\qquad [\varpi_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(z)]_{z=\varepsilon_1'}^{z=\varepsilon_2'} = [\varpi_{\varepsilon_1'\varepsilon_2'}(z)]_{z=\varepsilon_1}^{z=\varepsilon_2}.$$

Man kann diese Formel auch so schreiben:

$$(10.)\qquad \int_{\varepsilon_1'}^{\varepsilon_2'} d\varpi_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(z) = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} d\varpi_{\varepsilon_1'\varepsilon_2'}(z),$$

vorausgesetzt, dass man die Integrationscurve links auf die Fläche $\mathfrak{R}_{ab\eta}$, und diejenige rechts auf die Fläche $\mathfrak{R}_{ab\eta'}$ einschränkt. Dabei sollen unter η und η' die Unstetigkeitslinien $\varepsilon_1\varepsilon_2$ und $\varepsilon_1'\varepsilon_2'$ der beiden Functionen (8.) *verstanden sein.*

Zwölftes Capitel.

Einführung der Thetafunctionen.

§ 1.

Die von einem einzigen Argument abhängende Thetafunction.

Bekanntlich ist die ins Unendliche fortlaufende Reihe:

$$1 + 2e^{b} + 2e^{4b} + 2e^{9b} + 2e^{16b} + 2e^{25b} + \ldots$$

oder:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{n^2 b}$$

beständig *convergent*, falls b eine reelle Grösse von negativem Werthe ist. Versteht man unter b keine reelle, sondern eine beliebig gegebene imaginäre Grösse von der Form $(\varrho + i\sigma)$, so gilt genau dasselbe, falls nur ϱ *negativ* ist.

Genau dasselbe gilt aber auch dann noch, wenn man als Exponenten nicht $n^2 b$, sondern einen Ausdruck von der Form $n^2 b + nc$ nimmt, wo c irgend welchen reellen oder imaginären Werth besitzen darf. Bildet man nämlich die Reihe:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{n^2 b + nc},$$

so wird dieselbe — völlig gleichgültig, welches der Werth von c ist — jederzeit *convergent* sein, sobald nur der *reelle Theil* von b wiederum einen negativen Werth hat.

Wir gelangen demnach, wenn wir uns unter b irgend welche Constante denken, und wenn wir an Stelle von c irgend welche variable Grösse $2(x + iy)$ oder $2z$ nehmen, zu folgendem

Satz. — *Die unendliche Reihe*

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{bn^2 + 2zn} \tag{1.}$$

besitzt, falls der reelle Theil der Constanten b negativ ist, und so lange

die Variable z nicht unendlich gross wird, jederzeit einen völlig bestimmten, endlichen Werth.

Dieser Werth kann als eine Function angesehen werden, welche von der Variablen z abhängt, und welche ausserdem mit einem constanten Parameter b behaftet ist: er mag, um solches anzudeuten, in Zukunft mit

$$\vartheta\,(z, b) \tag{2.}$$

bezeichnet werden.

Wir wollen nun gegenwärtig diese Function $\vartheta\,(z, b)$ näher untersuchen, und mehrere wichtige Eigenschaften derselben zu Tage treten lassen.

Da sich in unserer Formel

$$\vartheta\,(z, b) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{bn^2+2zn} \tag{3.}$$

die Summation über alle ganzen Zahlen n von $-\infty$ bis $+\infty$ hinerstreckt, so können wir offenbar — ohne dadurch in der Formel irgend welche Veränderungen hervorzubringen — das darin enthaltene n mit $(-n)$ vertauschen, die Function $\vartheta\,(z, b)$ also auch so darstellen:

$$\vartheta\,(z, b) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{bn^2-2zn}. \tag{4.}$$

Andererseits erhalten wir nun aber, wenn wir den Werth der Function für ein *anderes* Argument, nämlich für das Argument $(-z)$ haben wollen, zufolge (3.) die Formel:

$$\vartheta\,(-z, b) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{bn^2-2zn}; \tag{5.}$$

und nunmehr erkennen wir aus (4.) und (5.), dass die Werthe von $\vartheta\,(z, b)$ und von $\vartheta\,(-z, b)$ unter einander identisch sind. *Wir sehen demnach — und solches würde als erste Eigenschaft unserer Function ϑ hervorzuheben sein —, dass der Werth von $\vartheta\,(z, b)$ ungeändert bleibt, wenn man z mit $(-z)$ vertauscht.* (6.)

Ferner überzeugt man sich leicht davon, dass die Function $\vartheta\,(z, b)$ in ihrem Werthe ungeändert bleibt, sobald man das Argument z um ein beliebiges Vielfaches von πi vermehrt. Betrachtet man nämlich in der als Definition dieser Function angegebenen unendlichen Reihe (3.) irgend ein einzelnes Glied

$$e^{bn^2+2zn},$$

so wird dieses, falls man z um ein Vielfaches von πi, z. B. um $p\pi i$ zunehmen lässt, übergehen in:

$$e^{bn^2+2(z+p\pi i)n},$$

also übergehen in:

$$\left(e^{bn^2+2zn}\right)\left(e^{pn.2\pi i}\right).$$

Nun ist aber $e^{2\pi i} = 1$, mithin auch $e^{pn.2\pi i} = 1$. Wir sehen demnach, dass das betrachtete Glied unserer Reihe bei der Vermehrung von z um $p\pi i$ völlig ungeändert geblieben ist. Gleiches wird natürlich auch von jedwedem andern Gliede der Reihe, Gleiches also auch von der Reihe selber gelten. *Versteht man also unter p irgend welche ganze Zahl, so wird — und dies würde als zweite Eigenschaft unserer Function anzuführen sein — jederzeit*

$$\vartheta(z + p\pi i, b) = \vartheta(z, b) \tag{7.}$$

sein. Die Function $\vartheta(z, b)$ ist demnach eine periodische, und der Index ihrer Periode gleich πi. Denkt man sich die Werthe des variablen Argumentes z oder $(x + iy)$ durch die Punkte der Horizontalebene dargestellt, und denkt man sich sodann diese Ebene durch Linien, welche der x-Achse parallel laufen, und im Abstande π auf einander folgen, in lauter einzelne Flächenstreifen zerlegt, so werden sich die Werthe, welche $\vartheta(z, b)$ innerhalb eines solchen Flächenstreifens besitzt, von Neuem, und in genau derselben Vertheilung, in jedem andern Streifen wiederholen.

Wir wollen nun ferner untersuchen, in welcher Weise der Werth von $\vartheta(z, b)$ sich ändert, wenn man das Argument z nicht um ein Vielfaches von πi, sondern um ein Vielfaches der gegebenen Constanten b vermehrt. Da sich die als Definition von $\vartheta(z, b)$ angegebene Reihe (3.) von $n = -\infty$ bis $n = +\infty$ hinerstreckt, so wird ihr Werth, falls man n mit $n + 1$, oder mit $n + 2$, oder mit $n + 3$, u. s. w. vertauscht, offenbar völlig ungeändert bleiben. Es wird daher z. B. völlig gleichgültig sein, ob wir als Definition der Function $\vartheta(z, b)$ jene ursprüngliche Reihe

$$\vartheta(z, b) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{bn^2+2zn} \tag{8.}$$

nehmen, oder ob wir statt dieser als Definition jener Function die Reihe

$$\vartheta(z, b) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{b(n+1)^2+2z(n+1)}$$

aufstellen. Die letztere Reihe lässt sich auch so darstellen:

$$\vartheta(z, b) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{bn^2+2(z+b)n+(b+2z)},$$

oder auch so:

$$(9.)\qquad \vartheta(z, b) = e^{b+2z} \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{bn^2+2(z+b)n}.$$

Nun ergiebt sich aber andererseits, falls man in (8.) an Stelle des ursprünglichen Argumentes z das Argument $(z+b)$ einsetzt, für den Werth, welchen die Function ϑ für dieses neue Argument annimmt, folgender Ausdruck:

$$(10.)\qquad \vartheta(z+b, b) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{bn^2+2(z+b)n}.$$

Und nunmehr ergiebt sich durch Vergleichung von (9.) und (10.) sofort, dass

$$(11.)\qquad \vartheta(z+b, b) = e^{-(b+2z)} \cdot \vartheta(z, b)$$

ist. Die Formel lässt sich leicht verallgemeinern. Da nämlich z eine ganz beliebige Variable ist, so können wir für z beliebige, und nach einander verschiedene Werthe nehmen. Setzen wir für z der Reihe nach die Werthe:

$$z,\ z+b,\ z+2b,\ \ldots z+(q-1)\,b,$$

wo q eine beliebige ganze Zahl sein soll, so erhalten wir aus unserer Formel (11.) der Reihe nach folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\vartheta(z+b, b) &= e^{-(b+2z)} \cdot \vartheta(z, b),\\
\vartheta(z+2b, b) &= e^{-(3b+2z)} \cdot \vartheta(z+b, b),\\
\vartheta(z+3b, b) &= e^{-(5b+2z)} \cdot \vartheta(z+2b, b),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vartheta(z+qb, b) &= e^{-((2q-1)b+2z)} \cdot \vartheta(z+(q-1)\,b, b);
\end{aligned}$$

und sodann durch Multiplication all dieser q Gleichungen:

$$\vartheta(z+qb, b) = e^{-(sb+2qz)} \cdot \vartheta(z, b).$$

Hier ist

$$s = 1+3+5+\ldots+(2q-1),$$

also

$$s = \frac{q \cdot 2q}{2} = q^2.$$

Somit können wir als dritte Eigenschaft unserer Function ϑ Folgendes hinstellen: Versteht man unter q irgend welche ganze Zahl, so wird jederzeit

$$(12.)\qquad \vartheta(z+qb, b) = e^{-(q^2b+2qz)} \cdot \vartheta(z, b)$$

sein.

Zufolge der vorhin gefundenen zweiten Eigenschaft bleibt der Werth der Function ϑ ungeändert, wenn man das in ihr enthaltene Argument um ein Vielfaches von πi, z. B. um $p\pi i$ vermehrt. Demnach wird die linke Seite der zuletzt erhaltenen Formel in ihrem Werthe keinerlei Aenderung erleiden, wenn man das daselbst vorhandene Argument $(z + qb)$ mit dem Argument $(z + qb + p\pi i)$ vertauscht. Thut man solches, so verwandelt sich jene Formel in:

$$\vartheta(z + p\pi i + qb, b) = e^{-(q^2 b + 2qz)} \cdot \vartheta(z, b). \tag{13.}$$

Und diese Formel kann als der gleichzeitige Ausdruck der zweiten und dritten Eigenschaft angesehen werden. Setzt man nämlich $q = 0$, so repräsentirt sie die zweite, und setzt man $p = 0$, so repräsentirt sie die dritte Eigenschaft.

Wir wollen schliesslich noch untersuchen, für welche Werthe von z die Function $\vartheta(z, b)$ verschwindet. Die Reihe (3.):

$$\vartheta(z, b) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{bn^2 + 2zn}, \tag{14.}$$

durch welche wir die Function definirt haben, wird in ihrem Werthe völlig ungeändert bleiben, wenn wir darin n mit $(-n)$, oder auch, wenn wir darin n mit $(-n-\nu)$ vertauschen, vorausgesetzt, dass wir unter ν irgend welche *ganze Zahl* verstehen. Somit können wir statt (14.) auch schreiben:

$$\vartheta(z, b) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{b(n+\nu)^2 - 2z(n+\nu)}, \tag{15.}$$

oder, wie sich durch Addition von (14.) und (15.) ergiebt, auch schreiben:

$$\vartheta(z, b) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left\{ e^{bn^2 + 2zn} + e^{b(n+\nu)^2 - 2z(n+\nu)} \right\}. \tag{16.}$$

Da nun $e^{i\pi} = -1$ ist, so wird ein Aggregat von der Form

$$e^A + e^B$$

jederzeit Null sein, sobald die Exponenten A und B um $i\pi$, oder auch um ein *ungerades* Vielfaches von $i\pi$ von einander verschieden sind. Demnach wird das in (16.) unter dem Summenzeichen stehende Aggregat Null sein, sobald die darin auftretenden Exponenten

$$\begin{cases} bn^2 + 2zn, \quad \text{und} \\ b(n+\nu)^2 - 2z(n+\nu) \end{cases} \tag{α.}$$

um ein *ungerades* Vielfaches von πi differiren. Findet solches nicht

nur statt für ein bestimmtes n, sondern für jeden *beliebigen* Werth der Zahl n, so werden *sämmtliche* Glieder der Reihe (16.) Null werden. jene Reihe selber also ebenfalls. D. h. *bestimmt man die Variable z der Art, dass die beiden Ausdrücke* (α.) *für jeden beliebigen Werth der Zahl n um ein ungerades Vielfaches von πi verschieden sind, so wird für diesen Werth der Variablen die Function $\vartheta(z, b)$ verschwinden.* Die Differenz der beiden Ausdrücke (α.) ist gleich

$$2z(2n + \nu) - b(2n\nu + \nu^2),$$

d. i. gleich:

$$(2z - \nu b)(2n + \nu).$$

Macht man daher, was den gesuchten Werth der Variablen z anbelangt, folgenden Ansatz:

$$(\beta.)\qquad z = \frac{\mu\pi i + \nu b}{2},$$

so verwandelt sich jene Differenz in:

$$(\gamma.)\qquad \pi i \, . \, \mu(2n + \nu);$$

sie wird demnach ein ungerades Vielfaches von πi werden, sobald man die ganzen Zahlen μ und ν der Art wählt, dass das Product

$$\mu(2n + \nu)$$

ungerade ausfällt. Solches aber kann offenbar nur dadurch erreicht werden, dass man für μ eine ungerade Zahl, und gleichzeitig für ν ebenfalls eine ungerade Zahl nimmt. Thut man aber dies, so wird die in Rede stehende Differenz (γ.) in der That — und zwar gleichgültig, welchen Werth die darin enthaltene Zahl n auch immer besitzen mag — jederzeit ein ungerades Vielfaches von πi werden. Wir gelangen demnach zu folgendem Ergebniss: Sind μ und ν irgend welche *ungerade* ganze Zahlen, so wird die Function $\vartheta(z, b)$ für das Argument

$$z = \frac{\mu\pi i + \nu b}{2}$$

jederzeit verschwinden. Oder, was dasselbe ist: *Versteht man unter p und q zwei völlig beliebige ganze Zahlen, so wird $\vartheta(z, b)$ jederzeit Null werden, sobald man*

$$(17.)\qquad z = \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi i + \left(q + \frac{1}{2}\right)b$$

setzt.

Denken wir uns die Werthe der Variablen z oder ($x + iy$) nach der *Gauss*'schen Methode dargestellt durch die Punkte der Horizontalebene, so lassen sich die den Formeln

$$(\lambda.) \qquad z = p\pi i + qb$$

und

$$(\mu.) \qquad z = \left(p + \tfrac{1}{2}\right)\pi i + \left(q + \tfrac{1}{2}\right) b$$

entsprechenden Punkte leicht construiren.

Es sei b derjenige Punkt, durch welchen die gegebene Constante b dargestellt wird, ferner $i\pi$ derjenige, durch welchen die Constante $i\pi$ repräsentirt wird, und endlich 0 der Anfangspunkt*). Man construire nun ein Parallelogramm, dessen Ecken durch die vier Punkte

$$0, \quad b, \quad i\pi, \quad b + i\pi$$

dargestellt sind, und zerlege die ganze unendliche z-Ebene in lauter einander congruente Parallelogramme, der Art, dass eines derselben mit dem soeben construirten identisch ist. Die Punkte $(\lambda.)$ sind alsdann die *Eckpunkte*, und die Punkte $(\mu.)$ die *Mittelpunkte* dieser Parallelogramme. *Die Function* $\vartheta(z, b)$ *wird also* [nach (17.)] *verschwinden in den Mittelpunkten der Parallelogramme.*

Bezeichnen wir, wie das mit Rücksicht auf unsere späteren Untersuchungen zweckmässig erscheint, die in ϑ vorkommende Variable nicht mit z, sondern mit U, so können wir die Ergebnisse, zu welchen wir hier gelangt sind, etwa in folgender Weise zusammenfassen:

Theorem. — *Die unendliche Reihe*

$$(18.) \qquad \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{bn^2 + 2Un}$$

besitzt, falls der reelle Theil der Constanten b negativ ist, und so lange, als die Variable U nicht unendlich gross wird, jederzeit einen völlig bestimmten, endlichen Werth.

Bezeichnet man diesen Werth mit $\vartheta(U, b)$, setzt man also

$$(19.) \qquad \vartheta(U, b) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{bn^2 + 2Un},$$

so gelten jederzeit folgende Formeln:

$$(20.) \qquad \begin{aligned} &\vartheta(-U, b) = \vartheta(U, b), \\ &\vartheta(U + m\pi i + nb, b) = e^{-(n^2 b + 2nU)} \cdot \vartheta(U, b), \\ &\vartheta((m + \tfrac{1}{2})\pi i + (n + \tfrac{1}{2}) b, b) = 0, \end{aligned}$$

wo unter m und n beliebige, positive oder negative, ganze Zahlen zu verstehen sind.

---

*) Der Punkt b wird, beiläufig bemerkt, weil der reelle Theil der Constanten b *negativ* ist, jederzeit *links* von der y-Achse liegen; während der Punkt $i\pi$ *auf* der y-Achse liegt.

§ 2.

Die von beliebig vielen Argumenten abhängende Thetafunction.

Unter

$$\begin{array}{ccccc} b_{11}, & b_{12}, & b_{13}, & \ldots & b_{1p}, \\ & b_{22}, & b_{23}, & \ldots & b_{2p}, \\ & & b_{33}, & \ldots & b_{3p}, \\ & & & \ldots\ldots & \\ & & & & b_{pp} \end{array}$$

mögen gegebene *Constante*, ferner unter

$$U_1, U_2, U_3, \ldots U_p$$

beliebige *Variable*, und endlich unter

$$n_1, n_2, n_3, \ldots n_p$$

irgend welche *ganze Zahlen* verstanden werden. Wir bilden nun die Exponentialgrösse*)

$$e^{(b_{11} n_1^2 + 2 b_{12} n_1 n_2 + \ldots b_{pp} n_p^2) + 2 (U_1 n_1 + \ldots U_p n_p)},$$

und unterwerfen dieselbe in Gedanken einer *p-fachen Summation*; die *erste* Summation soll sich auf alle nur möglichen Werthe der ganzen Zahl n_1 beziehen, sich also von $n_1 = -\infty$ bis $n_1 = +\infty$ hin erstrecken, die *zweite* soll in gleicher Weise von $n_2 = -\infty$ bis $n_2 = +\infty$ u. s. w., endlich die *letzte* von $n_p = -\infty$ bis $n_p = +\infty$ hinerstreckt sein. Die hierdurch entstehende *p-fach unendliche Reihe* mag kurzweg mit

$$\sum e^{(b_{11} n_1^2 + 2 b_{12} n_1 n_2 + \ldots + b_{pp} n_p^2) + 2 (U_1 n_1 + \ldots U_p n_p)}$$

bezeichnet werden, wo also das vorgesetzte Sigma jene p auf einander folgenden Summationen andeuten soll. — Man gelangt nun, was die *Convergenz* dieser p-fach unendlichen Reihe anbelangt, zu folgendem

Satz. — *Die p-fach unendliche Reihe*

$$\sum e^{(b_{11} n_1^2 + 2 b_{12} n_1 n_2 \ldots + b_{pp} n_p^2) + 2 (U_1 n_1 + \ldots U_p n_p)} \tag{1.}$$

besitzt, falls der reelle Theil des Ausdruckes

*) Ausführlicher geschrieben würde der *Exponent* von e folgendermassen lauten:

$$\begin{array}{l} (b_{11} n_1 + b_{12} n_2 \ldots + b_{1p} n_p) n_1 + 2 U_1 n_1 \\ + (b_{21} n_1 + b_{22} n_2 \ldots + b_{2p} n_p) n_2 + 2 U_2 n_2 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (b_{p1} n_1 + b_{p2} n_2 \ldots + b_{pp} n_p) n_p + 2 U_p n_p. \end{array}$$

$$b_{11} n_1^2 + 2 b_{12} n_1 n_2 \ldots + b_{pp} n_p^2$$

für sämmtliche Werthsysteme der ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_p$ *negativ ist*), und falls keine der Variablen*

$$U_1,\ U_2,\ \ldots U_p$$

unendlich gross wird, jederzeit einen völlig bestimmten, endlichen Werth.

Dieser Werth kann als eine mit den Constanten b behaftete, und von den Variablen U abhängende Function angesehen werden, und soll demgemäss mit

$$\vartheta(U_1,\ U_2,\ \ldots U_p) \tag{2.}$$

bezeichnet werden.

Wir wollen nun — ähnlich wie früher bei der von *einem einzigen* Argumente abhängenden Thetafunction — gegenwärtig die Eigenschaften dieser von *mehreren* Argumenten abhängenden Function in Untersuchung ziehen; der grösseren Bequemlichkeit halber wollen wir uns dabei aber vorläufig auf den Fall beschränken, dass die Anzahl jener Argumente 3 ist, also auf den Fall, dass $p = 3$ ist.

Wir haben es alsdann mit folgender Function zu thun:

$$\vartheta(U_1, U_2, U_3) = \sum e^{f + 2(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)}, \tag{3.}$$

wo unter f oder $f(n_1, n_2, n_3)$ der Ausdruck

$$\begin{aligned} f = f(n_1, n_2, n_3) = b_{11} n_1^2 &+ 2 b_{12} n_1 n_2 + 2 b_{13} n_1 n_3 \\ &+ b_{22} n_2^2 \quad + 2 b_{23} n_2 n_3 \\ &\qquad\qquad + b_{33} n_3^2 \end{aligned} \tag{4.}$$

zu verstehen ist. Da sich in der Formel (3.) die Summation für

---

*) Der reelle Theil des Ausdrucks

$$b_{11} n_1^2 + 2 b_{12} n_1 n_2 + \ldots + b_{pp} n_p^2$$

ist, falls man die reellen Theile der Constanten $b_{11}, b_{12} \ldots b_{pp}$ der Reihe nach mit $\varrho_{11}, \varrho_{12}, \ldots \varrho_{pp}$ bezeichnet, folgender:

$$\varrho_{11} n_1^2 + 2 \varrho_{12} n_1 n_2 + \ldots + \varrho_{pp} n_p^2.$$

Soll nun dieses Aggregat für jedes beliebige Werthsystem der Zahlen n_1, $n_2, \ldots n_p$ *negativ* sein, so müssen die Grössen $\varrho_{11}, \varrho_{12}, \ldots \varrho_{pp}$, wie hier beiläufig bemerkt werden mag, der Art beschaffen sein, dass die Wurzeln ξ der Gleichung p^{ten} Grades

$$\begin{vmatrix} \varrho_{11} - \xi & \varrho_{12} & \cdots \varrho_{1p} \\ \varrho_{21} & \varrho_{22} - \xi & \cdots \varrho_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho_{p1} & \varrho_{p2} & \cdots \varrho_{pp} - \xi \end{vmatrix} = 0$$

sämmtlich negativ sind.

jede der ganzen Zahlen n_1, n_2, n_3 von $-\infty$ bis $+\infty$ hinerstreckt, so werden wir, ohne dadurch in jener Formel irgend welche Veränderung hervorzubringen, die Zahlen n_1, n_2, n_3 mit $-n_1$, $-n_2$, $-n_3$ vertauschen, die von den Argumenten U_1, U_2, U_3 abhängende Function ϑ also auch so darstellen können:

$$(5.)\qquad \vartheta(U_1, U_2, U_3) = \sum e^{f-2(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)},$$

wo das im Exponenten enthaltene f mit dem in der Formel (3.) vorhandenen f völlig identisch ist. Andererseits ergiebt sich, wenn wir die Function ϑ nicht für die bisher betrachteten Argumente U_1, U_2, U_3, sondern für die Argumente $-U_1$, $-U_2$, $-U_3$ haben wollen, zufolge (3.) die Formel:

$$(6.)\qquad \vartheta(-U_1, -U_2, -U_3) = \sum e^{f-2(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)}.$$

Und nunmehr erkennen wir durch Vergleichung von (5.) *und* (6.) *sofort, dass*

$$(7.)\qquad \vartheta(-U_1, -U_2, -U_3) = \vartheta(U_1, U_2, U_3)$$

ist, dass also der Werth unserer Function ungeändert bleibt, wenn man gleichzeitig sämmtliche Argumente in ihr Gegentheil umschlagen lässt. Dies würde als erste Eigenschaft unserer Function hervorzuheben sein.

Ferner ist, weil $e^{2\pi i} = 1$ ist, zu bemerken, dass die Exponentialgrösse

$$e^{f+2(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)}$$

ungeändert bleibt, sobald man die Variablen U_1, U_2, U_3 um irgend welche Vielfachen von πi vermehrt; und dass demnach Gleiches auch von der Function

$$\vartheta(U_1, U_2, U_3) = \sum e^{f+2(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)}$$

gelten muss. *Somit ergiebt sich — was als zweite Eigenschaft unserer Function anzuführen sein würde —, dass, falls* A, B, Γ *irgend welche ganze Zahlen vorstellen, jederzeit*

$$(8.)\qquad \vartheta(U_1 + \mathsf{A}\pi i, U_2 + \mathsf{B}\pi i, U_3 + \Gamma\pi i) = \vartheta(U_1, U_2, U_3)$$

sein wird. Die Function $\vartheta(U_1, U_2, U_3)$ ist also für jedes der Argumente U_1, U_2, U_3 eine *periodische*, und der *Index* für jede dieser drei Perioden gleich πi.

Da sich die Summation in der Formel

$$(9.)\qquad \vartheta(U_1, U_2, U_3) = \sum e^{f(n_1, n_2, n_3) + 2(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)},$$

was die Zahl n_1 anbelangt, von $n_1 = -\infty$ bis $n_1 = +\infty$ hinerstreckt, so wird man, ohne dadurch in dieser Formel irgend welche

Veränderung hervorzurufen, n_1 mit $n_1 + 1$, oder mit $n_1 + 2$, oder $n_1 + 3$ u. s. w. vertauschen können. Setzt man $n_1 + 1$ an Stelle von n_1, so gewinnt jene Formel dadurch folgendes Aussehen:

$$(10.)\quad \vartheta(U_1, U_2, U_3) = \sum e^{f(n_1+1, n_2, n_3) + 2U_1 + 2(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)}.$$

Das erste im Exponenten von e auftretende Glied

$$f(n_1 + 1, n_2, n_3)$$

hat, wie sich aus (4.) ergiebt, folgende Bedeutung:

$$f(n_1 + 1, n_2, n_3) = f(n_1, n_2, n_3) + 2(b_{11} n_1 + b_{12} n_2 + b_{13} n_3) + b_{11}.$$

Substituirt man diesen Werth in die Formel (10.), so ergiebt sich, falls man die von den Zahlen n_1, n_2, n_3 unabhängigen Factoren vor das Summenzeichen treten lässt:

$$(11.)\quad \vartheta(U_1, U_2, U_3) =$$
$$= e^{b_{11} + 2U_1} \sum e^{f(n_1, n_2, n_3) + 2[(U_1 + b_{11}) n_1 + (U_2 + b_{21}) n_2 + (U_3 + b_{31}) n_3]}.$$

Diese Formel repräsentirt, ebenso wie die ursprüngliche Formel (9.), denjenigen Werth, welchen die Function ϑ für die Argumente U_1, U_2, U_3 annimmt; sie ist demnach nur als eine gewisse Umgestaltung jener ursprünglichen Formel anzusehen.

Wir wollen nun andererseits denjenigen Werth aufstellen, welchen die Function ϑ für gewisse *andere* Argumente, nämlich für die Argumente $U_1 + b_{11}$, $U_2 + b_{21}$, $U_3 + b_{31}$ annimmt. Dieser Werth wird zufolge (9.) dargestellt durch die Formel:

$$(12.)\quad \vartheta(U_1 + b_{11}, U_2 + b_{21}, U_3 + b_{31}) =$$
$$= \sum e^{f(n_1, n_2, n_3) + 2[(U_1 + b_{11}) n_1 + (U_2 + b_{21}) n_2 + (U_3 + b_{31}) n_3]}.$$

Und nunmehr ergiebt sich durch Vergleichung von (11.) und (12.) augenblicklich die erste Formel des nachfolgenden Systems:

$$(13.)\quad \begin{cases} \vartheta(U_1 + b_{11}, U_2 + b_{21}, U_3 + b_{31}) = e^{(b_{11} + 2U_1)} \,.\, \vartheta(U_1, U_2, U_3), \\ \vartheta(U_1 + b_{12}, U_2 + b_{22}, U_3 + b_{32}) = e^{(b_{22} + 2U_2)} \,.\, \vartheta(U_1, U_2, U_3), \\ \vartheta(U_1 + b_{13}, U_2 + b_{23}, U_3 + b_{33}) = e^{(b_{33} + 2U_3)} \,.\, \vartheta(U_1, U_2, U_3). \end{cases}$$

Die beiden andern Formeln dieses Systems werden sich offenbar in ganz analoger Weise ableiten lassen.

Es ist übrigens nicht schwierig, eine viel allgemeinere Formel zu finden, nämlich eine Formel, welche die des soeben aufgestellten Systems als ganz specielle Fälle in sich fasst. Wir gehen zu diesem Zweck wieder von Formel (9.) aus, und setzen in dieser

$n_1 + \alpha$, $n_2 + \beta$, $n_3 + \gamma$ an Stelle von n_1, n_2, n_3, wo α, β, γ ganz beliebig gewählte, positive oder negative *ganze Zahlen* vorstellen sollen. Dadurch ergiebt sich

$$\vartheta(U_1, U_2, U_3) =$$

$$= \sum e^{f(n_1+\alpha,\, n_2+\beta,\, n_3+\gamma) + 2[U_1(n_1+\alpha) + U_2(n_2+\beta) + U_3(n_3+\gamma)]}. \tag{14.}$$

Zur Abkürzung mag nun gesetzt werden:

$$\begin{cases} f(n_1, n_2, n_3) = f, \\ f(\alpha, \beta, \gamma) = \varphi, \end{cases} \tag{15.}$$

und ferner

$$\begin{cases} b_{11}\alpha + b_{12}\beta + b_{13}\gamma = \varphi_1, \\ b_{21}\alpha + b_{22}\beta + b_{23}\gamma = \varphi_2, \\ b_{31}\alpha + b_{32}\beta + b_{33}\gamma = \varphi_3. \end{cases} \tag{16.}$$

Multiplicirt man diese drei letzten Gleichungen der Reihe nach mit α, β, γ, so ergiebt sich, wie sogleich bemerkt werden mag:

$$b_{11}\alpha^2 + 2b_{12}\alpha\beta + \ldots + b_{33}\gamma^2 = \varphi_1\alpha + \varphi_2\beta + \varphi_3\gamma,$$

d. i. mit Rücksicht auf die in (15.) eingeführte Bezeichnung:

$$\varphi = \varphi_1\alpha + \varphi_2\beta + \varphi_3\gamma. \tag{17.}$$

Nunmehr lässt sich der in unserer Formel (14.) enthaltene Exponent von e auch so darstellen:

$$f + \varphi + 2(\varphi_1 n_1 + \varphi_2 n_2 + \varphi_3 n_3) +$$

$$+ 2(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3) + 2(U_1\alpha + U_2\beta + U_3\gamma).$$

Substituirt man diesen Werth in (14.), und lässt man zugleich die von den Zahlen n_1, n_2, n_3 unabhängigen Factoren *vor* das Summenzeichen treten, so erhält man:

$$\vartheta(U_1, U_2, U_3) =$$

$$= e^{\varphi + 2(U_1\alpha + U_2\beta + U_3\gamma)} \sum e^{f + 2[(U_1+\varphi_1)n_1 + (U_2+\varphi_2)n_2 + (U_3+\varphi_3)n_3]}. \tag{18.}$$

Nun ist nach (9.) und mit Rücksicht auf die in (15.) eingeführte Abkürzung

$$\vartheta(U_1, U_2, U_3) = \sum e^{f + 2(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)}.$$

Wollen wir daher den Werth unserer Function ϑ nicht für die bisher betrachteten Argumente U_1, U_2, U_3, sondern für die Argumente $U_1 + \varphi_1$, $U_2 + \varphi_2$, $U_3 + \varphi_3$ haben, so erhalten wir folgende Formel:

$$\vartheta(U_1 + \varphi_1, U_2 + \varphi_2, U_3 + \varphi_3) =$$

$$= \sum e^{f + 2[(U_1+\varphi_1)n_1 + (U_2+\varphi_2)n_2 + (U_3+\varphi_3)n_3]}. \tag{19.}$$

Und nunmehr ergiebt sich durch Division von (18.) und (19.):

$$(20.)\qquad \frac{\vartheta(U_1+\varphi_1,\, U_2+\varphi_2,\, U_3+\varphi_3)}{\vartheta(U_1,\, U_2,\, U_3)} = e^{-\varphi - 2(U_1\alpha + U_2\beta + U_3\gamma)},$$

eine Formel, in welcher U_1, U_2, U_3 völlig beliebige Argumente vorstellen, in welcher ferner α, β, γ irgend welche ganze Zahlen sind, und in welcher endlich φ_1, φ_2, φ_3, φ die aus diesen Zahlen und aus den gegebenen Constanten b zusammengesetzten Ausdrücke (16.) und (17.) *darstellen.*

Man erkennt sofort, dass diese Formel die früher in (13.) aufgestellten Gleichungen als ganz specielle Fälle in sich enthält, dass nämlich jene drei Gleichungen aus dieser Formel (20.) sich ergeben, sobald man in derselben für die Zahlen α, β, γ der Reihe nach zuerst das Werthsystem 1, 0, 0, dann das Werthsystem 0, 1, 0, endlich das Werthsystem 0, 0, 1 nimmt.

Es handelt sich nun darum, dieser allgemeinen Formel (20.) ein etwas einfacheres Aussehen zu geben, als es bisher der Fall ist. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir die neuen Argumente $U_1+\varphi_1$, $U_2+\varphi_2$, $U_3+\varphi_3$ mit W_1, W_2, W_3, setzen also [vgl. (16.)]:

$$(21.)\qquad \begin{cases} W_1 = U_1 + \varphi_1 = U_1 + b_{11}\alpha + b_{12}\beta + b_{13}\gamma, \\ W_2 = U_2 + \varphi_2 = U_2 + b_{21}\alpha + b_{22}\beta + b_{23}\gamma, \\ W_3 = U_3 + \varphi_3 = U_3 + b_{31}\alpha + b_{32}\beta + b_{33}\gamma. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit α, β, γ, und addirt, so ergiebt sich:

$$W_1\alpha + W_2\beta + W_3\gamma = (U_1\alpha + U_2\beta + U_3\gamma) + (\varphi_1\alpha + \varphi_2\beta + \varphi_3\gamma),$$

also mit Rücksicht auf (17.):

$$W_1\alpha + W_2\beta + W_3\gamma = (U_1\alpha + U_2\beta + U_3\gamma) + \varphi,$$

d. i.

$$(22.)\qquad -\varphi = (U_1\alpha + U_2\beta + U_3\gamma) - (W_1\alpha + W_2\beta + W_3\gamma).$$

Mit Rücksicht auf die in (21.) eingeführten Bezeichnungen und mit Rücksicht auf den soeben in (22.) für $-\varphi$ gefundenen Werth verwandelt sich nunmehr unsere allgemeine Formel (20.) in folgende:

$$(23.)\qquad \frac{\vartheta(W_1,\, W_2,\, W_3)}{\vartheta(U_1,\, U_2,\, U_3)} = e^{-[(W_1+U_1)\alpha + (W_2+U_2)\beta + (W_3+U_3)\gamma]}.$$

Sind also — so können wir uns gegenwärtig ausdrücken — die Argumente W_1, W_2, W_3 mit den Argumenten U_1, U_2, U_3 durch Gleichungen von folgender Form verbunden

$$(24.)\quad \begin{cases} W_1 = U_1 + b_{11}\alpha + b_{12}\beta + b_{13}\gamma, \\ W_2 = U_2 + b_{21}\alpha + b_{22}\beta + b_{23}\gamma, \\ W_3 = U_3 + b_{31}\alpha + b_{32}\beta + b_{33}\gamma, \end{cases}$$

wo α, β, γ beliebige positive oder negative ganze Zahlen vorstellen, so wird zwischen $\vartheta(W_1, W_2, W_3)$ und zwischen $\vartheta(U_1, U_2, U_3)$ jederzeit die in (23.) angegebene Relation stattfinden. Wir bezeichnen die in diesem Satze enthaltene Eigenthümlichkeit der Function ϑ als die ***dritte Eigenschaft*** *dieser Function.*

Eine ähnliche Relation lässt sich übrigens auch dann leicht aufstellen, wenn wir an Stelle der Argumente W_1, W_2, W_3 gewisse *andere* Argumente V_1, V_2, V_3 nehmen, welche mit den ursprünglichen Argumenten U_1, U_2, U_3 nicht durch die Gleichungen (24.), sondern durch die Gleichungen:

$$(25.)\quad \begin{cases} V_1 = U_1 + \mathsf{A}\,.\,\pi i + b_{11}\alpha + b_{12}\beta + b_{13}\gamma, \\ V_2 = U_2 + \mathsf{B}\,.\,\pi i + b_{21}\alpha + b_{22}\beta + b_{23}\gamma, \\ V_3 = U_3 + \Gamma\,.\,\pi i + b_{31}\alpha + b_{32}\beta + b_{33}\gamma \end{cases}$$

verbunden sind, wo A, B, Γ, ebenso wie α, β, γ beliebige positive oder negative ganze Zahlen vorstellen sollen. In diesem Falle werden $V_1 - \mathsf{A}\pi i$, $V_2 - \mathsf{B}\pi i$, $V_3 - \Gamma\pi i$ zu U_1, U_2, U_3 in genau derselben Beziehung stehen, in welcher zuvor W_1, W_2, W_3 zu U_1, U_2, U_3 standen. Demnach wird zufolge (23.):

$$(26.)\quad \frac{\vartheta(V_1 - \mathsf{A}\pi i, \ldots)}{\vartheta(U_1, \ldots)} = e^{-[(V_1 + U_1 - \mathsf{A}\pi i)\alpha + \ldots]}$$

sein. Zufolge (8.) ist aber, weil A, B, Γ ganze Zahlen sind,

$$\vartheta(V_1 - \mathsf{A}\pi i,\ V_2 - \mathsf{B}\pi i,\ V_3 - \Gamma\pi i) = \vartheta(V_1, V_2, V_3);$$

ferner sind, weil α, β, γ ebenfalls ganze Zahlen vorstellen, die Exponentialgrössen

$$e^{\mathsf{A}\alpha\pi i}, \quad e^{\mathsf{B}\beta\pi i}, \quad e^{\Gamma\gamma\pi i}$$

jederzeit $= \pm 1$, folglich:

$$e^{\mathsf{A}\alpha\pi i} = e^{-\mathsf{A}\alpha\pi i}, \quad e^{\mathsf{B}\beta\pi i} = e^{-\mathsf{B}\beta\pi i}, \quad e^{\Gamma\gamma\pi i} = e^{-\Gamma\gamma\pi i}.$$

Demnach können wir die Formel (26.) auch so schreiben:

$$(27.)\quad \frac{\vartheta(V_1, V_2, V_3)}{\vartheta(U_1, U_2, U_3)} = e^{-[(V_1 + U_1 + \mathsf{A}\pi i)\alpha + (V_2 + U_2 + \mathsf{B}\pi i)\beta + (V_3 + U_3 + \Gamma\pi)i\gamma]}.$$

Somit ergiebt sich also folgender Satz:

Sind die Argumente V_1, V_2, V_3 mit den Argumenten U_1, U_2, U_3 durch Gleichungen von folgender Form verbunden:

$$V_1 = U_1 + (\mathrm{A}\pi i + \alpha b_{11} + \beta b_{21} + \gamma b_{31}),$$
$$V_2 = U_2 + (\mathrm{B}\pi i + \alpha b_{12} + \beta b_{22} + \gamma b_{32}),$$
$$V_3 = U_3 + (\Gamma \pi i + \alpha b_{13} + \beta b_{23} + \gamma b_{33}),$$

wo $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \alpha, \beta, \gamma$ *beliebige ganze Zahlen vorstellen, so wird zwischen den Werthen von* $\vartheta(V_1, V_2, V_3)$ *und* $\vartheta(U_1, U_2, U_3)$ *jederzeit die in* (27.) *angegebene Relation stattfinden.*

Offenbar können wir sämmtliche Ergebnisse, zu welchen wir hier gelangt sind, sofort auf den Fall übertragen, dass die betrachtete ϑ-Function nicht von *drei*, sondern von *beliebig vielen* Argumenten abhängig ist. Wir kommen alsdann zu folgendem

Theorem. — *Die durch die Formel*

$$\vartheta(U_1, U_2, \ldots U_p) = \sum e^{(b_{11}n_1^2 + 2b_{12}n_1n_2 \ldots + b_{pp}n_p^2) + 2(U_1n_1 + \ldots + U_pn_p)}$$

definirte Function $\vartheta(U_1, U_2, \ldots U_p)$ *bleibt in ihrem Werthe ungeändert, sobald man sämmtliche Argumente* $U_1, U_2, \ldots U_p$ *in ihr Gegentheil umschlagen lässt; es ist nämlich jederzeit*

$$\vartheta(-U_1, -U_2, \ldots -U_p) = \vartheta(U_1, U_2, \ldots U_p). \tag{A.}$$

Betrachtet man ferner zwei Systeme von Argumenten $U_1, U_2, \ldots U_p$, *und* $V_1, V_2, \ldots V_p$, *welche mit einander verbunden sind durch Gleichungen von folgender Form:*

$$\text{(B.)}\quad \begin{aligned} V_1 &= U_1 + (m_1\pi i + n_1b_{11} + n_2b_{21} + \ldots + n_pb_{p1}),\\ V_2 &= U_2 + (m_2\pi i + n_1b_{12} + n_2b_{22} + \ldots + n_pb_{p2}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ V_p &= U_p + (m_p\pi i + n_1b_{1p} + n_2b_{2p} + \ldots + n_pb_{pp}), \end{aligned}$$

wo die m, n *beliebige positive oder negative ganze Zahlen vorstellen: so wird zwischen den Werthen, welche die Function* ϑ *für das eine und für das andere System annimmt, jederzeit folgende Relation stattfinden:*

$$\frac{\vartheta(V_1, V_2, \ldots V_p)}{\vartheta(U_1, U_2, \ldots U_p)} = e^{-\Sigma n_\varkappa(V_\varkappa + U_\varkappa + m_\varkappa \pi i)}. \tag{C.}$$

Dabei ist die Summation im Exponenten hinerstreckt zu denken über $\varkappa = 1, 2, \ldots p$.

Wir wollen der Vollständigkeit willen schliesslich noch diejenigen Werthe der Argumente $U_1, U_2, \ldots U_p$ zu ermitteln suchen, für welche die Function ϑ *Null* wird. Zufolge der Definition ist

$$\vartheta(U_1, U_2, \ldots U_p) = \sum e^{F(n_1, n_2, \ldots n_p)}, \tag{1.}$$

wo $F(n_1, n_2, \ldots n_p)$ zur Abkürzung steht für folgenden Ausdruck:

$$F(n_1, n_2, \ldots n_p) = \Sigma\Sigma b_{\varkappa\lambda} n_\varkappa n_\lambda + 2\Sigma U_\varkappa n_\varkappa, \tag{2.}$$

in welchem die Summationen über $\varkappa = 1, 2, \ldots p$ und über $\lambda = 1, 2, \ldots p$ hinerstreckt zu denken sind.

Die in (1.) angegebene Formel erleidet, wie bereits mehrfach bemerkt, keinerlei Aenderung, falls man die darin enthaltenen Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_p$ mit $-(n_1 + \nu_1), -(n_2 + \nu_2), \ldots -(n_p + \nu_p)$ vertauscht, vorausgesetzt, dass man unter $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_p$ irgend welche beliebig gewählte ganze Zahlen versteht. Demnach können wir an Stelle von (1.) auch schreiben:

$$(3.)\qquad \vartheta(U_1, U_2, \ldots U_p) = \sum e^{F(-n_1-\nu_1,\, -n_2-\nu_2,\, \ldots -n_p-\nu_p)},$$

oder, wie sich durch Addition von (1.) und (3.) ergiebt, auch schreiben

$$(4.)\qquad \vartheta(U_1, U_2, \ldots U_p) = \\ = \tfrac{1}{2} \sum \left(e^{F(n_1, n_2, \ldots n_p)} + e^{F(-n_1-\nu_1,\, -n_2-\nu_2,\, \ldots -n_p-\nu_p)}\right).$$

Ein Aggregat von der Form $e^A + e^B$ verschwindet, sobald die Exponenten A und B um ein ungerades Vielfaches von πi verschieden sind. *Demnach wird die Function $\vartheta(U_1, U_2, \ldots U_p)$ verschwinden, sobald die Differenz*

$$(5.)\qquad \Delta = F(-n_1-\nu_1,\, -n_2-\nu_2,\, \ldots -n_p-\nu_p) - F(n_1, n_2, \ldots n_p)$$

für sämmtliche Werthsysteme der Zahlen n immer gleich einem ungeraden Vielfachen von πi ist. Nun ist mit Rücksicht auf (2.)

$$F(n_1, \ldots) = \Sigma\Sigma b_{\varkappa\lambda} n_\varkappa n_\lambda + 2\Sigma U_\varkappa n_\varkappa$$

$$F(-n_1-\nu_1, \ldots) = \Sigma\Sigma b_{\varkappa\lambda} n_\varkappa n_\lambda + 2\Sigma(n_\varkappa \Sigma b_{\varkappa\lambda}\nu_\lambda) + \Sigma\Sigma b_{\varkappa\lambda}\nu_\varkappa\nu_\lambda \\ - 2\Sigma U_\varkappa n_\varkappa - 2\Sigma U_\varkappa \nu_\varkappa;$$

somit ergiebt sich für jene Differenz Δ folgender Werth:

$$(6.)\qquad \Delta = 2\Sigma n_\varkappa(-2U_\varkappa + \Sigma b_{\varkappa\lambda}\nu_\lambda) + \Sigma\Sigma b_{\varkappa\lambda}\nu_\varkappa\nu_\lambda - 2\Sigma U_\varkappa \nu_\varkappa.$$

Wir machen nun, was die hier gesuchten Werthe der Argumente U anbelangt, folgenden Ansatz:

$$(7.)\qquad 2U_\varkappa = \mu_\varkappa . \pi i + \Sigma \nu_\lambda b_{\varkappa\lambda},$$

d. i.

$$(7a.)\qquad 2U_\varkappa = \mu_\varkappa . \pi i + \nu_1 b_{1\varkappa} + \nu_2 b_{2\varkappa} + \ldots + \nu_p b_{p\varkappa},$$

wo $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_p$ beliebige ganze Zahlen vorstellen sollen. Alsdann verwandelt sich der für Δ gefundene Werth in:

$$(8.)\qquad \Delta = -2\Sigma n_\varkappa . \mu_\varkappa \pi i + \Sigma\Sigma b_{\varkappa\lambda}\nu_\varkappa\nu_\lambda - \Sigma(\mu_\varkappa \pi i + \Sigma\nu_\lambda b_{\varkappa\lambda})\nu_\varkappa,$$

d. i. in

$$(9.)\qquad \Delta = -2\pi i\, \Sigma n_\varkappa \mu_\varkappa - \pi i\, \Sigma \mu_\varkappa \nu_\varkappa,$$

oder in:

$$(10.)\qquad \Delta = -\pi i\,(2\Sigma n_\varkappa \mu_\varkappa + \Sigma \mu_\varkappa \nu_\varkappa).$$

Hieraus aber ergiebt sich, dass die Differenz Δ — mögen nun die Zahlen n beschaffen sein, wie sie wollen — jederzeit ein *ungerades* Vielfaches von πi sein wird, sobald nur

$$\Sigma \mu_\varkappa \nu_\varkappa$$

eine *ungerade Zahl* ist. Unsere Function $\vartheta(U_1, U_2, \ldots U_p)$ wird daher, falls man für die Argumente U die in (7.) angegebenen Werthe nimmt, jederzeit verschwinden, sobald die in jenen Werthen enthaltenen Zahlen μ, ν der Bedingung

$$\Sigma \mu_\varkappa \nu_\varkappa = \textit{ungerade}$$

Genüge leisten. Wir gelangen demnach zu folgendem

Theorem. — *Versteht man unter $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_p$ und $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_p$ irgend welche positive oder negative ganze Zahlen, welche der Bedingung*

$$\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + \ldots + \mu_p\nu_p = \textit{ungerade} \tag{D.}$$

Genüge leisten, so wird durch die Formeln

$$\begin{aligned} U_1 &= \tfrac{1}{2}(\mu_1 \cdot \pi i + \nu_1 b_{11} + \nu_2 b_{21} + \ldots + \nu_p b_{p1}), \\ U_2 &= \tfrac{1}{2}(\mu_2 \cdot \pi i + \nu_1 b_{12} + \nu_2 b_{22} + \ldots + \nu_p b_{p2}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_p &= \tfrac{1}{2}(\mu_p \cdot \pi i + \nu_1 b_{1p} + \nu_2 b_{2p} + \ldots + \nu_p b_{pp}), \end{aligned} \tag{E.}$$

jederzeit ein Werthsystem der Argumente $U_1, U_2, \ldots U_p$ dargestellt sein, für welches die Function $\vartheta(U_1, U_2, \ldots U_p)$ verschwindet.

Dreizehntes Capitel.

Anwendung der Thetafunctionen auf die Theorie der Abel'schen Integrale.

§ 1.

Ueber eine von den Normal-Integralen erster Gattung abhängende Thetafunction.

Nimmt man für die im vorhergehenden Capitel eingeführten Constanten $b_{11}, b_{12}, \ldots b_{pp}$ diejenigen *constanten Differenzen* $b_{\sigma\varkappa}$, mit denen die Normal-Integrale erster Gattung $w_\sigma(z)$ in den Curven $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ behaftet sind, so ist der reelle Theil des Ausdrucks

$$b_{11}n_1^2 + 2b_{12}n_1n_2 \ldots + b_{pp}n_p^2 \tag{1.}$$

stets *negativ* [Satz (II.) pg. 247]. Demgemäss wird die mit diesen Constanten $b_{\sigma\varkappa}$ behaftete Thetareihe:

$$\vartheta(U_1, U_2, \ldots U_p) = \\ = \sum e^{(b_{11}n_1^2 + 2b_{12}n_1n_2 \ldots + b_{pp}n_p^2) + 2(U_1n_1 + U_2n_2 \ldots + U_pn_p)} \tag{2.}$$

convergent sein, so lange die Argumente $U_1, U_2, \ldots U_p$ endlich bleiben [Satz pg. 312].

Wir stellen uns nun die Aufgabe, folgende von z abhängende Function

$$F(z) = \vartheta\,(w_1(z) - G_1,\ w_2(z) - G_2, \ldots w_p(z) - G_p) \tag{3.}$$

einer nähern Untersuchung zu unterwerfen. Dabei soll die rechte Seite in (3.) denjenigen Ausdruck repräsentiren, in welchen $\vartheta(U_1, U_2, \ldots U_p)$ sich verwandelt, sobald man daselbst $U_1, U_2, \ldots U_p$ respective mit $w_1(z) - G_1, w_2(z) - G_2, \ldots w_p(z) - G_p$ vertauscht; und zwar sollen $G_1, G_2, \ldots G_p$ ***beliebig gegebene Constanten*** sein.

Lässt man den Punkt z *innerhalb* der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ [also ohne die Curven $a_\varkappa, b_\varkappa$ zu überschreiten] in beliebiger Weise sich fortbewegen, so werden hierbei die Functionen $w_1(z), w_2(z), \ldots w_p(z)$ in *stetiger* Weise sich ändern, mithin z. B. auch fortdauernd *endlich*

bleiben. In jedem Augenblick der in Rede stehenden Bewegung besitzt daher die in (3.) angegebene Thetareihe einen convergenten, d. i. einen bestimmten *endlichen* Werth. Und dieser Werth wird sich, während jener Bewegung, Schritt für Schritt in *stetiger* Weise ändern. *Die mit den Constanten* $G_1, G_2, \ldots G_p$ *behaftete Function*

$$F(z) = \vartheta\,(\mathrm{w}_1(z) - G_1,\ \mathrm{w}_2(z) - G_2,\ \ldots \mathrm{w}_p(z) - G_p) \tag{4.}$$

ist also innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ *allenthalben eindeutig und stetig.*

Um die Werthe dieser Function am *Rande* von $\mathfrak{R}_{ab}$ zu untersuchen, betrachten wir zuvörderst *irgend eine* der Curven $a_1, a_2, \ldots a_p$, etwa die Curve $a_\varkappa$. Es mögen

$$\begin{aligned} &F(\lambda) = \vartheta\,(\mathrm{w}_1(\lambda) - G_1,\ \mathrm{w}_2(\lambda) - G_2,\ \ldots \mathrm{w}_p(\lambda) - G_p), \\ \text{und}\quad &F(\varrho) = \vartheta\,(\mathrm{w}_1(\varrho) - G_1,\ \mathrm{w}_2(\varrho) - G_2,\ \ldots \mathrm{w}_p(\varrho) - G_p) \end{aligned} \tag{5.}$$

diejenigen Werthe vorstellen, welche $F(z)$ in zwei auf dem linken und rechten Ufer von $a_\varkappa$ einander gegenüberliegenden Punkten λ und ϱ besitzt. Alsdann ist bekanntlich [vgl. (19.) pg. 246]:

$$\text{längs } a_\varkappa: \begin{cases} [\mathrm{w}_1(\lambda) - G_1] = [\mathrm{w}_1(\varrho) - G_1] + m_1\pi i, \\ [\mathrm{w}_2(\lambda) - G_2] = [\mathrm{w}_2(\varrho) - G_2] + m_2\pi i, \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [\mathrm{w}_p(\lambda) - G_p] = [\mathrm{w}_p(\varrho) - G_p] + m_p\pi i, \end{cases}$$

wo $m_1, m_2, \ldots m_p$ ganze Zahlen vorstellen, die bis auf $m_\varkappa$, sämmtlich $= 0$ sind, während $m_\varkappa = 1$ ist. Zufolge des Theorems pg. 319 ist daher der Quotient der beiden Ausdrücke (5.) gleich Eins. Also

$$\text{längs } a_\varkappa: \frac{F(\lambda)}{F(\varrho)} = 1. \tag{6.}$$

Bezeichnet man ferner *irgend eine* der Curven $b_1, b_2, \ldots b_p$ mit $b_\varkappa$, und denkt man sich die beiden Ausdrücke (5.) auf diese Curve $b_\varkappa$ bezogen, so ist [vgl. (19.) pg. 246]:

$$\text{längs } b_\varkappa: \begin{cases} [\mathrm{w}_1(\lambda) - G_1] = [\mathrm{w}_1(\varrho) - G_1] + b_{1\varkappa}, \\ [\mathrm{w}_2(\lambda) - G_2] = [\mathrm{w}_2(\varrho) - G_2] + b_{2\varkappa}, \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [\mathrm{w}_p(\lambda) - G_p] = [\mathrm{w}_p(\varrho) - G_p] + b_{p\varkappa}. \end{cases}$$

Zufolge des Theorems pg. 319 hat daher der Quotient der beiden Ausdrücke (5.) den Werth:

$$\text{längs } b_\varkappa: \frac{F(\lambda)}{F(\varrho)} = e^{-([\mathrm{w}_\varkappa(\lambda) - G_\varkappa] + [\mathrm{w}_\varkappa(\varrho) - G_\varkappa])}. \tag{7.}$$

Demgemäss kann der Satz (4.) folgendermassen vervollständigt werden:

Satz. — *Die mit den willkürlichen Constanten $G_1, G_2, \ldots G_p$ behaftete Function*

$$F(z) = \vartheta(\mathrm{w}_1(z) - G_1,\ \mathrm{w}_2(z) - G_2, \ldots \mathrm{w}_p(z) - G_p) \tag{8.}$$

ist auf der Fläche $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, eindeutig und stetig, in jenen Curven aber mit folgenden Quotienten behaftet:

$$\begin{aligned} &\textit{längs } a_\varkappa\text{:}\ \frac{F(\lambda)}{F(\varrho)} = 1, \\ &\textit{längs } b_\varkappa\text{:}\ \frac{F(\lambda)}{F(\varrho)} = e^{2G_\varkappa - \mathrm{w}_\varkappa(\lambda) - \mathrm{w}_\varkappa(\varrho)}. \end{aligned} \tag{9.}$$

Dieser letzte Quotient ist, wie man sieht, längs $b_\varkappa$ inconstant.

(10.) Zusatz. — *Demgemäss kann also $F(z)$ bezeichnet werden als eine auf $\mathfrak{R}_{ab}$ reguläre Function, welche daselbst keine Pole — wohl aber Nullpunkte hat. Denkt man sich die letztern in lauter elementare Nullpunkte aufgelöst, so wird die Anzahl dieser elementaren Nullpunkte* [wie sogleich bewiesen werden soll] *stets $= p$ sein.*

Beweis des Zusatzes. — Nach (α.) pg. 248 ist

$$\begin{aligned} &\int_{a_\varkappa} d\,\mathrm{w}_\sigma(\lambda) = \int_{a_\varkappa} d\,\mathrm{w}_\sigma(\varrho) = b_{\sigma\varkappa}, \\ &\int_{b_\varkappa} d\,\mathrm{w}_\sigma(\lambda) = \int_{b_\varkappa} d\,\mathrm{w}_\sigma(\varrho) = -\,a_{\sigma\varkappa}, \end{aligned} \tag{A.}$$

also insbesondere für $\sigma = \varkappa$:

$$\int_{b_\varkappa} d\,\mathrm{w}_\varkappa(\lambda) = \int_{b_\varkappa} d\,\mathrm{w}_\varkappa(\varrho) = -\,a_{\varkappa\varkappa}, \quad \text{d. i.} = -\,\pi i. \tag{B.}$$

Dies vorausgeschickt, bezeichnen wir jetzt die ihrer Anzahl und Lage nach noch völlig unbekannten Nullpunkte der Function $F(z)$ mit $c_1, c_2, \ldots c_\delta$, und die zugehörigen Ordnungszahlen der Function selber mit $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\delta$. Dann ist nach bekanntem Satz [pg. 105]:

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_\delta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}_{ab}} d \log F(z),$$

oder, weil bei einer positiven Umlaufung von $\mathfrak{R}_{ab}$ *sämmtliche* Uferlinien der Ströme $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, und zwar die *linken* Ufer strom*abwärts*, die *rechten* strom*aufwärts* zu durchwandern sind:

$$\mu_1 + \mu_2 \ldots + \mu_\delta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \left\{ \int_{a_\varkappa} d \log \frac{F(\lambda)}{F(\varrho)} + \int_{b_\varkappa} d \log \frac{F(\lambda)}{F(\varrho)} \right\},$$

oder, mit Rücksicht auf (9.):

$$\mu_1 + \mu_2 \ldots + \mu_\delta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \left\{ 0 - \int_{b_\varkappa} d\,[\mathrm{w}_\varkappa(\lambda) + \mathrm{w}_\varkappa(\varrho)] \right\},$$

also nach (B.):

$$\mu_1 + \mu_2 \ldots + \mu_\delta = \frac{1}{2\pi i}(2a_{11} + 2a_{22} + \ldots + 2a_{pp}),$$

also, weil $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{pp} = \pi i$ ist:

$$\mu_1 + \mu_2 \ldots + \mu_\delta = p. \tag{11.}$$ *Q. e. d.*

§ 2.

Fortsetzung. Die Nullpunkte der betrachteten Thetafunction.

Es soll jetzt namentlich die *Lage* dieser unbekannten Nullpunkte $c_1, c_2, \ldots c_\delta$ näher zu bestimmen versucht werden. Bezeichnet man die Bereiche von $c_1, c_2, \ldots c_\delta$ respective mit $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots \mathfrak{U}_\delta$, und das nach Absonderung dieser Bereiche noch übrig bleibende Stück der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ mit $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{R}_{ab} - (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 \ldots + \mathfrak{U}_\delta),$$

so sind nicht nur $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots \mathrm{w}_p$ und F, sondern auch $\frac{1}{F}$ *auf* $\mathfrak{S}$ *eindeutig und stetig*. Somit folgt [Satz (4.) pg. 196]:

$$\int_{\mathfrak{S}} \frac{\mathrm{w}_\sigma\, dF}{F} = 0, \tag{12.}$$

oder, was dasselbe ist:

$$\int_{\mathfrak{S}} \mathrm{w}_\sigma\, d\log F = 0,$$

oder, weil der Rand von $\mathfrak{S}$ theils aus dem Rande von $\mathfrak{R}_{ab}$, theils aus den Rändern von $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots \mathfrak{U}_\delta$ besteht:

$$\int_{\mathfrak{R}_{ab}} \mathrm{w}_\sigma\, d\log F - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\delta} \int_{\mathfrak{U}_\varkappa} \mathrm{w}_\sigma\, d\log F = 0, \quad \text{wo} \quad \sigma = 1, 2, \ldots p. \tag{13.}$$

In genau derselben Weise wie bei früherer Gelegenheit [vgl. (α.), (β.) pg. 286] findet man aber:

$$\int_{\mathfrak{U}_\varkappa} \mathrm{w}_\sigma\, d\log F = 2\pi i \,.\, \mu_\varkappa \mathrm{w}_\sigma(c_\varkappa);$$

so dass also die Formel (13.) folgende Gestalt erhält:

$$\mu_1 \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mu_2 \mathrm{w}_\sigma(c_2) \ldots + \mu_\delta \mathrm{w}_\sigma(c_\delta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}_{ab}} \mathrm{w}_\sigma\, d\log F, \tag{14.}$$

$$\text{wo } \sigma = 1, 2, 3, \ldots p.$$

Ueberdies ist zufolge (11.):

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\delta = p; \tag{14a.}$$

so dass also durch die Nullpunkte $c_1, c_2, \ldots c_\delta$ im Ganzen p *elementare* Nullpunkte dargestellt sind. Bezeichnet man aber diese p

elementaren Nullpunkte (ihrer Lage nach) mit $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$, so gewinnt die Formel (14.) folgende Gestalt:

$$(15.) \qquad \mathrm{w}_\sigma(\eta_1) + \mathrm{w}_\sigma(\eta_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\eta_p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}_{ab}} (\mathrm{w}_\sigma \, d \log F) = J_\sigma,$$

$$\sigma = 1, 2, 3, \ldots p,$$

wo J_σ als Abbreviatur dienen soll für das rechts stehende Integral.

Um den Werth dieses Integrales J_σ zu entwickeln, mögen einige Hülfsformeln vorangeschickt werden. Bekanntlich ist [vgl. (9.)]:

$$(\alpha.) \qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\varkappa: \quad \mathrm{w}_\sigma(\lambda) - \mathrm{w}_\sigma(\varrho) = a_{\sigma\varkappa}, \quad \frac{F(\lambda)}{F(\varrho)} = 1, \\ &\text{längs } b_\varkappa: \quad \mathrm{w}_\sigma(\lambda) - \mathrm{w}_\sigma(\varrho) = b_{\sigma\varkappa}, \quad \frac{F(\lambda)}{F(\varrho)} = e^{2G_\varkappa - \mathrm{w}_\varkappa(\lambda) - \mathrm{w}_\varkappa(\varrho)}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$(\beta.) \qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\varkappa: \quad d \log F(\varrho) = d \log F(\lambda), \\ &\text{längs } b_\varkappa: \quad d \log F(\varrho) = d \log F(\lambda) + 2 d\mathrm{w}_\varkappa, \end{aligned}$$

wo $d\mathrm{w}_\varkappa$ für $d\mathrm{w}_\varkappa(\lambda)$, oder, was dasselbe ist, für $d\mathrm{w}_\varkappa(\varrho)$ steht*). Bezeichnet man ferner die vier Eckpunkte an der Knotenstelle $(a_\varkappa, b_\varkappa)$ mit $\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa, \gamma_\varkappa, \delta_\varkappa$, so ergiebt sich sofort:

$$\int_{a_\varkappa} d \log F(\lambda) = \log \frac{F(\beta_\varkappa)}{F(\alpha_\varkappa)},$$

$$\int_{b_\varkappa} d \log F(\lambda) = \log \frac{F(\gamma_\varkappa)}{F(\beta_\varkappa)}.$$

Die Werthe der Logarithmen rechter Hand sind näher angebbar mittelst der Formeln $(\alpha.)$. Man erhält in solcher Weise:

$$(\gamma.) \qquad \begin{aligned} &\int_{a_\varkappa} d \log F(\lambda) = M_\varkappa 2\pi i + 2G_\varkappa - \mathrm{w}_\varkappa(\beta_\varkappa) - \mathrm{w}_\varkappa(\alpha_\varkappa), \\ &\int_{b_\varkappa} d \log F(\lambda) = N_\varkappa 2\pi i, \end{aligned}$$

wo $M_\varkappa$, $N_\varkappa$ unbekannte ganze Zahlen vorstellen. Endlich ist nach (B.) pg. 324:

$$(\delta.) \qquad \int_{b_\varkappa} d\mathrm{w}_\varkappa = - a_{\varkappa\varkappa} = - \pi i.$$

*) Es unterscheiden sich nämlich die Werte $\mathrm{w}_\varkappa(\lambda)$ und $\mathrm{w}_\varkappa(\varrho)$, welche $\mathrm{w}_\varkappa(z)$ zu beiden Ufern des Stromes $b_\varkappa$ besitzt, von einander nur durch eine Constante; so dass also $d\mathrm{w}_\varkappa(\lambda) = d\mathrm{w}_\varkappa(\varrho)$ ist; vgl. z. B. (I.) pg. 234.

Dies vorangeschickt, handelt es sich jetzt um die Berechnung des in (15.) auftretenden Integrals:

$$J_\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re_{ab}} w_\sigma \, d\log F.$$

Da bei einer positiven Umlaufung von $\Re_{ab}$ sämmtliche Uferlinien der Ströme $a_\varkappa$, b und zwar die *linken* strom*abwärts*, die *rechten* strom*aufwärts* zu durchwandern sind, so kann dieses Integral so geschrieben werden:

$$J_\sigma = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}\left\{\begin{array}{l} \int_{a_\varkappa}(w_\sigma(\lambda)\,d\log F(\lambda) - w_\sigma(\varrho)\,d\log F(\varrho)) \\ + \int_{b_\varkappa}(w_\sigma(\lambda)\,d\log F(\lambda) - w_\sigma(\varrho)\,d\log F(\varrho)) \end{array}\right\}.$$

Hieraus folgt, falls man $F(\varrho)$ mittelst der Formeln (β.) eliminirt:

$$J_\sigma = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}\left\{\begin{array}{l} \int_{a_\varkappa}[w_\sigma(\lambda) - w_\sigma(\varrho)]\,d\log F(\lambda) \\ + \int_{b_\varkappa}([w_\sigma(\lambda) - w_\sigma(\varrho)]\,d\log F(\lambda) - [2\,w_\sigma(\varrho)]\,dw_\varkappa) \end{array}\right\},$$

oder, falls man in der letzten Zeile das $[2\,w_\sigma(\varrho)]$ durch

$$[w_\sigma(\lambda) + w_\sigma(\varrho)] - [w_\sigma(\lambda) - w_\sigma(\varrho)]$$

ersetzt, und überdies die Formeln (α.) berücksichtigt:

$$J_\sigma = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}\left\{\begin{array}{l} \int_{a_\varkappa} a_{\sigma\varkappa}\,d\log F(\lambda) \\ + \int_{b_\varkappa}(b_{\sigma\varkappa}[d\log F(\lambda) + dw_\varkappa] - [w_\sigma(\lambda) + w_\sigma(\varrho)]\,dw_\varkappa) \end{array}\right\},$$

also mit Rücksicht auf (γ.) und (δ.):

$$J_\sigma = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}\left\{\begin{array}{l} a_{\sigma\varkappa}[M_\varkappa 2\pi i + 2G_\varkappa - w_\varkappa(\beta_\varkappa) - w_\varkappa(\alpha_\varkappa)] \\ + b_{\sigma\varkappa}[N_\varkappa 2\pi i - \pi i] - \int_{b_\varkappa}[w_\sigma(\lambda) + w_\sigma(\varrho)]\,dw_\varkappa \end{array}\right\},$$

oder, weil die $a_{\sigma\varkappa}$, mit Ausnahme von $a_{\sigma\sigma}$, sämmtlich $= 0$, dieses $a_{\sigma\sigma}$ aber $= \pi i$ ist:

$$J_\sigma = \frac{1}{2\pi i}\left\{\begin{array}{l} \pi i[M_\sigma 2\pi i + 2G_\sigma - w_\sigma(\beta_\sigma) - w_\sigma(\alpha_\sigma)] \\ + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}\left(b_{\sigma\varkappa}[N_\varkappa 2\pi i - \pi i] - \int_{b_\varkappa}[w_\sigma(\lambda) + w_\sigma(\varrho)]\,dw_\varkappa\right) \end{array}\right\},$$

oder, falls man besser ordnet:

$$J_\sigma = G_\sigma - \left[\frac{w_\sigma(\alpha_\sigma) + w_\sigma(\beta_\sigma)}{2} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \left(\frac{b_{\sigma\varkappa}}{2} + \int_{b_\varkappa} \frac{w_\sigma(\lambda) + w_\sigma(\varrho)}{2\pi i} dw_\varkappa\right)\right] + \left(M_\sigma \pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} N_\varkappa b_{\varkappa\sigma}\right),$$

oder, falls man den hier in der eckigen Klammer enthaltenen Ausdruck kurzweg [und zwar nach Riemann's Vorgang] mit K_σ bezeichnet:

$$J_\sigma = G_\sigma - K_\sigma + \left(M_\sigma \pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} N_\varkappa b_{\varkappa\sigma}\right).$$

Substituirt man schliesslich diesen Werth von J_σ in die Formeln (15.), so gelangt man zu folgendem Satz:

Satz. — *Die Function*

$$F(z) = \vartheta\,(w_1(z) - G_1,\quad w_2(z) - G_2, \ldots \quad w_p(z) - G_p) \tag{16.}$$

besitzt auf $\mathfrak{R}$ *im Ganzen* p *elementare Nullpunkte* $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$. *Diese Nullpunkte sind ihrer Lage nach unbekannt. Jedoch weiss man, dass zwischen ihnen und den gegebenen Constanten* $G_1, G_2, \ldots G_p$ *die Relationen stattfinden:*

$$w_\sigma(\eta_1) + w_\sigma(\eta_2) \ldots + w_\sigma(\eta_p) = G_\sigma - K_\sigma + \left(M_\sigma \pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} N_\varkappa b_{\varkappa\sigma}\right), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p, \tag{17.}$$

wo K_σ *die Bedeutung hat:*

$$K_\sigma = \frac{w_\sigma(\alpha_\sigma) + w_\sigma(\beta_\sigma)}{2} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \left(\frac{b_{\sigma\varkappa}}{2} + \int_{b_\varkappa} \frac{w_\sigma(\lambda) + w_\sigma(\varrho)}{2\pi i} dw_\varkappa\right); \tag{18.}$$

während die M, N *unbekannte ganze Zahlen vorstellen.*

Die Normalintegrale erster Gattung $w_1(z)$, $w_2(z)$, ... $w_p(z)$ sind früher in bestimmter Weise festgesetzt worden, abgesehen von noch unbestimmten additiven Constanten [vgl. (20.) pg. 246]. Setzt man also:

$$w_\sigma(z) = \Gamma_\sigma + \omega_\sigma(z), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p, \tag{A.}$$

so darf man die $\omega_\sigma(z)$ als *völlig fixirte* Functionen ansehen, falls man nur gleichzeitig die Γ_σ als *willkürliche* Constanten auffasst.

Die gegenwärtigen Untersuchungen können nun durch eine zweckmässige Wahl dieser Γ_σ einigermassen vereinfacht werden. Substituirt man nämlich in der Formel (18.) für $w_\sigma(z)$ und $w_\varkappa(z)$ die Werthe:

$$\begin{aligned} w_\sigma(z) &= \Gamma_\sigma + \omega_\sigma(z), \\ w_\varkappa(z) &= \Gamma_\varkappa + \omega_\varkappa(z), \\ dw_\varkappa(z) &= d\omega_\varkappa(z), \end{aligned} \tag{B.}$$

und nimmt man dabei Rücksicht auf die Formel (δ.) pg. 326, so erhält man:

$$(19.)\quad K_\sigma = (1-p)\,\Gamma_\sigma + \left[\frac{\omega_\sigma(\alpha_\sigma)+\omega_\sigma(\beta_\sigma)}{2} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}\left(\frac{b_{\sigma\varkappa}}{2} + \int_{b_\varkappa}\frac{\omega_\sigma(\lambda)+\omega_\sigma(\varrho)}{2\pi i}\,d\omega_\varkappa\right)\right],$$

wo der in der eckigen Klammer enthaltene Ausdruck als eine jenen fixirten Functionen ω zugehörige Constante zu bezeichnen ist. *Man* (20.) *kann somit die in* (19.) *enthaltene willkürliche Constante* Γ_σ *der Art wählen, dass* K_σ *verschwindet.*

Solches ausgeführt gedacht, reduciren sich die Formeln (17.) auf:

$$(21.)\quad \mathrm{w}_\sigma(\eta_1) + \mathrm{w}_\sigma(\eta_2) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\eta_p) = G_\sigma + \left(M_\sigma \pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} N_\varkappa b_{\varkappa\sigma}\right):$$

so dass also der vorhergehende Satz die einfachere Gestalt gewinnt:

Einfachere Form des Satzes. — *Die Function*

$$(22.)\quad F(z) = \vartheta\,(\mathrm{w}_1(z) - G_1,\ \mathrm{w}_2(z) - G_2,\ \ldots\ \mathrm{w}_p(z) - G_p)$$

besitzt auf der Fläche $\mathfrak{R}$ *im Ganzen* p *elementare Nullpunkte:* $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$. *Diese Nullpunkte sind ihrer Lage nach unbekannt. Jedoch weiss man, dass zwischen ihnen und den gegebenen Constanten* $G_1, G_2, \ldots G_p$ *die Relationen stattfinden:*

$$(23.)\quad \mathrm{w}_\sigma(\eta_1) + \mathrm{w}_\sigma(\eta_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\eta_p) = G_\sigma + \left(M_\sigma \pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} N_\varkappa b_{\varkappa\sigma}\right),$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots p,$$

wo die M, N *unbekannte ganze Zahlen vorstellen.*

Dabei ist vorausgesetzt, über die in $\mathrm{w}_1(z)$, $\mathrm{w}_2(z)$, $\ldots$ $\mathrm{w}_p(z)$ *enthaltenen additiven Constanten sei in ganz bestimmter Weise verfügt worden, nämlich in solcher Weise, dass die Riemann'schen* K's *verschwinden; vgl.* (20.).

§ 3.

Abgekürzte Bezeichnungsweise.

Erste Abkürzung. — Es mag hinfort

$$\vartheta(U_\sigma) \text{ für } \vartheta(U_1, U_2, \ldots U_p)$$

geschrieben werden. Nach dem Theorem pg. 319 ist alsdann z. B.

$$(24.)\quad \vartheta\,(-U_\sigma) = \vartheta\,(U_\sigma).$$

Betrachtet man ferner zwei Systeme von Argumenten $U_1, U_2, \ldots U_p$ und $V_1, V_2, \ldots V_p$, zwischen denen die mit irgend welchen

ganzen Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_p, n_1, n_2, \ldots n_p$ behafteten Relationen stattfinden:

$$V_\sigma = U_\sigma + (m_\sigma \pi i + \Sigma_\varkappa n_\varkappa b_{\varkappa\sigma}), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p, \tag{25.}$$

so ist zufolge jenes Theorems pg. 319:

$$\vartheta(V_\sigma) = \vartheta(U_\sigma)\, e^{-\Sigma_\sigma n_\sigma (V_\sigma + U_\sigma + m_\sigma \pi i)}. \tag{26.}$$

Mit andern Worten*): *Sind $U_1, U_2, \ldots U_p$ beliebig gegebene Grössen, und $m_1, m_2, \ldots m_p, n_1, n_2, \ldots n_p$ beliebig gegebene ganze Zahlen, so findet stets die Formel statt:*

$$\vartheta(U_\sigma + m_\sigma \pi i + \Sigma_\varkappa n_\varkappa b_{\varkappa\sigma}) = \vartheta(U_\sigma)\, e^{-\Sigma_\sigma n_\sigma (2 U_\sigma + 2 m_\sigma \pi i + \Sigma_\varkappa n_\varkappa b_{\varkappa\sigma})}. \tag{27.}$$

Denkt man sich endlich die Formel (27.) successive für irgend zwei Grössensysteme $U_1, U_2, \ldots U_p$ und $U_1', U_2', \ldots U_p'$ hingeschrieben, und die in solcher Weise sich ergebenden beiden Gleichungen durch einander dividirt, so erhält man die Formel:

$$\frac{\vartheta(U_\sigma + m_\sigma \pi i + \Sigma_\varkappa n_\varkappa b_{\varkappa\sigma})}{\vartheta(U_\sigma' + m_\sigma \pi i + \Sigma_\varkappa n_\varkappa b_{\varkappa\sigma})} = \frac{\vartheta(U_\sigma)}{\vartheta(U_\sigma')}\, e^{-\Sigma_\sigma 2 n_\sigma (U_\sigma - U_\sigma')}. \tag{28.}$$

Dabei sind in all diesen Formeln (25.)—(28.) die Summationen ausgedehnt zu denken über $\varkappa = 1, 2, \ldots p$, respective über $\sigma = 1, 2, \ldots p$.

Zweite Abkürzung. — Stehen irgend zwei Grössensysteme $U_1, U_2, \ldots U_p$ und $V_1, V_2, \ldots V_p$ in solcher Beziehung zu einander, dass

$$\begin{aligned} V_1 &= U_1 + m_1 \pi i + n_1 b_{11} + n_2 b_{21} \ldots + n_p b_{p1}, \\ V_2 &= U_2 + m_2 \pi i + n_1 b_{12} + n_2 b_{22} \ldots + n_p b_{p2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_p &= U_p + m_p \pi i + n_1 b_{1p} + n_2 b_{2p} \ldots + n_p b_{pp} \end{aligned} \tag{29.}$$

ist, wo die m, n ganze Zahlen sind, *so sollen $V_1, V_2, \ldots V_p$ zu $U_1, U_2, \ldots U_p$ congruent genannt werden.* Und diese Congruenz soll angedeutet werden durch die Formel:

$$V_\sigma \equiv U_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \ldots p. \tag{30.}$$

§ 4.

Beiläufige Sätze.

Aendert man die in der Function (22.):

$$F(z) = \vartheta\,(w_\sigma(z) - G_\sigma)$$

enthaltenen Constanten $G_1, G_2, \ldots G_p$, so werden ihre p (unbekannten) Nullpunkte $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ im Allgemeinen ebenfalls irgend welche

*) Die *neue* Formel (27.) ergiebt sich nämlich aus (25.) und (26.) durch Elimination der V's.

Verschiebungen erfahren. Doch giebt es gewisse Abänderungen jener Constanten, welche *keine* solche Verschiebungen veranlassen. So z. B. gilt folgender Satz:

Satz. — *Sind irgend zwei Constantensysteme* $G_1, G_2, \ldots G_p$ *und* $G_1', G_2', \ldots G_p'$ *unter einander in der Beziehung*

$$G_\sigma \equiv G_\sigma', \quad \sigma = 1, 2, \ldots p, \tag{31.}$$

so findet zwischen den zugehörigen Functionen

$$F(z) = \vartheta\,(\mathrm{w}_\sigma(z) - G_\sigma) \quad \text{und} \quad F'(z) = \vartheta\,(\mathrm{w}_\sigma(z) - G_\sigma') \tag{32.}$$

die Beziehung statt:

$$F'(z) = F(z)\,\mathsf{E}(z), \tag{33.}$$

wo $\mathsf{E}(z)$ *eine auf* $\Re_{ab}$ *eindeutige, stetige und nichtverschwindende Function bezeichnet. Demgemäss sind also die Nullpunkte der beiden Functionen* $F(z)$ *und* $F'(z)$ *unter einander identisch.*

Beweis. — Die vorausgesetzte Congruenz (31.) drückt sich aus mittelst der Formeln:

$$G_\sigma' = G_\sigma - (M_\sigma \pi i + \Sigma_\varkappa N_\varkappa b_{\varkappa\sigma}), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p,$$

wo die M, N irgend welche unbekannte ganze Zahlen vorstellen. Hieraus aber folgt, falls man mit (— 1) multiplicirt, und auf beiden Seiten $\mathrm{w}_\sigma(z)$ zuaddirt:

$$[\mathrm{w}_\sigma(z) - G_\sigma'] = [\mathrm{w}_\sigma(z) - G_\sigma] + (M_\sigma \pi i + \Sigma_\varkappa N_\varkappa b_{\varkappa\sigma}), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p.$$

Zufolge des Satzes (25.), (26.) ist daher:

$$\frac{\vartheta\,(\mathrm{w}_\sigma(z) - G_\sigma')}{\vartheta\,(\mathrm{w}_\sigma(z) - G_\sigma)} = e^{-\Sigma_\sigma N_\sigma\,[2\,\mathrm{w}_\sigma(z) - G_\sigma - G_\sigma' + M_\sigma \pi i]},$$

die Summation im Exponenten hinerstreckt gedacht über $\sigma = 1, 2, \ldots p$. Der hier auf der rechten Seite stehende Ausdruck besitzt also die Form:

$$e^{K_0 + K_1 \mathrm{w}_1(z) + K_2 \mathrm{w}_2(z) \ldots + K_p \mathrm{w}_p(z)},$$

wo die K's Constanten sind, und repräsentirt also [Satz pg. 273] eine auf $\Re_{ab}$ *eindeutige*, *stetige* und *nichtverschwindende* Function. Bezeichnet man dieselbe mit $\mathsf{E}(z)$, so erhält man also:

$$\vartheta\,(\mathrm{w}\;(z) - G_\sigma') = \vartheta\,(\mathrm{w}_\sigma(z) - G_\sigma).\;\; \mathsf{E}(z).$$

Hiermit aber ist der Satz (33.) bewiesen.

Ein zweiter Satz, der mit dem vorigen wenigstens äusserlich eine gewisse Aehnlichkeit besitzt, und ebenfalls sehr leicht zu beweisen ist, lautet folgendermassen:

Versteht man unter $2G_1, 2G_2, \ldots 2G_p$ *und* $2G_1', 2G_2', \ldots 2G_p'$ *zwei unter einander congruente Constantensysteme:*

$$2G_\sigma' = 2G_\sigma + (M_\sigma \pi i + N_1 b_{1\sigma} + N_2 b_{2\sigma} \ldots + N_p b_{p\sigma}), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p, \tag{34.}$$

so repräsentirt der Ausdruck

$$(35.)\qquad \Phi(z) = \left(\frac{\vartheta\,(\mathrm{w}_0(z) - G_0)}{\vartheta\,(\mathrm{w}_0(z) - G_0')}\, e^{N_1 \mathrm{w}_1(z) + N_2 \mathrm{w}_2(z) \ldots + N_p \mathrm{w}_p(z)}\right)^2$$

eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function $2p^{\text{ter}}$ Ordnung.

Bezeichnet man die elementaren Nullpunkte der Functionen

$$\vartheta\,(\mathrm{w}_0(z) - G_0) \text{ und } \vartheta\,(\mathrm{w}_0(z) - G_0')$$

(36.) *respective mit $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ und $\eta_1', \eta_2', \ldots \eta_p'$, so wird die Ordnungszahl von $\Phi(z)$ in $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ den Werth 2, ferner in $\eta_1', \eta_2', \ldots \eta_p'$ den Werth -2, und in allen übrigen Punkten der Fläche $\mathfrak{R}$ den Werth 0 haben. Sollte zufälliger Weise einer der Punkte $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_p$ mit einem der Punkte $\eta_1', \eta_2', \ldots \eta_p'$ zusammenfallen, so wird die Ordnungszahl von $\Phi(z)$ in einem solchen Punkt $= 2 - 2$, d. i. $= 0$ sein.*

Beweis. — Dass die Function $\Phi(z)$, (35.), auf der Fläche $\mathfrak{R}_{ab}$ regulär, und daselbst mit den genannten Ordnungszahlen behaftet ist, übersieht man sofort; [vgl. die Sätze (8.) und (22.), sowie auch den früheren Satz auf pg. 273]. Zu beweisen bleibt daher nur noch, dass sie auch auf der *unversehrten Fläche* $\mathfrak{R}$ regulär ist. Und zu diesem Behuf muss gezeigt werden, dass ihre Werthquotienten in den Schnitten a, b sämmtlich $= 1$ sind.

Sind nun λ und ϱ zwei zu beiden Ufern des Schnittes $a_\varkappa$ einander gegenüberliegende Punkte, so ergiebt sich aus (35.), mittelst des Satzes (8):

$$(\alpha.)\qquad \text{längs } a_\varkappa:\quad \frac{\Phi(\lambda)}{\Phi(\varrho)} = \left(e^{N_\varkappa \pi i}\right)^2 = e^{2 N_\varkappa \pi i} = 1.$$

Desgleichen ergiebt sich, falls λ und ϱ zwei gegenüberliegende Uferpunkte des Schnittes $b_\varkappa$ vorstellen:

$$\text{längs } b_\varkappa:\quad \frac{\Phi(\lambda)}{\Phi(\varrho)} = \left(e^{2G_\varkappa - 2G_\varkappa'} \cdot e^{N_1 b_{1\varkappa} + N_2 b_{2\varkappa} \ldots + N_p b_{p\varkappa}}\right)^2,$$

also, falls man für $(2G_\varkappa - 2G_\varkappa')$ den aus (34.) folgenden Werth substituirt:

$$(\beta.)\qquad \text{längs } b_\varkappa:\quad \frac{\Phi(\lambda)}{\Phi(\varrho)} = \left(e^{-M_\varkappa \pi i}\right)^2 = e^{-2 M_\varkappa \pi i} = 1.$$

Diese Formeln (α.) und (β.) zeigen, dass die in Rede stehenden Werthquotienten in der That $= 1$ sind. — *Q. e. d.*

Ein dritter Satz endlich ergiebt sich aus dem vorhergehenden durch Specialisirung. Macht man nämlich in (34.) die Zahlen N sämmtlich $= 0$, setzt man also

$$2G_\sigma' = 2G_\sigma + M_\sigma \pi i,$$

d. i.

$$G_\sigma' = G_\sigma + M_\sigma \frac{\pi i}{2}, \quad \sigma = 1, 2, \ldots p,$$

so gelangt man zu folgendem Resultat:

Sind $G_1, G_2, \ldots G_p$ beliebig gegebene Constante, und $M_1, M_2, \ldots M_p$ beliebig gegebene ganze Zahlen, so repräsentirt der Ausdruck

$$\Phi(z) = \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - G_\sigma)}{\vartheta\left(\mathrm{w}_\sigma(z) - \left[G_\sigma + M_\sigma \frac{\pi i}{2}\right]\right)} \right)^2 \tag{37.}$$

eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function $2p^{\text{ter}}$ Ordnung.

Bezeichnet man die elementaren Nullpunkte der Functionen

$$\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - G_\sigma) \quad \textit{und} \quad \vartheta\left(\mathrm{w}_\sigma(z) - \left[G_\sigma + M_\sigma \frac{\pi i}{2}\right]\right)$$

respective mit $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ und $\eta_1', \eta_2', \ldots \eta_p'$, so wird die Ordnungszahl von $\Phi(z)$ in $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ den Werth 2, ferner in $\eta_1', \eta_2', \ldots \eta_p'$ den Werth -2, und in allen übrigen Punkten der Fläche $\mathfrak{R}$ den Werth 0 haben.

Eine auf $\mathfrak{R}$ *reguläre* Function von z ist aber [Satz pg. 122] nothwendiger Weise eine *algebraische* Function von z. Aus dem vorstehenden Satze folgt daher, dass die Function $\Phi(z)$ eine *algebraische* ist. In der That werden wir weiterhin diese zwischen Φ und z vorhandene algebraische Abhängigkeit, wenigstens in speciellen Fällen, wirklich anzugeben im Stande sein.

§ 5.

Das Hauptresultat der bisherigen Untersuchungen.

Die Constanten $G_1, G_2, \ldots G_p$ können, wie sich später [vgl. (23.) pg. 347] zeigen wird, der Art fixirt werden, dass die Function

$$F(z) = \vartheta(\mathrm{w}_1(z) - G_1, \mathrm{w}_2(z) - G_2, \ldots \mathrm{w}_p(z) - G_p)$$

identisch $= 0$ wird, also *stets* verschwindet, welche Werthe man dem z auch zuertheilen mag. Eine solche *scheinbare* Function $F(z)$ subordinirt sich offenbar nicht mehr den bisherigen Betrachtungen, namentlich z. B. auch nicht den Sätzen (8.) und (22.). Und demgemäss haben wir diese Sätze, falls sie wirklich correct sein sollen, mit der nöthigen Reserve auszusprechen. Wir gelangen so (unter Anwendung der abgekürzten Bezeichnungsweise) zu folgendem Theorem.

Theorem. — *Denkt man sich p Constanten $G_1, G_2, \ldots G_p$ der Art gewählt, dass die Function*

$$F(z) = \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - G_\sigma) \tag{A.}$$

nicht identisch $= 0$ ist, so wird dieselbe auf der gegebenen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Curven $b_\varkappa$, eindeutig und stetig, in jenen Curven aber mit folgenden Quotienten behaftet sein:

$$\textit{längs } b_\varkappa\text{:}\ \frac{F(\lambda)}{F(\varrho)} = e^{2G_\varkappa - \mathrm{w}_\varkappa(\lambda) - \mathrm{w}_\varkappa(\varrho)}. \tag{B.}$$

Dabei bezeichnen λ und ϱ irgend zwei am linken und rechten Ufer der Curve $b_\varkappa$ einander gegenüberliegende Punkte.

Ferner wird alsdann diese Function $F(z)$ auf der Fläche $\mathfrak{R}$ im Ganzen p elementare Nullpunkte: $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ besitzen. Diese Nullpunkte sind ihrer Lage nach unbekannt. Jedoch weiss man, dass zwischen ihnen und den gegebenen Constanten $G_1, G_2, \ldots G_p$ die Relationen stattfinden:

$$\text{(C.)} \qquad \mathrm{w}_\sigma(\eta_1) + \mathrm{w}_\sigma(\eta_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\eta_p) = G_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \ldots p.$$

Man weiss hingegen z. B. nicht, ob diese Nullpunkte durch die vorstehenden Relationen (C.) *eindeutig bestimmt sind. Möglicher Weise existiren also, ausser diesen Nullpunkten, noch irgend welche andere Punkte, die ebenfalls den Relationen* (C.) *Genüge leisten.*

Dabei ist vorausgesetzt, die in $\mathrm{w}_1(z), \mathrm{w}_2(z), \ldots \mathrm{w}_p(z)$ enthaltenen additiven Constanten seien in solcher Weise fixirt worden, dass die [in (18.) pg. 328 angegebenen] *Constanten:*

$$\text{(D.)} \qquad K_\sigma = \frac{\mathrm{w}_\sigma(\alpha_\sigma) + \mathrm{w}_\sigma(\beta_\sigma)}{2} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \left(\frac{b_{\sigma\varkappa}}{2} + \frac{1}{\pi i} \int_{b_\varkappa} \frac{\mathrm{w}_\sigma(\lambda) + \mathrm{w}_\sigma(\varrho)}{2}\, d\mathrm{w}_\varkappa \right),$$

entweder geradezu verschwinden, oder wenigstens den Formeln entsprechen:

$$\text{(E.)} \qquad K_\sigma = 0, \quad \sigma = 1, 2, \ldots p.$$

Das vorstehende Theorem dürfte als das Hauptresultat der Artikel 17—22 der berühmten Riemann'schen Abhandlung zu bezeichnen sein. Die genannten Artikel 17—22 (Ges. Werke pg. 120—127) bieten dem Verständniss keine erhebliche Schwierigkeit dar. Alsdann aber findet beim Uebergang zu den folgenden Artikeln 23, 24 etc. ein *plötzlicher Sprung* statt; wie Jeder bemerkt haben wird, der dem Studium der Riemann'schen Abhandlung mit gebührender Sorgfalt sich hingegeben hat.

Jener plötzliche Sprung würde beseitigt, und eine legitime und continuirliche Schlussfolge hergestellt werden, falls es nur gelingen wollte, zu zeigen,

(S.) *dass die Nullpunkte $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ der Function $F(z)$, durch passende Wahl der Constanten $G_1, G_2, \ldots G_p$, in beliebig vorgeschriebene Lagen hineingedrängt werden können.*

Versucht man aber diesen noch fehlenden Satz (S.) zu beweisen, so wird man auf mancherlei Schwierigkeiten stossen.

So z. B. wird bei dem Beweise, den ich in der ersten Auflage dieses Werkes [Leipzig, bei Teubner 1865, pg. 484—486] für den Satz (S.) zu geben versucht habe, stillschweigend vorausgesetzt, dass die Nullpunkte $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ der Function $F(z)$ bei einer Aenderung der Constanten $G_1, G_2, \ldots G_p$ sich immer nur *stetig* verschieben können. Solches aber wirklich darzuthun, dürfte seine Schwierigkeit haben, namentlich in *den* Fällen, wo bei einer Aenderung jener Constanten die Nullpunkte theilweise zur

Coincidenz kommen, um sodann später, bei einer weiteren Aenderung jener Constanten, sich wieder von einander zu trennen. Und derselben Schwierigkeit begegnet man auch dann, wenn man den Satz (S.) mittelst derjenigen Methoden zu begründen sucht, welche Riemann selber in seiner Abhandlung über das Verschwinden der Thetafunctionen exponirt hat [1865. Ges. Werke pg. 198 etc.].

Aber selbst hiervon abgesehen, stellen einer einwurfslosen Begründung des Satzes (S.) noch *andere* Schwierigkeiten sich entgegen. Nimmt man nämlich an, *es sei bereits* bewiesen, dass die Nullpunkte, bei einer Aenderung der Constanten $G_1, G_2, \ldots G_p$, nur in *stetiger* Weise sich verschieben*), es seien also die Nullpunkte der Function

$$(\alpha.)\qquad F(z) = \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - G_\sigma)$$

von denen der Function

$$(\beta.)\qquad F_1(z) = \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - [G_\sigma + dG_\sigma])$$

nur unendlich wenig verschieden, und es seien demgemäss die Nullpunkte der erstern Function mit $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$, und die der letztern mit $\eta_1 + d\eta_1$, $\eta_2 + d\eta_2, \ldots \eta_p + d\eta_p$ bezeichnet, so ergeben sich allerdings, mittelst des Theorems (C.), die Formeln:

$$(\gamma.)\qquad \mathrm{w}_\sigma(\eta_1) + \mathrm{w}_\sigma(\eta_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\eta_p) \equiv G_\sigma,$$

$$(\delta.)\qquad \mathrm{w}_\sigma(\eta_1 + d\eta_1) + \mathrm{w}_\sigma(\eta_2 + d\eta_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\eta_p + d\eta_p) \equiv G_\sigma + dG_\sigma,$$

$$\sigma = 1, 2, \ldots p;$$

woraus durch Subtraction folgt:

$$(\varepsilon.)\qquad \mathrm{w}_\sigma'(\eta_1)\, d\eta_1 + \mathrm{w}_\sigma'(\eta_2)\, d\eta_2 \ldots + \mathrm{w}_\sigma'(\eta_p)\, d\eta_p = dG_\sigma,$$

$$\sigma = 1, 2, \ldots p,$$

falls nämlich zur Abkürzung

$$(\zeta.)\qquad \frac{d\mathrm{w}_\sigma(z)}{dz} = \mathrm{w}_\sigma'(z)$$

gesetzt wird. *Da aber [wie oben hervorgehoben wurde] in Frage steht, ob die Nullpunkte von $F(z)$ durch die Formeln (C.) eindeutig bestimmt sind, so überträgt sich dieser Zweifel offenbar auch auf die Formeln (γ.), (δ.) und (ε.). Es steht also z. B. in Frage, ob die unendlich kleinen Zuwüchse $d\eta_1, d\eta_2, \ldots d\eta_p$ durch die p Gleichungen (ε.) eindeutig bestimmt sind.* Und um diese Frage zu erledigen, würde die Determinante

$$(\eta.)\qquad \begin{vmatrix} \mathrm{w}_1'(\eta_1) & \mathrm{w}_1'(\eta_2) & \ldots & \mathrm{w}_1'(\eta_p) \\ \mathrm{w}_2'(\eta_1) & \mathrm{w}_2'(\eta_2) & \ldots & \mathrm{w}_2'(\eta_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{w}_p'(\eta_1) & \mathrm{w}_p'(\eta_2) & \ldots & \mathrm{w}_p'(\eta_p) \end{vmatrix}$$

zu untersuchen sein. In der That würden jene $d\eta_1, d\eta_2, \ldots d\eta_p$ durch die p Gleichungen (ε.) eindeutig bestimmt sein, falls sich nachweisen liesse, dass diese Determinante stets von 0 verschieden ist. Dies aber ist weder

*) Auch wird solches zu beweisen in der That wohl *möglich* sein mittelst der von mir im sechsten Capitel dieses Werkes angegebenen neuen Methoden.

beweisbar, noch überhaupt richtig; denn die Determinante verschwindet z. B., wenn zwei der Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ mit einander coincidiren.

Hiermit dürften die Schwierigkeiten, welche einem befriedigenden Beweise des Satzes (S.) sich entgegenstellen, und auf welche, meines Wissens, bis jetzt von keinem Autor näher eingegangen ist, einigermassen angedeutet sein.

Nach vielen vergeblichen Anstrengungen zur Ueberwindung dieser Schwierigkeiten habe ich mich schliesslich veranlasst gefunden, den Satz (S.) vorläufig ganz fallen zu lassen, und den Uebergang zu den Riemannschen Artikeln 23, 24 etc. auf einem *andern* Wege zu versuchen. Dieser Weg, bei welchem der Satz (S.) nicht zu Anfang, sondern erst *im weiteren Verlauf* der anzustellenden Betrachtungen zum Beweise gelangt*), soll in den folgenden Paragraphen dargelegt werden. Dabei sei noch bemerkt, dass eine vorläufige Mittheilung über den hier einzuschlagenden Weg von mir bereits erfolgt ist in den Berichten der Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. vom 10. Decbr. 1883.

§ 6.

Betrachtungen für den speciellen Fall $p = 3$.

Wir setzen $p = 3$, verstehen also unter

$$\vartheta(U_\sigma) \text{ die Function } \vartheta(U_1, U_2, U_3).$$

Uebrigens werden die Resultate, zu denen wir für $p = 3$ gelangen, später sofort auf den Fall eines *beliebigen* p übertragbar sein.

(1.) *Es seien irgend drei Constanten A_1, A_2, A_3 gegeben, von solcher Beschaffenheit, dass $\vartheta(A_\sigma)$, mithin auch $\vartheta(-A_\sigma)$ von Null verschieden ist.*

Markirt man also auf $\mathfrak{R}$ einen festen Punkt $\varkappa$ in willkürlicher Weise, so wird

$$F(z) = \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - [\mathrm{w}_\sigma(\varkappa) + A_\sigma])$$

im Punkte $z = \varkappa$ den *von Null verschiedenen Werth* $\vartheta(-A_\sigma)$ annehmen, mithin zur Kategorie derjenigen Functionen gehören, die *nicht identisch Null* sind, und die also dem Theorem pg. 333 sich ohne Weiteres subordiniren. Zufolge dieses Theorems besitzt daher $F(z)$ auf $\mathfrak{R}$ im Ganzen drei elementare Nullpunkte η, η', η'', die zu den in $F(z)$ enthaltenen Constanten $[\mathrm{w}_\sigma(\varkappa) + A_\sigma]$ in der Beziehung stehen:

$$\mathrm{w}_\sigma(\eta) + \mathrm{w}_\sigma(\eta') + \mathrm{w}_\sigma(\eta'') \equiv \mathrm{w}_\sigma(\varkappa) + A_\sigma,$$

somit ergiebt sich der Satz:

*) Es ergiebt sich nämlich die Richtigkeit des Satzes (S.) mittelst des Theorems (22.), pg. 347.

Entsprechen drei Constanten A_1, A_2, A_3 der Bedingung)* $\vartheta(A_\sigma) \mathrel{=\!\!|\!\!=} 0$, *oder, was dasselbe, der Bedingung* $\vartheta(-A_\sigma) \mathrel{=\!\!|\!\!=} 0$, *so können dieselben stets in folgender Weise dargestellt werden:*

$$(2.)\qquad A_\sigma = -\mathrm{w}_\sigma(\varkappa) + \mathrm{w}_\sigma(\eta) + \mathrm{w}_\sigma(\eta') + \mathrm{w}_\sigma(\eta''),$$
$$\sigma = 1, 2, 3,$$

wo von den vier Punkten $\varkappa$ *und* η, η', η'' *der erste ad libitum zu wählen ist.*

Es seien jetzt B_1, B_2, B_3 und C_1, C_2, C_3 *beliebig* gegebene Constanten. Welche Werthe dieselben auch haben mögen, stets werden die Ausdrücke

$$\vartheta(B_\sigma + Z) \quad \text{und} \quad \vartheta(B_\sigma + C_\sigma + Z)$$

durch Vergrösserung von Z *beliebig gross* gemacht werden können, wie solches aus der Natur der Function ϑ unmittelbar folgt. Denkt man sich nun dieses Z so gross gemacht, dass beide Ausdrücke $\mathrel{=\!\!|\!\!=} 0$ sind, so ist [zufolge des Satzes (2.)]:

$$B_\sigma + Z = \mathrm{w}_\sigma(\eta) + \mathrm{w}_\sigma(\eta') + \mathrm{w}_\sigma(\eta'') - \mathrm{w}_\sigma(\varkappa),$$

und ebenso:

$$B_\sigma + C_\sigma + Z = \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{H}) + \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{H}') + \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{H}'') - \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{K}),$$

wo $\eta, \eta', \eta'', \varkappa$ und $\mathsf{H}, \mathsf{H}', \mathsf{H}'', \mathsf{K}$ passend zu wählende Punkte vorstellen. Aus den beiden letzten Formeln folgt durch Subtraction:

$$C_\sigma = \left\{\begin{array}{l} \quad [\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{H}) + \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{H}') + \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{H}'') + \mathrm{w}_\sigma(\varkappa)] \\ - [\mathrm{w}_\sigma(\eta) + \mathrm{w}_\sigma(\eta') + \mathrm{w}_\sigma(\eta'') + \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{K})] \end{array}\right\},$$

so dass man also, unter nachträglicher Abänderung der Buchstaben, zu folgendem Satz gelangt:

Drei ganz beliebig gegebene Constanten C_1, C_2, C_3 sind stets in folgender Form darstellbar:

$$(3.)\qquad C_\sigma = \left\{\begin{array}{l} \quad [\mathrm{w}_\sigma(c) + \mathrm{w}_\sigma(c') + \mathrm{w}_\sigma(c'') + \mathrm{w}_\sigma(c''')] \\ - [\mathrm{w}_\sigma(d) + \mathrm{w}_\sigma(d') + \mathrm{w}_\sigma(d'') + \mathrm{w}_\sigma(d''')] \end{array}\right\},$$
$$\sigma = 1, 2, 3,$$

wo c, c', c'', c''' und d, d', d'', d''' passend zu wählende Punkte vorstellen.

---

*) Ebenso wie das Zeichen $=$ zur Bezeichnung der *Gleichheit* dient, ebenso soll andererseits das Zeichen $\mathrel{=\!\!|\!\!=}$ zur Bezeichnung der *Ungleichheit* dienen.

§ 7.

Fortsetzung der den speciellen Fall $p = 3$ betreffenden Betrachtungen.

Wir wollen jetzt insbesondere solche Constanten A_1, A_2, A_3 untersuchen, die der Bedingung

$$\vartheta(A_\alpha) = \vartheta(-A_\alpha) = Null \tag{4.}$$

entsprechen. Dabei sind mehrere Fälle zu unterscheiden, je nach der Beschaffenheit der mit A_1, A_2, A_3 behafteten Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
&\Phi\ = \vartheta\big(\mathrm{w}_\alpha(c) - \mathrm{w}_\alpha(\gamma) - A_\alpha\big),\\
&\Phi_1 = \vartheta\big(\mathrm{w}_\alpha(c) + \mathrm{w}_\alpha(c_1) - \mathrm{w}_\alpha(\gamma) - \mathrm{w}_\alpha(\gamma_1) - A_\alpha\big),\\
(5.)\quad &\Phi_2 = \vartheta\big(\mathrm{w}_\alpha(c) + \mathrm{w}_\alpha(c_1) + \mathrm{w}_\alpha(c_2) - \mathrm{w}_\alpha(\gamma) - \mathrm{w}_\alpha(\gamma_1) - \mathrm{w}_\alpha(\gamma_2) - A_\alpha\big),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Phi_n = \vartheta\big(\mathrm{w}_\alpha(c) + \mathrm{w}_\alpha(c_1) \dots + \mathrm{w}_\alpha(c_n) - \mathrm{w}_\alpha(\gamma) - \mathrm{w}_\alpha(\gamma_1) \dots - \mathrm{w}_\alpha(\gamma_n) - A_\alpha\big),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

hier sollen c, c_1, c_2, ... c_n, ... und γ, γ_1, γ_2, ... γ_n, ... irgend welche Punkte auf der Fläche $\mathfrak{R}$ vorstellen, die auf dieser Fläche beliebig verschiebbar sind.

Was zuvörderst den Ausdruck Φ betrifft, so wird *entweder* irgend ein Lagensystem der beiden Punkte c, γ existiren, für welches $\Phi \neq 0$ ist. *Oder aber* es wird Φ stets $= 0$ sein, welche Lagen man jenen beiden Punkten auch zuertheilen mag. In solcher Weise ergeben sich zwei Hauptfälle, die angedeutet werden können durch die Formeln:

$$(6.)\qquad \begin{aligned} &\text{I.}\ \ \Phi \neq 0,\\ &\text{II.}\ \ \Phi \text{ stets} = 0. \end{aligned}$$

Der *letzte* Fall kann von Neuem in zwei Fälle zerlegt werden, je nach der Beschaffenheit des Ausdruckes Φ_1. *Entweder* wird nämlich irgend ein Lagensystem der vier Punkte c, c_1, γ, γ_1 existiren, für welches $\Phi_1 \neq 0$ ist. *Oder aber* es wird Φ_1 stets $= 0$ sein, welche Lage man jenen vier Punkten auch zuertheilen mag. Demgemäss ergeben sich jetzt im Ganzen drei Fälle, die angedeutet werden können durch die Formeln:

$$(7.)\qquad \begin{aligned} &\text{I.}\ \ \Phi \neq 0,\\ &\text{II.}\ \ \Phi \text{ stets} = 0,\quad \Phi_1 \neq 0,\\ &\text{III.}\ \ \Phi \text{ stets} = 0,\quad \Phi_1 \text{ stets} = 0. \end{aligned}$$

Der letzte dieser Fälle kann seinerseits von Neuem in zwei Fälle

zerlegt werden, je nach der Beschaffenheit von Φ_2; wodurch sich alsdann im Ganzen vier Fälle ergeben:

$$\begin{array}{rl} \text{I.} & \Phi \neq 0, \\ \text{II.} & \Phi \text{ stets} = 0, \quad \Phi_1 \neq 0, \\ \text{III.} & \Phi \text{ stets} = 0, \quad \Phi_1 \text{ stets} = 0, \quad \Phi_2 \neq 0, \\ \text{IV.} & \Phi \text{ stets} = 0, \quad \Phi_1 \text{ stets} = 0, \quad \Phi_2 \text{ stets} = 0. \end{array} \tag{8.}$$

Zerlegt man jetzt den letzten Fall von Neuem in zwei Fälle, je nach der Beschaffenheit von Φ_3, so erhält man im Ganzen fünf Fälle:

$$\begin{array}{rl} \text{I.} & \Phi \neq 0, \\ \text{II.} & \Phi \text{ stets} = 0, \quad \Phi_1 \neq 0, \\ \text{III.} & \Phi \text{ stets} = 0, \quad \Phi_1 \text{ stets} = 0, \quad \Phi_2 \neq 0, \\ \text{IV.} & \Phi \text{ stets} = 0, \quad \Phi_1 \text{ stets} = 0, \quad \Phi_2 \text{ stets} = 0, \quad \Phi_3 \neq 0, \\ \text{V.} & \Phi \text{ stets} = 0, \quad \Phi_1 \text{ stets} = 0, \quad \Phi_2 \text{ stets} = 0, \quad \Phi_3 \text{ stets} = 0. \end{array} \tag{9.}$$

All diese Formeln (6.), (7.), (8.), (9.) sind nur *andeutender* Natur, und, ohne grosse Weitläufigkeit, wohl auch schwerlich präciser ausdrückbar. Es ist eben im Gedächtniss zu behalten, dass z. B. durch „$\Phi \neq 0$“ angedeutet sein soll, es existire irgend ein Lagensystem der *beiden* Punkte c, γ, für welches Φ nicht verschwindet; und dass andererseits durch „Φ stets $= 0$“ angedeutet werden soll, es existire *kein* derartiges Lagensystem der Punkte c, γ, es sei vielmehr Φ *stets* $= 0$, welche Lage man den beiden Punkten auch zuertheilen mag. Analoge Bedeutungen haben die Formeln „$\Phi_1 \neq 0$“ und „Φ_1 stets $= 0$“ mit Bezug auf die *vier* Punkte c, c_1, γ, γ_1. — U. s. w. U. s. w. Im Folgenden werden übrigens statt der Buchstaben $c, c_1, \dots \gamma, \gamma_1, \dots$ zuweilen die Buchstaben $z, z_1, \dots \zeta, \zeta_1, \dots$ gebraucht werden.

Durch die Eintheilung (6.) sind offenbar alle überhaupt nur denkbaren Fälle erschöpft. Gleiches gilt von der Eintheilung (7.), ebenso von (8.) und von (9.). Wenn wir also z. B. die in (9.) angegebenen *fünf* Fälle der Reihe nach discutiren, so werden wir hiermit alle überhaupt möglichen Fälle erschöpfen. Dies wollen wir in der That thun, indem wir jene *fünf* Fälle der Reihe nach durchmustern.

I. Fall. — Alsdann sind, nach (9.), zwei Punkte c, γ angebbar, für welche die Formel $\Phi \neq 0$, d. i. die Formel

$$\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(c) - \mathrm{w}_\sigma(\gamma) - A_\sigma) \neq 0 \tag{A.}$$

stattfindet. Diese beiden Punkte c, γ wirklich markirt gedacht, wird also die Function

$$F(z) = \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - \mathrm{w}_\sigma(\gamma) - A_\sigma)$$

im Punkte $z = c$ *nicht verschwinden*, mithin zur Kategorie derjenigen Functionen gehören, die dem Theorem pg. 333 sich subordiniren. Zufolge dieses Theorems besitzt daher $F(z)$ auf $\mathfrak{R}$ im Ganzen drei elementare Nullpunkte. Einer derselben liegt in γ; denn für $z = \gamma$ geht $F(z)$ in $\vartheta(-A_\sigma)$ über, und dieses $\vartheta(-A_\sigma)$ ist $= 0$ [zufolge der Voraussetzung (4.)].

Bezeichnet man die beiden übrigen Nullpunkte mit η und η', so finden, zufolge des citirten Theorems, die Formeln statt:

$$w_\sigma(\gamma) + w_\sigma(\eta) + w_\sigma(\eta') = w_\sigma(\gamma) + A_\sigma,$$

woraus folgt:

$$(AA.) \qquad A_\sigma = w_\sigma(\eta) + w_\sigma(\eta').$$

II. Fall. — Alsdann ist, nach (9.), Φ stets $= 0$, d. i.

$$(B.) \qquad \vartheta(w_\sigma(z) - w_\sigma(\zeta) - A_\sigma) \text{ stets } = 0;$$

und gleichzeitig sind alsdann, nach (9.), vier Punkte c, c_1, γ, γ_1 angebbar, für welche die Formel $\Phi_1 \neq 0$, d. i. die Formel

$$(B'.) \qquad \vartheta(w_\sigma(c) + w_\sigma(c_1) - w_\sigma(\gamma) - w_\sigma(\gamma_1) - A_\sigma) \neq 0$$

stattfindet. Diese vier Punkte wirklich markirt gedacht, hat also die Function

$$F(z) = \vartheta(w_\sigma(z) + w_\sigma(c_1) - w_\sigma(\gamma) - w_\sigma(\gamma_1) - A_\sigma)$$

im Punkte $z = c$ einen *nicht verschwindenden* Werth. Sie subordinirt sich also dem Theorem pg. 333, und besitzt daher auf $\mathfrak{R}$ im Ganzen drei elementare Nullpunkte, von denen übrigens zwei sofort angebbar sind, nämlich in γ und γ_1 liegen [wie aus (B.) folgt].

Bezeichnet man also den dritten Nullpunkt mit η, so werden für γ, γ_1 und η, zufolge des citirten Theorems, die Formeln stattfinden:

$$w_\sigma(\gamma) + w_\sigma(\gamma_1) + w_\sigma(\eta) = - w_\sigma(c_1) + w_\sigma(\gamma) + w_\sigma(\gamma_1) + A_\sigma,$$

woraus folgt:

$$(BB.) \qquad A_\sigma = w_\sigma(c_1) + w_\sigma(\eta).$$

Erläuterung. — Wir haben soeben behauptet, dass *zwei* Nullpunkte der Function $F(z)$ unmittelbar angebbar seien, nämlich in γ und γ_1 liegen. Diese Behauptung würde hinfällig werden, falls γ und γ_1 miteinander coincidiren sollten; so dass also unsere Betrachtung der *allgemeinen* Gültigkeit zu entbehren scheint.

Nimmt man aber an, die Prämisse (B'.) sei erfüllt für zwei miteinander coincidirende Punkte γ, γ_1, es sei also der Ausdruck

$$(\alpha.) \qquad \vartheta(w_\sigma(c) + w_\sigma(c_1) - 2\, w_\sigma(\gamma) - A_\sigma) \neq 0,$$

so wird der Ausdruck

$$(\beta.) \qquad \vartheta(w_\sigma(c) + w_\sigma(c_1) - w_\sigma(\gamma) - w_\sigma(\gamma + d\gamma) - A_\sigma)$$

von jenem Ausdrucke (α.) nur *unendlich wenig verschieden*, mithin ebenfalls $= 0$ sein. Dabei ist unter $(\gamma + d\gamma)$ ein beliebiger Nachbarpunkt von γ zu verstehen.

Ist also die Prämisse (B'.) *für zwei miteinander coincidirende Punkte* γ, γ_1 ***erfüllt, so werden stets zwei nicht coincidirende Punkte*** γ, γ_1 ***angebbar sein***, *für welche sie ebenfalls erfüllt ist.* Und hieraus folgt, dass die vorhin angestellten Ueberlegungen *ausnahmslos* gültig sind.

III. Fall. — Alsdann ist, nach (9.), Φ_1 stets $= 0$, d. i.

$$\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) + \mathrm{w}_\sigma(z_1) - \mathrm{w}_\sigma(\zeta) - \mathrm{w}_\sigma(\zeta_1) - A_\sigma) \text{ stets } = 0; \tag{C.}$$

und gleichzeitig sind alsdann, nach (9.), sechs Punkte $c, c_1, c_2, \gamma, \gamma_1, \gamma_2$ angebbar, für welche die Formel $\Phi_2 \neq 0$, d. i. die Formel

$$\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(c) + \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) - \mathrm{w}_\sigma(\gamma) - \mathrm{w}_\sigma(\gamma_1) - \mathrm{w}_\sigma(\gamma_2) - A_\sigma) \neq 0 \tag{C'.}$$

stattfindet. Dabei können die drei Punkte $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ als *von einander verschieden* angesehen werden [zufolge der vorhergehenden Erläuterung].

Alsdann aber hat die Function

$$F(z) = \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) + \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) - \mathrm{w}_\sigma(\gamma) - \mathrm{w}_\sigma(\gamma_1) - \mathrm{w}_\sigma(\gamma_2) - A_\sigma)$$

im Punkte $z = c$ einen *nicht verschwindenden* Werth [wie aus (C'.) folgt]. Sie subordinirt sich also dem Theorem pg. 333, und besitzt daher drei elementare Nullpunkte, die übrigens sofort angebbar sind, nämlich in $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ liegen [wie aus (C.) folgt].

Nach dem genannten Theorem finden daher die Formeln statt:

$$\mathrm{w}_\sigma(\gamma) + \mathrm{w}_\sigma(\gamma_1) + \mathrm{w}_\sigma(\gamma_2) \equiv$$
$$\equiv - \mathrm{w}_\sigma(c_1) - \mathrm{w}_\sigma(c_2) + \mathrm{w}_\sigma(\gamma) + \mathrm{w}_\sigma(\gamma_1) + \mathrm{w}_\sigma(\gamma_2) + A_\sigma,$$

woraus folgt:

$$A_\sigma \equiv \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2). \tag{CC.}$$

IV. Fall. — Alsdann ist nach (9.), Φ_2 stets $= 0$, d. i.

$$\vartheta\begin{pmatrix} \mathrm{w}_\sigma(z) + \mathrm{w}_\sigma(z_1) + \mathrm{w}_\sigma(z_2) \\ - \mathrm{w}_\sigma(\zeta) - \mathrm{w}_\sigma(\zeta_1) - \mathrm{w}_\sigma(\zeta_2) - A_\sigma \end{pmatrix} \text{ stets } = 0; \tag{D.}$$

und gleichzeitig werden alsdann, nach (9.), acht Punkte $c, c_1, c_2, c_3, \gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ angebbar sein, für welche die Formel $\Phi_3 \neq 0$, d. i. die Formel

$$\vartheta\begin{pmatrix} \mathrm{w}_\sigma(c) + \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) + \mathrm{w}_\sigma(c_3) \\ - \mathrm{w}_\sigma(\gamma) - \mathrm{w}_\sigma(\gamma_1) - \mathrm{w}_\sigma(\gamma_2) - \mathrm{w}_\sigma(\gamma_3) - A_\sigma \end{pmatrix} \neq 0 \tag{D'.}$$

stattfindet. Dabei können die vier Punkte $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ stets als *von einander verschieden* angesehen werden [zufolge der Erläuterung auf pg. 340].

Alsdann hat die Function

$$F(z) = \vartheta\begin{pmatrix} \mathrm{w}_\sigma(z) + \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) + \mathrm{w}_\sigma(c_3) \\ -\mathrm{w}_\sigma(\gamma) - \mathrm{w}_\sigma(\gamma_1) - \mathrm{w}_\sigma(\gamma_2) - \mathrm{w}_\sigma(\gamma_3) - A_\sigma \end{pmatrix}$$

im Punkte $z = c$ einen *nichtverschwindenden* Werth [wie aus (D'.) folgt]. Sie subordinirt sich also dem Theorem pg. 333, und besitzt daher *drei* elementare Nullpunkte. Dies aber steht im Widerspruch mit der Thatsache, dass die Function $F(z)$ in den *vier* Punkten γ, γ_1, γ_2, γ_3 zu Null wird [wie solches unmittelbar aus (D.) sich ergiebt]. Die Annahme dieses IV. Falles führt also zu einem Widerspruch. Folglich ist der IV. Fall *unmöglich*.

V. Fall. — Alsdann ist, nach (9.), Φ_3 stets $= 0$, d. i.

$$\text{(E.)} \qquad \vartheta\begin{pmatrix} \mathrm{w}_\sigma(z) + \mathrm{w}_\sigma(z_1) + \mathrm{w}_\sigma(z_2) + \mathrm{w}_\sigma(z_3) \\ -\mathrm{w}_\sigma(\zeta) - \mathrm{w}_\sigma(\zeta_1) - \mathrm{w}_\sigma(\zeta_2) - \mathrm{w}_\sigma(\zeta_3) - A_\sigma \end{pmatrix} \text{ stets } = 0.$$

Sind nun B_1, B_2, B_3 *willkürlich* gewählte Constanten, so wird man die acht Punkte z, z_1, z_2, z_3, ζ, ζ_1, ζ_2, ζ_3 [zufolge des Satzes (3.)] stets so placiren können, dass sie, in Verbindung mit den gegebenen Constanten A_1, A_2, A_3, den Formeln entsprechen:

$$B_\sigma + A_\sigma = \begin{Bmatrix} \mathrm{w}_\sigma(z) + \mathrm{w}_\sigma(z_1) + \mathrm{w}_\sigma(z_2) + \mathrm{w}_\sigma(z_3) \\ -\mathrm{w}_\sigma(\zeta) - \mathrm{w}_\sigma(\zeta_1) - \mathrm{w}_\sigma(\zeta_2) - \mathrm{w}_\sigma(\zeta_3) \end{Bmatrix},$$

wodurch die Formel (E.), [vgl. (25.), (26.) pg. 330], übergeht in:

$$\vartheta(B_\sigma) \text{ stets } = 0;$$

was *nicht möglich* ist, weil B_1, B_2, B_3 ganz *willkürlich* gewählte Constanten vorstellen. Der V. Fall führt also zu einem Widerspruch, und ist daher *unmöglich*.

Von den fünf Fällen, die auf Grund unserer Voraussetzung (4.):

$$\vartheta(A_\sigma) = 0$$

discutirt sind, und die zusammengenommen *alle überhaupt denkbaren Fälle erschöpfen*, haben sich also die beiden letzten als unmöglich herausgestellt, während die drei ersten zu den Formeln (AA.), (BB.), (CC.) hinführten:

$$\text{(AA.)} \qquad A_\sigma = \mathrm{w}_\sigma(\eta) + \mathrm{w}_\sigma(\eta'),$$

$$\text{(BB.)} \qquad A_\sigma = \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(\eta),$$

$$\text{(CC.)} \qquad A_\sigma = \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2).$$

Demgemäss gelangt man zu folgendem Satz:

Entsprechen drei Constanten A_1, A_2, A_3 *der Bedingung* $\vartheta(A_\sigma) = 0$, *so können dieselben stets in folgender Weise dargestellt werden:*

$$A_\sigma \equiv \mathrm{w}_\sigma(c) + \mathrm{w}_\sigma(c'), \quad \sigma = 1, 2, 3, \tag{10.}$$

wo c *und* c' *passend zu wählende Punkte vorstellen.*

§ 8.

Allgemeine Sätze über die Thetafunctionen.

Dass die in den beiden vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Resultate sofort auf den Fall eines *beliebigen* p übertragbar sind, unterliegt keinem Zweifel. Man gelangt in solcher Weise, von (2.) und (10.) aus, zu folgenden Sätzen:

Erster Satz. — *Entsprechen die Constanten* $A_1, A_2, \ldots A_p$ *der Bedingung*

$$\vartheta(A_\sigma) \neq 0, \tag{11.}$$

so sind dieselben stets darstellbar in der Form:

$$A_\sigma \equiv -\mathrm{w}_\sigma(c) + \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(c_p),$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots p;$$

wo von den Punkten $c, c_1, c_2, \ldots c_p$ *der erste ad libitum gewählt werden darf.*

Zweiter Satz. — *Entsprechen die Constanten* $A_1, A_2, \ldots A_p$ *der Bedingung*

$$\vartheta(A_\sigma) = 0, \tag{12.}$$

so sind dieselben stets darstellbar in der Form:

$$A_\sigma \equiv \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(c_{p-1}),$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots p,$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_{p-1}$ *passend zu wählende Punkte vorstellen.*

Wir gehen über zur Begründung zweier verwandter Sätze. Sind p Constanten $A_1, A_2, \ldots A_p$ beliebig gegeben, so sind nur zwei Fälle denkbar. Entweder nämlich wird die mit diesen Constanten behaftete Function

$$F(z) = \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - A_\sigma)$$

identisch Null sein, für jedwedes z. Oder sie wird *nicht* identisch Null sein.

Ist, um mit dem letztern Fall zu beginnen, die Function $F(z)$ *nicht* identisch Null, so wird dieselbe dem Theorem pg. 333 sich subordiniren, mithin im Ganzen p elementare Nullpunkte: $c_1, c_2, \ldots c_p$ besitzen, welche den Formeln entsprechen:

$$A_\sigma \equiv \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(c_p). \tag{α.}$$

Ist andererseits die Function $F(z)$ *identisch Null*, so wird, falls man unter z_0 irgend welche feste Lage des Punktes z versteht, stets die Gleichung stattfinden:

$$\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z_0) - A_\sigma) = 0,$$

mithin auch die Gleichung:

$$\vartheta(A_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(z_0)) = 0.$$

Hieraus aber folgt durch Anwendung des Satzes (12.):

$$(\beta.)\qquad A_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(z_0) \equiv \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(c_{p-1}),$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_{p-1}$ passend zu wählende Punkte vorstellen.

Diese Formeln ($\alpha.$) und ($\beta.$) führen respective zu folgenden beiden Sätzen:

Dritter Satz. — *Sind die Constanten $A_1, A_2, \ldots A_p$ von solcher Beschaffenheit, dass die Function*

$$(13.)\qquad F(z) = \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - A_\sigma)$$

nicht identisch Null ist, so sind dieselben stets in folgender Form darstellbar:

$$A_\sigma \equiv \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(c_p),$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots p,$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_p$ passend zu wählende Punkte vorstellen.

Vierter Satz. — *Sind die Constanten $A_1, A_2, \ldots A_p$ von solcher Beschaffenheit, dass die Function*

$$(14.)\qquad F(z) = \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - A_\sigma)$$

identisch verschwindet, für jedwedes z, so sind dieselben durch die Formeln ausdrückbar:

$$A_\sigma \equiv \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(c_p),$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots p,$$

wo einer der Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ ad libitum gewählt werden darf; so dass also unendlich viele diesen p Formeln entsprechende Punktsysteme $c_1, c_1, \ldots c_p$ existiren werden.

Sind also z. B. irgend welche feste Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ gegeben, von solcher Lage, dass die Function

$$(15.)\qquad F(z) = \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - [\mathrm{w}_\sigma(\alpha_1) + \mathrm{w}_\sigma(\alpha_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\alpha_p)])$$

identisch verschwindet, für jedwedes z, so wird stets ein zweites Punktsystem $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$ existiren, welches zu jenem ersten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ in der Beziehung steht:

$$(16.)\qquad \mathrm{w}_\sigma(\alpha_1) + \mathrm{w}_\sigma(\alpha_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\alpha_p) \equiv \mathrm{w}_\sigma(\beta_1) + \mathrm{w}_\sigma(\beta_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\beta_p).$$

Dass dieses zweite Punktsystem so gewählt werden kann, dass es von dem ersten *verschieden* ist, unterliegt keinem Zweifel. Denn zufolge des letzten Satzes darf *einer* der Punkte $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$ *ad libitum* gewählt werden.

Hieraus aber folgt [unter Anwendung des Satzes (15.) pg. 284] sofort, dass die Determinante

$$\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p) \tag{17.}$$

$= 0$ ist. Setzt man also nachträglich $c_1, c_2, \ldots c_p$ für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, so gelangt man zu folgendem Resultat:

Fünfter Satz. — *Sind irgend welche festen Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ gegeben, von solcher Lage, dass die Function*

$$F(z) = \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - [\mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(c_p)])$$

identisch verschwindet, für jedwedes z, so wird die Determinante

$$\Delta(c_1, c_2, \ldots c_p) \tag{18.}$$

nothwendig $= 0$ sein.

An diesen letzten Satz schliessen sich weitere Ueberlegungen an. Sind nämlich die festen Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ so gewählt, dass die Determinante

$$\Delta(c_1, c_2, \ldots c_p) \neq 0 \tag{A.}$$

ist, *so kann die Function*

$$F(z) = \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - [\mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(c_p)]) \tag{B.}$$

niemals identisch verschwinden; denn sonst müsste [zufolge des vorhergehenden Satzes] $\Delta(c_1, c_2, \ldots c_p) = 0$ sein, was der gegenwärtigen Voraussetzung (A.) widerspricht. Die Function $F(z)$ wird daher dem Theorem pg. 333 sich subordiniren, mithin p elementare Nullpunkte $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ besitzen, welche den Formeln entsprechen:

$$\mathrm{w}_\sigma(\eta_1) + \mathrm{w}_\sigma(\eta_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\eta_p) \equiv \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(c_p). \tag{C.}$$

Und hieraus folgt sofort, dass $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ mit $c_1, c_2, \ldots c_p$ *identisch* sind. Denn wären diese Punktsysteme von einander *verschieden*, so würde aus den Formeln (C.), [unter Anwendung des Satzes (15.) pg. 284], folgen, dass $\Delta(c_1, c_2, \ldots c_p) = 0$ sei, was der gegenwärtigen Voraussetzung (A.) widerspricht.

Alles zusammengefasst, gelangen wir daher zu folgendem einfachen und wichtigen Resultat:

Sechster Satz. — *Sind irgend welche festen Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ gegeben, von solcher Lage, dass*

$$\Delta(c_1, c_2, \ldots c_p) \neq 0 \tag{19.}$$

ist, so wird die Function

$$F(z) = \vartheta\,(\mathrm{w}_o(z) - [\mathrm{w}_o(c_1) + \mathrm{w}_o(c_2) \ldots + \mathrm{w}_o(c_p)]) \tag{20.}$$

niemals identisch verschwinden. Und gleichzeitig werden alsdann die p Nullpunkte dieser Function durch $c_1, c_2, \ldots c_p$ dargestellt sein.

Entsprechen also $c_1, c_2, \ldots c_p$ der Voraussetzung (19.), so wird z. B. $\vartheta\,(-[\mathrm{w}_o(c_1) + \mathrm{w}_o(c_2) \ldots + \mathrm{w}_o(c_{p-1})])$ nothwendig $= 0$ sein, mithin

$$\vartheta\,(\mathrm{w}_o(c_1) + \mathrm{w}_o(c_2) \ldots + \mathrm{w}_o(c_{p-1})) \tag{21.}$$

ebenfalls $= 0$ sein.

§ 9.

Fortsetzung. Aufstellung zweier sehr allgemeiner und einfacher Theoreme.

Bevor wir weiter gehen, sind zuvörderst die schon mehrfach discutirten Determinanten [vgl. pg. 253 und pg. 280]:

$$D(c_1, c_2, \ldots c_p) = \begin{vmatrix} \mathrm{w}_1'(c_1) & \mathrm{w}_1'(c_2) \ldots & \mathrm{w}_1'(c_p) \\ \mathrm{w}_2'(c_1) & \mathrm{w}_2'(c_2) \ldots & \mathrm{w}_2'(c_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{w}_p'(c_1) & \mathrm{w}_p'(c_2) \ldots & \mathrm{w}_p'(c_p) \end{vmatrix} \tag{α.}$$

und

$$\Delta(c_1, c_2, \ldots c_p) = \begin{vmatrix} \overline{\mathrm{w}}_1(c_1) & \overline{\mathrm{w}}_1(c_2) \ldots & \overline{\mathrm{w}}_1(c_p) \\ \overline{\mathrm{w}}_2(c_1) & \overline{\mathrm{w}}_2(c_2) \ldots & \overline{\mathrm{w}}_2(c_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{\mathrm{w}}_p(c_1) & \overline{\mathrm{w}}_p(c_2) \ldots & \overline{\mathrm{w}}_p(c_p) \end{vmatrix} \tag{β.}$$

einer weiteren Untersuchung zu unterwerfen. Da $\mathrm{w}_\sigma'(z)$ zur Abkürzung steht für $\frac{d\,\mathrm{w}_\sigma(z)}{dz}$, so wird [vgl. ($\varepsilon$.) pg. 280] das $\overline{\mathrm{w}}_\sigma(c)$ stets identisch mit $\mathrm{w}_\sigma'(c)$ sein, falls nur c weder einen Windungspunkt von $\mathfrak{R}$, noch auch einen der in $\mathfrak{R}$ bei $z = \infty$ liegenden Punkte vorstellt. Und demgemäss wird, so lange die p Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ dieser Restriction unterliegen, auch die Gleichung stattfinden:

$$\Delta(c_1, c_2, \ldots c_p) = D(c_1, c_2, \ldots c_p). \tag{γ.}$$

Hieraus aber folgt, dass der auf pg. 255 für D gefundene Satz ohne Weiteres auf die Determinante Δ übertragbar ist; wodurch man zu folgendem Resultat gelangt:

Repräsentirt $\mathfrak{S}$ irgend einen Theil der Fläche $\mathfrak{R}$, und setzt man voraus, dass dieser Flächentheil $\mathfrak{S}$ frei sei von den Polen der Functionen

$$w_\sigma'(z), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p,$$

ferner frei sei von den Windungspunkten der Fläche $\mathfrak{R}$, sowie auch von den in $\mathfrak{R}$ bei $z = \infty$ liegenden Punkten, so sind innerhalb $\mathfrak{S}$ stets p Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ angebbar, für welche

$$(\delta.) \qquad \Delta(c_1, c_2, \ldots c_p) \neq 0$$

ist. Auch wird man alsdann auf $\mathfrak{S}$ um die Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ (als Centra) Kreislinien von solcher Kleinheit beschreiben können, dass die Determinante

$$(\varepsilon.) \qquad \Delta(z_1, z_2, \ldots z_p) \text{ stets } \neq 0$$

bleibt, welche Bewegung man den Punkten $z_1, z_2, \ldots z_p$ innerhalb jener p Kreislinien auch zuertheilen mag.

Denkt man sich also diese Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ nebst ihren Kreislinien wirklich construirt, so gilt für alle innerhalb dieser Kreise liegenden Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ die Formel (ε.), und folglich, nach Satz (21.), auch die Formel:

$$(\zeta.) \qquad \vartheta\left(w_\sigma(z_1) + w_\sigma(z_2) \ldots + w_\sigma(z_{p-1})\right) = 0.$$

Die hier auftretende, von $z_1, z_2, \ldots z_{p-1}$ abhängende Function

$$\vartheta\left(w_\sigma(z_1) + w_\sigma(z_2) \ldots + w_\sigma(z_{p-1})\right)$$

ist aber, so lange diese Variablen innerhalb $\mathfrak{R}_{ab}$ bleiben, durchweg *eindeutig und stetig*. Aus ihrem Nullsein innerhalb jener Kreise folgt daher [mittelst des Satzes (1.) pg. 101], dass sie auf $\mathfrak{R}_{ab}$ *allenthalben* $= 0$ ist, mithin auch auf $\mathfrak{R}$ selber. Man gelangt somit zu folgendem einfachen Satz:

Theorem. — *Der Ausdruck:*

$$(22.) \qquad \vartheta\left(w_\sigma(z_1) + w_\sigma(z_2) \ldots + w_\sigma(z_{p-1})\right)$$

ist stets $= 0$, *welche Lage man den* $p - 1$ *Punkten* $z_1, z_2, \ldots z_{p-1}$ *auf der Fläche* $\mathfrak{R}$ *auch zuertheilen mag.* Diesem Theorem kann sofort folgender Zusatz beigefügt werden:

Zusatz. — *Markirt man auf* $\mathfrak{R}$ *im Ganzen* $(p - 2)$ *feste Punkte* $c_1, c_2, \ldots c_{p-2}$ *von ganz willkürlicher Lage, und setzt man*

$$(23.) \qquad G_\sigma = -\left[w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \ldots + w_\sigma(c_{p-2})\right],$$

so wird die mit diesen Constanten $G_1, G_2, \ldots G_p$ *behaftete Function*

$$F(z) = \vartheta\left(w_\sigma(z) - G_\sigma\right)$$

identisch verschwinden, nämlich $= 0$ *sein, welche Lage man dem Punkte* z *auf der Fläche* $\mathfrak{R}$ *auch zuertheilen mag.* Hiermit aber ist die zu Anfang des fünften Paragraphs [pg. 333] ausgesprochene Behauptung als richtig constatirt.

Ferner gewährt das Theorem (22.) die Mittel zur Vervollständigung des früheren Theorems pg. 333, wie sogleich gezeigt werden soll.

Es seien $G_1, G_2, \dots G_p$ gegebene Constanten von solcher Beschaffenheit, dass die Function

$$F(z) = \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - G_\sigma) \tag{A.}$$

nicht identisch verschwindet. Die Function $F(z)$ besitzt alsdann, zufolge des Theorems pg. 333, p elementare Nullpunkte $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_p$; und diese genügen den Formeln:

$$G_\sigma \equiv \mathrm{w}_\sigma(\eta_1) + \mathrm{w}_\sigma(\eta_2) \dots + \mathrm{w}_\sigma(\eta_p). \tag{B.}$$

Leicht lässt sich nun zeigen, dass ausser diesen Nullpunkten $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_p$ *kein weiteres* die Formeln (B.) befriedigendes Punktsystem $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \dots \mathsf{H}_p$ existiren kann. Denn existirte ein solches, fänden also die Formeln statt:

$$G_\sigma \equiv \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{H}_1) + \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{H}_2) \dots + \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{H}_p),$$

so würde die Function $F(z)$, falls man diese Werthe der G_σ substituirt, die Gestalt annehmen [vgl. (33.) pg. 331]:

$$F(z) = \mathsf{E} \cdot \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - [\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{H}_1) + \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{H}_2) \dots + \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{H}_p)]),$$

wo E einen endlichen und nicht verschwindenden Factor vorstellt. Zufolge des Theorems (22.) müsste daher $F(z)$ z. B. verschwinden für $z = \mathsf{H}_1$, ebenso für $z = \mathsf{H}_2$, u. s. f. Dies aber widerspricht der von uns in (A.) gemachten Voraussetzung, dass $F(z)$ *nicht* identisch verschwinden solle. Denn zufolge dieser Voraussetzung kann $F(z)$, ausser den p Nullpunkten $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_p$, keine weiteren Nullpunkte besitzen [Theorem pg. 333]. Wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

Theorem. — *Sind die Constanten $G_1, G_2, \dots G_p$ von solcher Beschaffenheit, dass die Function*

$$F(z) = \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - G_\sigma) \tag{24.}$$

nicht identisch verschwindet, so existirt stets ein, und immer nur ein einziges den Bedingungen

$$G_\sigma \equiv \mathrm{w}_\sigma(\eta_1) + \mathrm{w}_\sigma(\eta_2) \dots + \mathrm{w}_\sigma(\eta_p)$$

entsprechendes Punktsystem $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_p$.

Dieses so bestimmte Punktsystem repräsentirt die p Nullpunkte der Function $F(z)$.

Die im achten Paragraph erhaltenen Resultate lassen sich mittelst der Theoreme (22.) und (24.) wesentlich erweitern und vervollständigen. So z. B. ergiebt sich der

Satz. — *Entsprechen irgend welche Constanten* $A_1, A_2, \ldots A_p$ *der Bedingung:*

$$\vartheta(A_\sigma) = 0, \tag{25.}$$

so sind dieselben stets in der Form darstellbar:

$$A_\sigma = \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(c_{p-1}), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p, \tag{26.}$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_{p-1}$ *passend zu wählende Punkte repräsentiren. Und versteht man, umgekehrt, unter* $A_1, A_2, \ldots A_p$ *irgend welche Grössen, die der Darstellung* (26.) *fähig sind, so werden dieselben stets der Bedingung* (25.) *Genüge leisten.* In der That ist der erste Theil dieses Satzes nur eine Wiederholung des zweiten Satzes pg. 343; während der zweite Theil direct aus dem Theorem (22.) sich ergiebt.

Setzt man ferner

$$A_\sigma = \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(c_{p-1}), \tag{α.}$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_{p-1}$ *willkürlich gewählte* Punkte vorstellen, so ist nach dem Theorem (22.): $\vartheta(A_\sigma) = 0$, mithin:

$$\vartheta(-A_\sigma) \text{ ebenfalls } = 0.$$

Hieraus aber folgt, mittelst des Satzes (25.), (26.), dass die Constanten $(-A_1), (-A_2), \ldots (-A_p)$ in die Form versetzbar sind:

$$-A_\sigma = \mathrm{w}_\sigma(d_1) + \mathrm{w}_\sigma(d_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(d_{p-1}), \tag{β.}$$

wo $d_1, d_2, \ldots d_{p-1}$ passend zu wählende Punkte vorstellen; so dass man also schliesslich durch Addition der Formeln (α.), (β.) zu folgendem Resultat gelangt:

Satz. — *Sind* $(p-1)$ *Punkte* $c_1, c_2, \ldots c_{p-1}$ *beliebig gegeben, so werden stets* $(p-1)$ *andere Punkte* $d_1, d_2, \ldots d_{p-1}$ *existiren, die zu jenen in der Beziehung stehen:*

$$[\mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(c_{p-1})] + [\mathrm{w}_\sigma(d_1) + \mathrm{w}_\sigma(d_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(d_{p-1})] = 0, \quad \sigma = 1, 2, \ldots p. \tag{27.}$$

Es sei ferner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ irgend ein Niveaupunktsystem einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function p^{ter} Ordnung $f(z)$, und β_1 ein auf $\mathfrak{R}$ *willkürlich* markirter Punkt. Alsdann werden stets $(p-1)$ andere Punkte $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$ existiren, welche mit β_1 zusammengenommen ein zweites Niveaupunktsystem von $f(z)$ repräsentiren; so dass also [zufolge des Theorems (A.) pg. 277] die Relationen stattfinden:

$$\sum_{j=1}^{j=p} [\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - \mathrm{w}_\sigma(\alpha_j)] = 0,$$

d. i. die Relationen:

$$\mathrm{w}_\sigma(\beta_1) - \sum_{j=1}^{j=p}{}' \mathrm{w}_\sigma(\alpha_j) = -[\mathrm{w}_\sigma(\beta_2) + \mathrm{w}_\sigma(\beta_3) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\beta_p)],$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots p.$$

Hieraus aber folgt mittelst des Theorems (22.) sofort:

$$\vartheta\left(\mathrm{w}_\sigma(\beta_1) - \sum_{j=1}^{j=p}{}' \mathrm{w}_\sigma(\alpha_j)\right) = 0.$$

Beachtet man also, dass β_1 *willkürlich* markirt wurde, so gelangt man zu folgendem

Satz. — *Repräsentiren $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ irgend ein Niveaupunktsystem einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function p^{ter} Ordnung, so wird die Function*

$$F(z) = \vartheta\,(\mathrm{w}_\sigma(z) - [\mathrm{w}_\sigma(\alpha_1) + \mathrm{w}_\sigma(\alpha_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\alpha_p)]) \tag{28.}$$

identisch verschwinden, nämlich Null sein für jedwede Lage des Punktes z.

In analoger Weise ergiebt sich, wie leicht zu übersehen, für die Functionen $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ein analoger Satz, nämlich folgender

Satz. — *Repräsentiren $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-1}$ ein Niveaupunktsystem einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, so wird die Function*

$$F(z, \zeta) = \vartheta\,(\mathrm{w}_\sigma(z) - \mathrm{w}_\sigma(\zeta) - [\mathrm{w}_\sigma(\alpha_1) + \mathrm{w}_\sigma(\alpha_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\alpha_{p-1})]) \tag{29.}$$

identisch verschwinden, nämlich Null sein für jedwede Lage der beiden Punkte z und ζ.

Desgleichen ergiebt sich für reguläre Functionen $(p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung folgender

Satz. — *Repräsentiren $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-2}$ ein Niveaupunktsystem einer auf $\mathfrak{R}$ regulären Function $(p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, so wird die Function*

$$F(z, \zeta, \zeta_1) = \vartheta\begin{pmatrix} \mathrm{w}_\sigma(z) - \mathrm{w}_\sigma(\zeta) - \mathrm{w}_\sigma(\zeta_1) \\ -[\mathrm{w}_\sigma(\alpha_1) + \mathrm{w}_\sigma(\alpha_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\alpha_{p-2})] \end{pmatrix} \tag{30.}$$

identisch verschwinden, nämlich Null sein für jedwede Lage der Punkte z, ζ und ζ_1.

U. s. w. U. s. w.

§ 10.

Vorläufige Bemerkungen über das Jacobi'sche Umkehrproblem.

Auf der Fläche $\mathfrak{R}$ mögen p *feste Punkte* $c_1, c_2, \ldots c_p$ und p *bewegliche Punkte* $z_1, z_2, \ldots z_p$ gedacht werden. Diese letzteren

mögen mit den *complexen Variablen* $U_1, U_2, \ldots U_p$ verbunden sein durch die Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{aligned} &\int_{c_1}^{z_1} d\mathrm{w}_1 + \int_{c_2}^{z_2} d\mathrm{w}_1 \ldots + \int_{c_p}^{z_p} d\mathrm{w}_1 = U_1, \\ &\int_{c_1}^{z_1} d\mathrm{w}_2 + \int_{c_2}^{z_2} d\mathrm{w}_2 \ldots + \int_{c_p}^{z_p} d\mathrm{w}_2 = U_2, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\int_{c_1}^{z_1} d\mathrm{w}_p + \int_{c_2}^{z_2} d\mathrm{w}_p \ldots + \int_{c_p}^{z_p} d\mathrm{w}_p = U_p; \end{aligned}$$

und zwar sollen in diesen Formeln je p *übereinanderstehende* Integrale *ein und dieselbe* Integrationscurve besitzen; so dass also im Ganzen nur p Integrationscurven sich vorfinden, die erste auf *beliebigem* Wege gehend von c_1 nach z_1, ebenso die zweite von c_2 nach z_2, u. s. f., endlich die letzte von c_p nach z_p. Diese p Curven sind, was ihren Verlauf auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ betrifft, *völlig willkürlich* und *von einander unabhängig* zu denken.

(2.) *Es sollen nun, wenn $c_1, c_2, \ldots c_p$ gegeben sind, die variablen Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ als Functionen der variablen Grössen $U_1, U_2, \ldots U_p$ dargestellt werden. So lautet das Jacobi'sche Umkehrproblem.*

Man kann übrigens dieses Problem, seiner äusseren Form nach, mehrfach ändern, so z. B. dadurch, dass man statt der Integrale die eindeutigen w's einführt. Für die Integrale der h^{ten} Vertikalreihe gelten, in dieser Beziehung, die Formeln:

$$(3.)\quad \begin{aligned} &\int_{c_h}^{z_h} d\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_1(z_h) - \mathrm{w}_1(c_h) + M_1^{(h)}\pi i + N_1^{(h)} b_{11} + N_2^{(h)} b_{21} \ldots + N_p^{(h)} b_{p1}, \\ &\int_{c_h}^{z_h} d\mathrm{w}_2 = \mathrm{w}_2(z_h) - \mathrm{w}_2(c_h) + M_2^{(h)}\pi i + N_1^{(h)} b_{12} + N_2^{(h)} b_{22} \ldots + N_p^{(h)} b_{p2}, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\int_{c_h}^{z_h} d\mathrm{w}_p = \mathrm{w}_p(z_h) - \mathrm{w}_p(c_h) + M_p^{(h)}\pi i + N_1^{(h)} b_{1p} + N_2^{(h)} b_{2p} \ldots + N_p^{(h)} b_{pp}, \end{aligned}$$

wo die $M^{(h)}$, $N^{(h)}$ unbekannte ganze Zahlen sind, deren Werthe von dem Verlauf der Integrationscurve $c_h \ldots z_h$ abhängen. [Vgl. (Y.), (Y$_1$.) pg. 293].

Substituirt man nun die Ausdrücke (3.) in die Formeln (1.) des Jacobi'schen Problems, und bedient man sich dabei zur Abkürzung des Zeichens $\equiv$ [vgl. (30.) pg. 330], so erhält man:

$$
(4.)\quad
\begin{aligned}
&\mathrm{w}_1(z_1) + \mathrm{w}_1(z_2) \ldots + \mathrm{w}_1(z_p) \equiv [\mathrm{w}_1(c_1) + \mathrm{w}_1(c_2) \ldots + \mathrm{w}_1(c_p)] + U_1, \\
&\mathrm{w}_2(z_1) + \mathrm{w}_2(z_2) \ldots + \mathrm{w}_2(z_p) \equiv [\mathrm{w}_2(c_1) + \mathrm{w}_2(c_2) \ldots + \mathrm{w}_2(c_p)] + U_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\mathrm{w}_p(z_1) + \mathrm{w}_p(z_2) \ldots + \mathrm{w}_p(z_p) \equiv [\mathrm{w}_p(c_1) + \mathrm{w}_p(c_2) \ldots + \mathrm{w}_p(c_p)] + U_p.
\end{aligned}
$$

Das Jacobi'sche Umkehrproblem besteht also darin, die diesen Formeln (4.) *entsprechenden Punkte* $z_1, z_2, \ldots z_p$ *zu ermitteln, falls die* **rechten** *Seiten der Formeln* [nämlich $c_1, c_2, \ldots c_p$ und $U_1, U_2, \ldots U_p$] ***gegeben*** *sind.*

Bezeichnet man daher diese gegebenen rechten Seiten kurzweg mit $V_1, V_2, \ldots V_p$, so kann man das Problem einfacher so aussprechen:

Es sollen, falls p *Grössen* $V_1, V_2, \ldots V_p$ *in beliebiger Weise gegeben sind, auf der Fläche* $\mathfrak{R}$ p *Punkte* $z_1, z_2, \ldots z_p$ *ermittelt werden, die den Formeln entsprechen:*

$$
(5.)\quad
\begin{aligned}
&\mathrm{w}_1(z_1) + \mathrm{w}_1(z_2) \ldots + \mathrm{w}_1(z_p) \equiv V_1, \\
&\mathrm{w}_2(z_1) + \mathrm{w}_2(z_2) \ldots + \mathrm{w}_2(z_p) \equiv V_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\mathrm{w}_p(z_1) + \mathrm{w}_p(z_2) \ldots + \mathrm{w}_p(z_p) \equiv V_p.
\end{aligned}
$$

Dass ein diesen Anforderungen entsprechendes Punktsystem $z_1, z_2, \ldots z_p$ stets existirt, folgt unmittelbar aus dem dritten und vierten Satz pg. 344. Zugleich ergiebt sich dabei, dass je nach den *augenblicklichen* Werthen von $V_1, V_2, \ldots V_p$ *zwei Fälle* zu unterscheiden sind. Denken wir uns nämlich (des bequemeren Ausdruckes willen) die augenblicklichen Werthe der Variablen $V_1, V_2, \ldots V_p$ *fixirt*, die Variablen also in ein System von *Constanten* verwandelt, so werden diese *Constanten* $V_1, V_2, \ldots V_p$

entweder von solcher Beschaffenheit sein, dass die Function

$$F(z) = \vartheta\,(\mathrm{w}_\sigma(z) - V_\sigma)$$

identisch verschwindet, für jedwedes z. Alsdann existiren nach dem vierten Satz pg. 344 *unendlich viele* den Formeln (5.) entsprechende Punktsysteme $z_1, z_2, \ldots z_p$, der Art, dass man *einen* dieser Punkte *willkürlich* wählen darf.

Oder aber: Jene Constanten $V_1, V_2, \ldots V_p$ sind von solcher Beschaffenheit, dass die Function $F(z)$ *nicht* identisch verschwindet.

Alsdann existirt nach dem Theorem pg. 348 nur *ein einziges* den Formeln (5.) entsprechendes Punktsystem $z_1, z_2, \ldots z_p$. Auch wird dieses eine System alsdann, zufolge des genannten Theorems, nichts anderes sein, als das Nullpunktsystem der Function $F(z)$.

Dieser zweite Fall ist offenbar der *im Allgemeinen* stattfindende, und der erste nur ein Ausnahmefall. Demgemäss kann man sagen:

(6.) *Das Jacobi'sche Umkehrproblem besteht im Allgemeinen in der Auffindung der p elementaren Nullpunkte der mit p gegebenen Constanten* $V_1, V_2, \ldots V_p$ *behafteten Function* $\vartheta(w_\alpha(z) - V_\alpha)$.

Vierzehntes Capitel.

Die Umkehrung der hyperelliptischen Integrale erster Gattung.

Will man die allgemeine Riemann'sche Theorie auf das Umkehrproblem der *hyperelliptischen* Integrale anwenden, so handelt es sich dabei im Wesentlichen nur um die wirkliche Berechnung der in den betreffenden Normalintegralen vorhandenen additiven Constanten. Diese sind im Sinne der Riemann'schen Theorie zu fixiren, also der Art zu bestimmen, dass die betreffenden K's [vgl. den Satz pg. 329] *verschwinden.*

Eine derartige Bestimmung der in Rede stehenden additiven Constanten wurde bereits im Jahre 1863 von mir ausgeführt*), mittelst einer Methode, die in der *ersten* Auflage dieses Werkes von Neuem und mehr *in extenso* dargelegt ist. Auch in der gegenwärtigen *zweiten* Auflage werde ich an der dort gegebenen Methode festhalten, dieselbe aber *wesentlich vereinfachen***).

§ 1.

Die hyperelliptischen Integrale erster Gattung. Die betreffenden Normalintegrale.

Es sei:

(1.) $f(z) = (z-g_1)(z-h_1)(z-g_2)(z-h_2)\ldots(z-g_{p+1})(z-h_{p+1})$,

wo die g, h beliebig gegebene *complexe* Constanten vorstellen, die jedoch alle von einander *verschieden* sein sollen; ferner sei:

(2.) $$s = \sqrt{f(z)}.$$

Diese letztere Function ist alsdann [Satz (13.) pg. 83] *eindeutig* ausbreitbar auf einer *zweiblättrigen* Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$, die $(2p+2)$ Windungspunkte g_1, h_1, g_2, h_2, $\ldots$ g_{p+1}, h_{p+1} und

*) *Neumann: Die Umkehrung der Abel'schen Integrale*, Halle, im Verlag der Buchhandlung des Waisenhauses. 1863.

**) Man findet die definitive Bestimmung jener additiven Constanten in (40.) pg. 567. Dieselben sind dort mit $l^{(0)}$ bezeichnet.

$(p+1)$ Uebergangslinien $g_1 h_1, g_2 h_2, \ldots g_{p+1} h_{p+1}$ besitzt. Auch ist sie auf dieser Fläche $\mathfrak{R}$ überall stetig, bis auf zwei bei $z=\infty$ liegende Pole. Sie ist also eine auf $\mathfrak{R}$ *reguläre* Function. [Vgl. die Definition pg. 117.] Ueberdies besitzt sie in je zwei übereinan-
(3.) derliegenden Punkten der Fläche $\mathfrak{R}$ *entgegengesetzte* Werthe [vgl. pg. 80—84].

Bemerkung. — Sind N und $\dot{N}$ die Grundzahlen der Fläche $\mathfrak{R}$ und der zugehörigen punktirten Fläche $\dot{\mathfrak{R}}$, so ist nach pg. 181 und 186:

$$\dot{N} = 2p + 1 \quad \text{und} \quad N = 2p.$$

Demgemäss ist [vgl. pg. 186] $\dot{\mathfrak{R}}$ $(2p+1)$-*fach* und $\mathfrak{R}$ selber $2p$-*fach zusammenhängend*. — Die Fläche $\mathfrak{R}$ kann durch gewisse Schnitte $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$, von denen die (dem Fall $p=3$ entsprechende) Figur pg. 179 eine deutliche Vorstellung giebt, in eine *einfach zusammenhängende* Fläche verwandelt werden. Hinsichtlich jener Schnitte mögen die Bezeichnungen $\mathfrak{R}_a$, $\mathfrak{R}_b$, $\mathfrak{R}_{ab}$, $\mathfrak{R}_{abc}$ die früher festgesetzten Bedeutungen haben [vgl. die Bemerkung pg. 185].

Da nun s eine auf $\mathfrak{R}$ *reguläre* Function vorstellt, so wird [Satz pg. 113] jeder Ausdruck von der Form

$$\varphi = \text{Ratf.}\,(s, z) \tag{4.}$$

wiederum eine auf $\mathfrak{R}$ *reguläre* Function sein. Alle Integrale von der Form

$$\int \varphi\, dz = \int \text{Ratf.}\,(s, z) \cdot dz \tag{5.}$$

sind daher *Abel*'sche Integrale [vgl. die Definition pg. 198]. Und insbesondere sind die Integrale von der Form:

$$\int \frac{z^{q-1}\,dz}{s}, \quad q = 1, 2, 3, \ldots p, \tag{6.}$$

als Abel'sche Integrale *erster Gattung* zu bezeichnen [vgl. (ξ.) pg. 209].

Definirt man also $W_q(z)$ mittelst der Formel:

$$W_q(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{z^{q-1}\,dz}{s}, \quad [\mathfrak{R}_{ab}], \quad q = 1, 2, 3, \ldots p, \tag{7.}$$

so wird diese Function $W_q(z)$ [zufolge des Theorems pg. 217] auf der Fläche $\mathfrak{R}$, mit Ausnahme der Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$), *eindeutig und stetig*, in diesen Curven aber mit *constanten Differenzen* behaftet sein. Die in solcher Weise definirten Functionen

$$W_1(z), \; W_2(z), \; \ldots \; W_p(z) \tag{8.}$$

sind, wie man leicht übersieht, *linear unabhängig*, nämlich der Art, dass zwischen ihnen keine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten möglich ist.

Existirte nämlich eine solche lineare Relation, fände also die für z identische Gleichung statt:

$$(\alpha.)\qquad C_1 W_1(z) + C_2 W_2(z) \ldots + C_p W_p(z) = C,$$

wo die C's irgend welche Constanten sind, so müsste, wie hieraus durch Differentiation und mit Rücksicht auf (7.) sich ergiebt, auch folgende identische Gleichung stattfinden:

$$(\beta.)\qquad \frac{C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + \ldots + C_p z^{p-1}}{s} = 0.$$

Hieraus aber würde folgen, dass $C_1, C_2, C_3, \ldots C_p$ sämmtlich $= 0$ sind. Und hierdurch würde die Formel (α.) *aufhören* eine Relation zwischen den W's vorzustellen.

Die Annahme der Existenz einer Relation (α.) führt also mit Nothwendigkeit zu der Folgerung, dass eine solche Relation *nicht* existirt. *Q. e. d.*

Da nun die Integrale erster Gattung $W_1(z), W_2(z), \ldots W_p(z)$ von einander linear unabhängig sind, so ist [Satz (16.) p. 245] *jedwedes* der Fläche $\mathfrak{R}$ zugehörige Integral erster Gattung $w(z)$ ausdrückbar durch die Formel:

$$(9.)\qquad w(z) = l^{(0)} + l^{(1)} W_1(z) + l^{(2)} W_2(z) \ldots + l^{(p)} W_p(z),$$

wo die l's constante Coefficienten vorstellen. Dieser Darstellung sind mithin z. B. auch die sogenannten p *Normalintegrale*

$$(10.)\qquad \mathrm{w}_1(z),\ \mathrm{w}_2(z), \ldots \mathrm{w}_p(z)$$

fähig; so dass man die Formeln erhält:

$$(11.)\qquad \mathrm{w}_\sigma(z) = l_\sigma^{(0)} + l_\sigma^{(1)} W_1(z) + l_\sigma^{(2)} W_2(z) \ldots + l_\sigma^{(p)} W_p(z),$$
$$\sigma = 1, 2, 3, \ldots p.$$

Bekanntlich sind [vgl. den Satz (20.) pg. 246] die p Normalintegrale völlig bestimmt, bis auf additive Constanten. Folglich

(11a.) sind in den Formeln (11.) die Coefficienten $l_\sigma^{(1)}, l_\sigma^{(2)}, \ldots l_\sigma^{(p)}$ *völlig bestimmt*, die $l_\sigma^{(0)}$ hingegen *willkürlich*. Ferner ist bekannt, dass die p Normalintegrale von einander linear unabhängig sind [Satz (21.) pg. 247]. Hieraus folgt sofort, dass die Determinante

$$(11b.)\qquad L = \begin{vmatrix} l_1^{(1)} & l_1^{(2)} & \ldots & l_1^{(p)} \\ l_2^{(1)} & l_2^{(2)} & \ldots & l_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p^{(1)} & l_p^{(2)} & \ldots & l_p^{(p)} \end{vmatrix}$$

von 0 verschieden ist.

Man kann übrigens die Formeln (11.) mit Rücksicht auf (7.) auch so schreiben:

$$(12.)\quad w_\sigma(z) = l_\sigma^{(0)} + \int_{z_0}^{z} (l_\sigma^{(1)} + l_\sigma^{(2)} z + l_\sigma^{(3)} z^2 \ldots + l_\sigma^{(p)} z^{p-1}) \frac{dz}{s}, \quad [\mathfrak{R}_{ab}],$$

oder mit Rücksicht auf (2.) auch so:

$$(13.)\quad w_\sigma(z) = l_\sigma^{(0)} + \int_{z_0}^{z} \frac{\psi_\sigma(z)\, dz}{\sqrt{f(z)}}, \quad [\mathfrak{R}_{ab}],$$

wo alsdann $\psi_\sigma(z)$ die Bedeutung hat:

$$(13\text{a}.)\quad \psi_\sigma(z) = l_\sigma^{(1)} + l_\sigma^{(2)} z + l_\sigma^{(3)} z^2 \ldots + l_\sigma^{(p)} z^{p-1}.$$

Aus (12.), (13.) folgt durch Differentiation nach z:

$$(14.)\quad w_\sigma'(z) = \frac{l_\sigma^{(1)} + l_\sigma^{(2)} z + l_\sigma^{(3)} z^2 \ldots + l_\sigma^{(p)} z^{p-1}}{\sqrt{f(z)}} = \frac{\psi_\sigma(z)}{\sqrt{f(z)}}.$$

Markirt man daher auf $\mathfrak{R}$ irgend welche p Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$, so erhält man für die zugehörige Determinante $D(c_1, c_2, \ldots c_p)$, pg. 253, mit Rücksichtnahme auf (11 b.) den Werth:

$$(15.)\quad D(c_1, c_2, \ldots c_p) = \frac{L}{\sqrt{f(c_1) f(c_2) \ldots f(c_p)}} \begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \ldots & c_1^{p-1} \\ 1 & c_2 & c_2^2 & \ldots & c_2^{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & c_p & c_p^2 & \ldots & c_p^{p-1} \end{vmatrix};$$

und hieraus folgt, dass diese Determinante *nur dann verschwinden* (15a.) *kann*, wenn zwei der Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ mit einander zusammenfallen, oder aber einer von ihnen ins Unendliche rückt.

Was ferner die aus den $\overline{w}_\sigma(c_1), \overline{w}_\sigma(c_2), \ldots \overline{w}_\sigma(c_p)$ zusammengesetzte Determinante $\Delta(c_1, c_2, \ldots c_p)$, pg. 280, betrifft, so ergeben sich für $\overline{w}_\sigma(c)$ verschiedene Formeln, je nachdem der betrachtete Punkt c von sämmtlichen Punkten g_j, h_j, ∞ verschieden ist, oder aber mit einem dieser Punkte coincidirt, [vgl. pg. 280]. Im *ersteren* Fall wird:

$$\overline{w}_\sigma(c) = w_\sigma'(c) = \frac{\psi_\sigma(c)}{\sqrt{f(c)}};$$

während andererseits im *letztern* Fall die betreffenden Formeln folgendermassen lauten:

$$\overline{w}_\sigma(g_j) = \frac{2\psi_\sigma(g_j)}{\sqrt{f'(g_j)}}, \quad \overline{w}_\sigma(h_j) = \frac{2\psi_\sigma(h_j)}{\sqrt{f'(h_j)}}, \quad \overline{w}_\sigma(\infty) = \pm\, l_\sigma^{(p)},$$

wo $f'(z)$ für $\frac{df(z)}{dz}$ steht. Dabei gilt in der letzten Formel das Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem man von den beiden auf $\mathfrak{R}$ bei $z = \infty$ übereinander liegenden Punkten den einen oder andern in

Betracht zieht. — Angesichts dieser Formeln erkennt man nun (16.) leicht, dass jene Determinante $\Delta(c_1, c_2, \dots c_p)$ *nur dann verschwinden kann*, wenn zwei der Punkte $c_1, c_2, \dots c_p$ miteinander zusammenfallen.

§ 2.

Die Werthe der Normalintegrale erster Gattung in den Windungspunkten.

Wir schicken unsern Betrachtungen zwei leicht zu beweisende Hülfssätze voraus.

Erster Hülfssatz. — *Sind z und Z irgend zwei im obern und* (17.) *untern Blatte der Fläche $\mathfrak{R}$ übereinanderliegende Punkte, so gelten für die Normalintegrale $w_1(z), w_2(z), \dots w_p(z)$ die Formeln:*

$$w_\sigma'(z) + w_\sigma'(Z) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots p.$$

Zweiter Hülfssatz. — *Construirt man in der Fläche $\mathfrak{R}$ einen beide Blätter durchdringenden, dabei aber die Ströme $a_\varkappa, b_\varkappa, (\varkappa = 1,$* (18.) *$2, \dots p)$ vermeidenden Schnitt, und bezeichnet man die am Anfang und Ende dieses Schnitts übereinanderliegenden Punkte respective mit z_1, Z_1 und z_2, Z_2, so gelten die Formeln:*

$$w_\sigma(z_1) + w_\sigma(Z_1) = w_\sigma(z_2) + w_\sigma(Z_2), \quad \sigma = 1, 2, \dots p.$$

Beweis des ersten Satzes. — Aus (12.) folgt durch Differentiation nach z sofort:

$$w_\sigma'(z) = [l_\sigma^{(1)} + l_\sigma^{(2)} z + l_\sigma^{(3)} z^2 \dots + l_\sigma^{(p)} z^{p-1}] \frac{1}{s}.$$

Die Function s hat aber [vgl. (3.)] in je zwei übereinanderliegenden Punkten z, Z *entgegengesetzte* Werthe, während der in der eckigen Klammer enthaltene Ausdruck in beiden Punkten *gleiche* Werthe besitzt. *Q. e. d.*

Beweis des zweiten Satzes. — Der im zweiten Satz angegebene Schnitt liefert zwei in den beiden Blättern übereinanderliegende und die Ströme $a_\varkappa, b_\varkappa (\varkappa = 1, 2, \dots p)$ *vermeidende* Curven c, C, von denen die eine die Punkte z_1 und z_2, die andre die Punkte Z_1 und Z_2 verbindet. Da nun $w_\sigma(z)$ auf der Fläche $\mathfrak{R}$, mit Ausnahme der Ströme $a_\varkappa, b_\varkappa (\varkappa = 1, 2, \dots p)$, überall *eindeutig und stetig* ist, diese Eigenschaften also z. B. auch längs c, und ebenso längs C besitzt, so ist:

$$(\alpha.)\quad \begin{aligned} w_\sigma(z_2) - w_\sigma(z_1) &= \int_{z_1}^{z_2} d\,w_\sigma(z) = \int_{z_1}^{z_2} w_\sigma'(z)\,dz, \\ w_\sigma(Z_2) - w_\sigma(Z_1) &= \int_{Z_1}^{Z_2} d\,w_\sigma(Z) = \int_{Z_1}^{Z_2} w_\sigma'(Z)\,dZ; \end{aligned}$$

dabei sind unter z, Z irgend zwei übereinanderliegende Punkte der Curven c, C zu verstehen, und die Integrationen hinerstreckt zu denken über alle Punkte z der Curve c, respective über alle Punkte Z der Curve C. Zufolge des schon bewiesenen Satzes (17) ist aber:

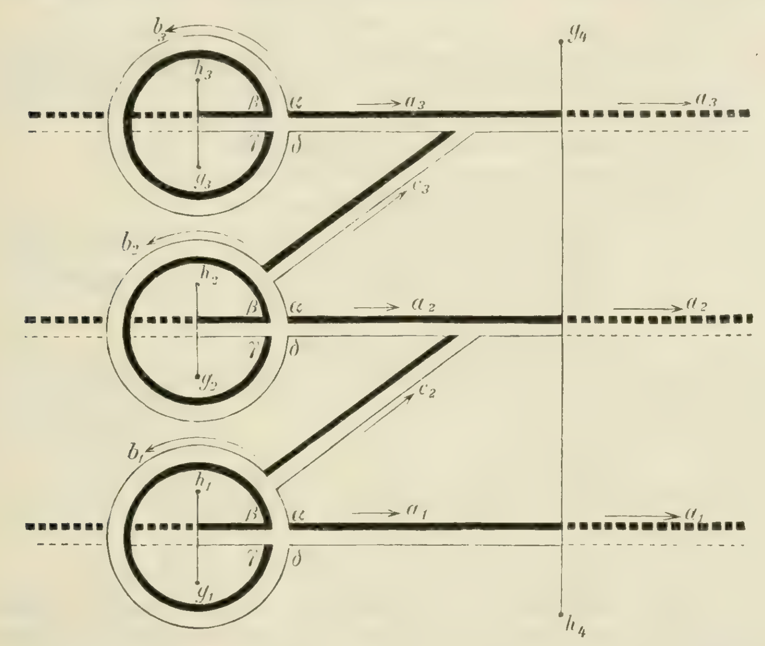
$$(\beta.) \qquad \mathrm{w}_\sigma'(z) + \mathrm{w}_\sigma'(Z) = 0.$$

Somit folgt durch Addition der beiden Formeln (α.):

$$(\gamma.) \qquad [\mathrm{w}_\sigma(z_2) - \mathrm{w}_\sigma(z_1)] + [\mathrm{w}_\sigma(Z_2) - \mathrm{w}_\sigma(Z_1)] = 0. \quad - \quad Q.\ e.\ d.$$

Wir wollen diese Sätze zunächst in Anwendung bringen auf den *speciellen Fall* $p = 3$, also auf diejenige Fläche $\mathfrak{R}$, welche der schon früher [pg. 179] entworfenen Zeichnung:

(A.)



entspricht. In dieser Fläche $\mathfrak{R}$ lässt sich, von g_1 nach h_1 hin, ein beide Blätter durchdringender Schnitt führen, der im *untern* Blatt gar keinen der Ströme $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, und im *obern* Blatt lediglich den Strom a_1, und zwar von ϱ nach λ, d. h. vom rechten zum linken Ufer überschreitet. Dieser Schnitt $g_1 h_1$ ist in der nächstfolgenden Zeichnung durch die krumme Linie $g_1 \varrho \lambda h_1$ angedeutet. Die beiden Punkte λ und ϱ sind also durch *den Strom* a_1 von einander getrennt, während die darunter liegenden Punkte Λ und P *überhaupt nicht* von einander getrennt sind, weder durch den Strom a_1, noch durch irgend einen andern der Ströme $a_\varkappa$, $b_\varkappa$. Demgemäss ist also:

$$(\mathrm{B}.) \qquad \begin{cases} \qquad \mathrm{w}_\sigma(\lambda) - \mathrm{w}_\sigma(\varrho) = a_{\sigma 1}, \\ \text{hingegen:} \quad \mathrm{w}_\sigma(\Lambda) = \mathrm{w}_\sigma(\mathrm{P}), \end{cases}$$

wo $a_{\sigma 1}$ die in (19.) pg. 246 festgesetzte Bedeutung hat. Bringt man nun den Satz (18.) auf die Schnittstrecke $g_1\varrho$ in Anwendung, so erhält man:

$$w_\sigma(g_1) + w_\sigma(G_1) = w_\sigma(\varrho) + w_\sigma(\mathsf{P}),$$

oder, weil g_1 ein Windungspunkt ist, mithin g_1 und G_1 *ein und denselben* Punkt repräsentiren:

(C.) $$2\,w_\sigma(g_1) = w_\sigma(\varrho) + w_\sigma(\mathsf{P}).$$

In gleicher Weise liefert der Satz (18.) in seiner Anwendung auf die Schnittstrecke λh_1 die Formel:

(D.) $$w_\sigma(\lambda) + w_\sigma(\Lambda) = 2\,w_\sigma(h_1).$$

Addirt man aber diese beiden Formeln (C.), (D.), so folgt mit Rücksicht auf (B.):

(E.) $$2\,[w_\sigma(h_1) - w_\sigma(g_1)] = a_{\sigma 1}.$$

Nun lässt sich weiter in der Figur (A.) durch beide Blätter der Fläche hindurch ein Schnitt $h_1\lambda\varrho\varrho'\lambda' g_2$ führen, welcher im obern Blatt nur die Ströme b_1 und b_2, im untern Blatt aber gar keinen Strom überschreitet; wie solches in beistehender Zeichnung genauer angegeben ist. Der Satz (18.) liefert alsdann für die drei Schnittstrecken $(h_1\lambda)$, $(\varrho\varrho')$, $(\lambda' g_2)$ respective die Formeln:

$$2\,w_\sigma(h_1) = w_\sigma(\lambda) + w_\sigma(\Lambda),$$
$$w_\sigma(\varrho) + w_\sigma(\mathsf{P}) = w_\sigma(\varrho') + w_\sigma(\mathsf{P}'),$$
$$w_\sigma(\lambda') + w_\sigma(\Lambda') = 2\,w_\sigma(g_2).$$

Addirt man aber diese drei Formeln, und beachtet, dass $w_\sigma(\Lambda) = w_\sigma(\mathsf{P})$ und $w_\sigma(\Lambda') = w_\sigma(\mathsf{P}')$ ist, so erhält man:

$$2\,[w_\sigma(h_1) - w_\sigma(g_2)] = $$
$$= [w_\sigma(\lambda) - w_\sigma(\varrho)] - [w_\sigma(\lambda') - w_\sigma(\varrho')],$$

d. i.:

(F.) $$2\,[w_\sigma(h_1) - w_\sigma(g_2)] = b_{\sigma 1} - b_{\sigma 2},$$

wo $b_{\sigma 1}$, $b_{\sigma 2}$ die in (19.) pg. 246 festgesetzte Bedeutung haben.

In ähnlicher Weise wie die beiden Formeln (E.) und (F.) ergeben sich, auf Grund der Figur (A.), im Ganzen folgende acht Formeln, nämlich die zu (E.) analogen Formeln:

(H.) $$\begin{cases} 2\,[w_\sigma(h_1) - w_\sigma(g_1)] = a_{\sigma 1}, \\ 2\,[w_\sigma(h_2) - w_\sigma(g_2)] = a_{\sigma 2}, \\ 2\,[w_\sigma(h_3) - w_\sigma(g_3)] = a_{\sigma 3}, \\ 2\,[w_\sigma(h_4) - w_\sigma(g_4)] = -(a_{\sigma 1} + a_{\sigma 2} + a_{\sigma 3}); \end{cases}$$

und die zu (F.) analogen Formeln:

(J.) $$\begin{cases} 2\,[w_\sigma(g_2) - w_\sigma(h_1)] = b_{\sigma 2} - b_{\sigma 1}, \\ 2\,[w_\sigma(g_3) - w_\sigma(h_2)] = b_{\sigma 3} - b_{\sigma 2}, \\ 2\,[w_\sigma(g_4) - w_\sigma(h_3)] = 0 \quad - b_{\sigma 3}, \\ 2\,[w_\sigma(g_1) - w_\sigma(h_4)] = b_{\sigma 1} - 0. \end{cases}$$

Diese beiden für den Fall $p = 3$ geltenden Formelsysteme (H.), (I.) sind nun sofort auf den Fall eines *beliebigen* p übertragbar.

Für den Fall eines *ganz beliebigen* p erhält man offenbar, an Stelle von (H.), das System:

$$(19.)\quad \begin{cases} 2[\mathfrak{w}_\sigma(h_1) - \mathfrak{w}_\sigma(g_1)] = a_{\sigma 1}, \\ 2[\mathfrak{w}_\sigma(h_2) - \mathfrak{w}_\sigma(g_2)] = a_{\sigma 2}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ 2[\mathfrak{w}_\sigma(h_{p-1}) - \mathfrak{w}_\sigma(g_{p-1})] = a_{\sigma p-1}, \\ 2[\mathfrak{w}_\sigma(h_p) - \mathfrak{w}_\sigma(g_p)] = a_{\sigma p}, \\ 2[\mathfrak{w}_\sigma(h_{p+1}) - \mathfrak{w}_\sigma(g_{p+1})] = -(a_{\sigma 1} + a_{\sigma 2} + a_{\sigma 3} \ldots + a_{\sigma p}); \end{cases}$$

und andererseits, an Stelle von (I.), folgendes Formelsystem:

$$(20.)\quad \begin{cases} 2[\mathfrak{w}_\sigma(g_2) - \mathfrak{w}_\sigma(h_1)] = b_{\sigma 2} - b_{\sigma 1}, \\ 2[\mathfrak{w}_\sigma(g_3) - \mathfrak{w}_\sigma(h_2)] = b_{\sigma 3} - b_{\sigma 2}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ 2[\mathfrak{w}_\sigma(g_p) - \mathfrak{w}_\sigma(h_{p-1})] = b_{\sigma p} - b_{\sigma p-1}, \\ 2[\mathfrak{w}_\sigma(g_{p+1}) - \mathfrak{w}_\sigma(h_p)] = 0 - b_{\sigma p}, \\ 2[\mathfrak{w}_\sigma(g_1) - \mathfrak{w}_\sigma(h_{p+1})] = b_{\sigma 1} - 0. \end{cases}$$

Die Addition aller Formeln der Systeme (19.) und (20.) giebt die identische Gleichung $0 = 0$. Demgemäss repräsentiren also die $(2p + 2)$ Formeln (19.) und (20.) im Ganzen nur $(2p + 1)$ Gleichungen. Und mittelst dieser $(2p + 1)$ Gleichungen kann man nun die $(2p + 2)$ unbekannten Werthe

$$\mathfrak{w}_\sigma(g_j), \quad \mathfrak{w}_\sigma(h_j), \quad j = 1, 2, 3, \ldots (p + 1),$$

auf *einen* dieser Werthe, z. B. auf $\mathfrak{w}_\sigma(g_1)$ reduciren. Man erhält in solcher Weise*):

$$(21.)\quad \begin{cases} 2\mathfrak{w}_\sigma(g_1) = 2\mathfrak{w}_\sigma(g_1) + [b_{\sigma 1} - b_{\sigma 1}], \\ 2\mathfrak{w}_\sigma(g_2) = 2\mathfrak{w}_\sigma(g_1) + [b_{\sigma 2} - b_{\sigma 1} + a_{\sigma 1}], \\ 2\mathfrak{w}_\sigma(g_3) = 2\mathfrak{w}_\sigma(g_1) + [b_{\sigma 3} - b_{\sigma 1} + a_{\sigma 1} + a_{\sigma 2}], \\ \cdots\cdots\cdots \\ 2\mathfrak{w}_\sigma(g_p) = 2\mathfrak{w}_\sigma(g_1) + [b_{\sigma p} - b_{\sigma 1} + a_{\sigma 1} + a_{\sigma 2} \cdots + a_{\sigma p-1}], \\ 2\mathfrak{w}_\sigma(g_{p+1}) = 2\mathfrak{w}_\sigma(g_1) + [0 - b_{\sigma 1} + a_{\sigma 1} + a_{\sigma 2} \cdots + a_{\sigma p-1} + a_{\sigma p}], \end{cases}$$

*) Die *erste* der Formeln (21.) ist, wie man sieht, eine *identische*, und nur der Symmetrie willen zugefügt.

und ferner:

$$(22.)\quad \begin{cases} 2\,w_\sigma(h_1) = 2\,w_\sigma(g_1) + [b_{\sigma 1} - b_{\sigma 1} + a_{\sigma 1}], \\ 2\,w_\sigma(h_2) = 2\,w_\sigma(g_1) + [b_{\sigma 2} - b_{\sigma 1} + a_{\sigma 1} + a_{\sigma 2}], \\ 2\,w_\sigma(h_3) = 2\,w_\sigma(g_1) + [b_{\sigma 3} - b_{\sigma 1} + a_{\sigma 1} + a_{\sigma 2} + a_{\sigma 3}], \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 2\,w_\sigma(h_p) = 2\,w_\sigma(g_1) + [b_{\sigma p} - b_{\sigma 1} + a_{\sigma 1} + a_{\sigma 2} + a_{\sigma 3} \cdots + a_{\sigma p}], \\ 2\,w_\sigma(h_{p+1}) = 2\,w_\sigma(g_1) + [0 - b_{\sigma 1}]. \end{cases}$$

Beachtet man, dass $a_{\sigma\varkappa}$, je nachdem σ, $\varkappa$ gleich oder ungleich sind, den Werth $i\pi$ oder 0 besitzt [vgl. (19.) pg. 246], dass mithin die Summe

$$a_{\sigma 1} + a_{\sigma 2} + a_{\sigma 3} \cdots + a_{\sigma p}$$

jederzeit $= i\pi$ ist, so reducirt sich die letzte der Formeln (21.) auf:

$$(23.)\qquad 2\,w_\sigma(g_{p+1}) = 2\,w_\sigma(g_1) + [i\pi - b_{\sigma 1}].$$

Bildet man ferner die erste der Gleichungen (21.) für $\sigma = 1$, die zweite für $\sigma = 2$, die dritte für $\sigma = 3$ u. s. w., und beachtet man dabei wiederum die eigenthümlichen Werthe der $a_{\sigma\varkappa}$, so erhält man:

$$\begin{aligned} 2\,w_1(g_1) &= 2\,w_1(g_1) + [b_{11} - b_{11}], \\ 2\,w_2(g_2) &= 2\,w_2(g_1) + [b_{22} - b_{21}], \\ 2\,w_3(g_3) &= 2\,w_3(g_1) + [b_{33} - b_{31}], \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 2\,w_p(g_p) &= 2\,w_p(g_1) + [b_{pp} - b_{p1}]; \end{aligned}$$

demgemäss gilt also ganz allgemein für *jedwedes* σ die Formel:

$$(24.)\qquad 2\,w_\sigma(g_\sigma) = 2\,w_\sigma(g_1) + [b_{\sigma\sigma} - b_{\sigma 1}].$$

Endlich ergiebt sich durch Subtraction von (23.) und (24.):

$$(25.)\qquad 2[w_\sigma(g_\sigma) - w_\sigma(g_{p+1})] = b_{\sigma\sigma} - i\pi.$$

In allen diesen Formeln (19.), (20.), (21.), (22.), (23.), (24.), (25.) repräsentirt σ eine beliebige Zahl aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots p$.

§ 3.

Bestimmung der in den Normalintegralen enthaltenen additiven Constanten.

Die betrachteten Integrale $w_1(z)$, $w_2(z)$, ... $w_p(z)$ sind [vergl. (11a.)] völlig bestimmt bis auf die in ihnen noch enthaltenen willkührlichen additiven Constanten $l_1^{(0)}$, $l_2^{(0)}$, ... $l_p^{(0)}$. Bevor wir nun an das *Umkehrproblem* der genannten Integrale näher herantreten, erscheint es zweckmässig, zuvörderst über diese additiven Constanten

der Art zu verfügen, wie es für die Anwendung der *Thetafunctionen* geboten ist.

Versteht man unter $G_1, G_2, \ldots G_p$ *willkürlich* gegebene Constanten, so werden bekanntlich [Theorem pg. 333] die Nullpunkte $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ der Function

$$F(z) = \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - G_\sigma) \tag{26.}$$

den einfachen Formeln entsprechen:

$$\mathrm{w}_\sigma(\eta_1) + \mathrm{w}_\sigma(\eta_2) \cdots + \mathrm{w}_\sigma(\eta_p) \equiv G_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \ldots p, \tag{27.}$$

falls es nur gelingt, jene in den w's enthaltenen additiven Constanten $l_1^{(0)}, l_2^{(0)}, \ldots l_p^{(0)}$ der Art zu bestimmen, dass die Congruenzbedingungen erfüllt sind:

$$K_\sigma = \frac{\mathrm{w}_\sigma(\alpha_\sigma) + \mathrm{w}_\sigma(\beta_\sigma)}{2} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \left(\frac{b_{\sigma\varkappa}}{2} + \frac{1}{\pi i} \int_{b_\varkappa} \frac{\mathrm{w}_\sigma(\lambda) + \mathrm{w}_\sigma(\varrho)}{2}\, d\mathrm{w}_\varkappa \right) \equiv 0, \tag{28.}$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots p.$$

Dabei dienen die Buchstaben K_σ nur als *Abbreviatur* zur Bezeichnung der links vom Congruenzzeichen ($\equiv$) stehenden Ausdrücke.

Es handelt sich zuvörderst um die wirkliche Bildung der Congruenzen (28.), d. i. um die *wirkliche Berechnung der Ausdrücke* K_σ. Die in (28.) unter dem Integralzeichen stehenden λ und ϱ repräsentiren irgend zwei zu beiden Ufern des Stromes $b_\varkappa$ einander gegenüber liegende Punkte. Demgemäss ist also: $\mathrm{w}_\sigma(\lambda) - \mathrm{w}_\sigma(\varrho) = b_{\sigma\varkappa}$, oder etwas anders geschrieben:

$$\mathrm{w}_\sigma(\varrho) = \mathrm{w}_\sigma(\lambda) - b_{\sigma\varkappa}. \tag{x.}$$

Diese Formel gilt für zwei *beliebige* zu beiden Ufern von $b_\varkappa$ einander gegenüberliegende Punkte ϱ, λ, und ist also [vgl. die Figur pg. 326] z. B. auch anwendbar auf die Punkte $\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa$; wodurch sich ergiebt:

$$\mathrm{w}_\sigma(\alpha_\varkappa) = \mathrm{w}_\sigma(\beta_\varkappa) - b_{\sigma\varkappa}. \tag{y.}$$

Dabei repräsentiren $\varkappa$ und σ beliebige Zahlen aus der Reihe 1, 2, ... p. Macht man insbesondere $\varkappa = \sigma$, so folgt:

$$\mathrm{w}_\sigma(\alpha_\sigma) = \mathrm{w}_\sigma(\beta_\sigma) - b_{\sigma\sigma}. \tag{z.}$$

Schreibt man jetzt den Ausdruck K_σ von Neuem hin, indem man daselbst für $\mathrm{w}_\sigma(\varrho)$ und $\mathrm{w}_\sigma(\alpha_\sigma)$ die Werthe (x.) und (z.) eintreten lässt, so erhält man:

$$K_\sigma = \mathrm{w}_\sigma(\beta_\sigma) - \frac{b_{\sigma\sigma}}{2} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \left(\frac{b_{\sigma\varkappa}}{2} + \frac{1}{\pi i} \int_{b_\varkappa} \left[\mathrm{w}_\sigma(\lambda) - \frac{b_{\sigma\varkappa}}{2} \right] d\mathrm{w}_\varkappa \right). \tag{29.}$$

Bekanntlich ist aber [vgl. (B.) pg. 324]:

$$\int_{b_\varkappa} d\mathrm{w}_\varkappa = -\pi i.$$

Somit folgt:

$$(30.)\qquad K_0 = \mathrm{w}_0(\beta_0) - \frac{b_{00}}{2} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}\left(b_{0\varkappa} + \frac{1}{\pi i}\Delta_\varkappa\right),$$

wo $\Delta_\varkappa$ das Integral bezeichnet:

$$(31.)\qquad \Delta_\varkappa = \int_{b_\varkappa} \mathrm{w}_0(\lambda)\,d\mathrm{w}_\varkappa.$$

Dabei ist es einerlei, ob man unter dem $d\mathrm{w}_\varkappa$ das Differential $d\mathrm{w}_\varkappa(\lambda)$ oder das Differential $d\mathrm{w}_\varkappa(\varrho)$ versteht. Denn $\mathrm{w}_\varkappa(\lambda)$ und $\mathrm{w}_\varkappa(\varrho)$ unterscheiden sich längs $b_\varkappa$ nur durch eine additive Constante; so dass also jene beiden Differentiale *gleichwerthig* sind. Zur Fixirung der Vorstellung mag gesetzt werden:

$$(32.)\qquad \Delta_\varkappa = \int_{b_\varkappa} \mathrm{w}_0(\lambda)\,d\mathrm{w}_\varkappa(\lambda).$$

Um nun dieses $\Delta_\varkappa$ zu berechnen, markiren wir innerhalb der *einfach zusammenhängenden* Fläche $\mathfrak{R}_{abc}$ einen beliebigen Punkt z_0, und verstehen unter $f(z)$ das von z_0 ausgehende und in seiner Bewegung auf $\mathfrak{R}_{abc}$ beschränkte Integral

$$(\mathrm{A.})\qquad f(z) = \int_{z_0}^{z} \mathrm{w}_0(z)\,d\mathrm{w}_\varkappa(z), \qquad [\mathfrak{R}_{abc}].$$

Die so definirte Function $f(z)$ ist alsdann [Satz (8.) pg. 197] innerhalb $\mathfrak{R}_{abc}$ überall *eindeutig und stetig*.

Wir wollen jetzt die Werthe dieser Function $f(z)$ in den Punkten $g_\varkappa$, $h_\varkappa$, $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$, $\gamma_\varkappa$, $\delta_\varkappa$ betrachten, dabei aber zur augenblicklichen Abkürzung diese Punkte schlechtweg mit g, h, α, β, γ, δ bezeichnen [vgl. die folgende Figur]. Das Integral $\Delta_\varkappa$ (32.) läuft längs des linken Ufers des Stromes $b_\varkappa$ von β nach γ, besitzt also eine von β nach γ gehende und dabei innerhalb $\mathfrak{R}_{abc}$ [oder vielmehr am Rande von $\mathfrak{R}_{abc}$] fortlaufende Integrationscurve. Demgemäss ist

$$(\mathrm{B.})\qquad \Delta_\varkappa = f(\gamma) - f(\beta),$$

d. i. gleich der Differenz derjenigen Werthe, welche die Function $f(z)$ in γ und β besitzt.

Die Punkte α, β, γ, δ liegen im *obern* Blatt der Fläche $\mathfrak{R}$. Bezeichnet man die darunter liegenden Punkte des *untern* Blattes respective mit A, B, Γ, Δ, so lässt sich offenbar ein beide Blätter der Fläche durchdringender und die Ströme a_1, a_2, ... a_p, b_1, b_2, ... b_p, c_2, c_3, ... c_p vermeidender Schnitt ausführen, welcher ausgeht

von h und endigt in β, B. Dieser [in beistehender Figur angegebene] Schnitt liefert zwei in beiden Blättern übereinander liegende Curven, deren übereinander liegende Punkte mit z, Z bezeichnet sein mögen. Alsdann ist, was die Function $f(z)$, (A.), betrifft:

(C.)
$$f(\beta) - f(h) = \int_h^\beta \mathrm{w}_\sigma(z)\, d\,\mathrm{w}_\varkappa(z),$$
$$f(\mathsf{B}) - f(h) = \int_h^{\mathsf{B}} \mathrm{w}_\sigma(Z)\, d\,\mathrm{w}_\varkappa(Z),$$

die Integrationen erstreckt über alle Punkte z der *obern* Curve $h \ldots \beta$, respective über alle Punkte Z der *untern* Curve $h \ldots$ B. Zufolge des Satzes (18.) gelten aber die Relationen:

$$\mathrm{w}_\sigma(z) + \mathrm{w}_\sigma(Z) = 2\,\mathrm{w}_\sigma(h),$$
$$\mathrm{w}_\varkappa(z) + \mathrm{w}_\varkappa(Z) = 2\,\mathrm{w}_\varkappa(h).$$

Mit Hülfe dieser Relationen kann man in (C.) den Punkt Z eliminiren, und erhält alsdann:

(D.)
$$f(\beta) - f(h) = \int_h^\beta \mathrm{w}_\sigma(z)\, d\,\mathrm{w}_\varkappa(z),$$
$$f(\mathsf{B}) - f(h) = \int_h^\beta [\mathrm{w}_\sigma(z) - 2\,\mathrm{w}_\sigma(h)]\, d\,\mathrm{w}_\varkappa(z),$$

und hieraus durch Subtraction:

(E.)
$$f(\beta) - f(\mathsf{B}) = 2\,\mathrm{w}_\sigma(h) \int_h^\beta d\,\mathrm{w}_\varkappa(z),$$

oder, was dasselbe ist:

(F.)
$$f(\beta) - f(\mathsf{B}) = -2\,\mathrm{w}_\sigma(h)[\mathrm{w}_\varkappa(h) - \mathrm{w}_\varkappa(\beta)].$$

Ebenso wie diese Formel (F.) erhalten wurde mittelst eines von h nach β laufenden Schnittes, in ganz ähnlicher Weise wird man offenbar, durch Anwendung eines von g nach γ laufenden Schnittes [vgl. die Figur], folgende Formel finden:

(G.)
$$f(\gamma) - f(\Gamma) = -2\,\mathrm{w}_\sigma(g)[\mathrm{w}_\varkappa(g) - \mathrm{w}_\varkappa(\gamma)].$$

Nun ist die Function $f(z)$, wie schon bemerkt, innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}_{abc}$ überall *eindeutig und stetig*, mithin $f(\mathsf{B}) = f(\Gamma)$. Subtrahirt

man also die beiden Formeln (F.) und (G.) von einander, so folgt mit Rücksicht auf (B.):

$$\text{(H.)} \qquad \Delta_\varkappa = 2\,\mathrm{w}_\sigma(h)[\mathrm{w}_\varkappa(h) - \mathrm{w}_\varkappa(\beta)] - 2\,\mathrm{w}_\sigma(g)[\mathrm{w}_\varkappa(g) - \mathrm{w}_\varkappa(\gamma)].$$

Zu berechnen sind die in (30.) enthaltenen Grössen Δ_1, Δ_2, $\ldots \Delta_p$. Es ist also in (H.) unter $\varkappa$ eine der Zahlen $1, 2, \ldots p$ zu verstehen. Für $\varkappa = 1, 2, \ldots p$ ist aber nach (19.):

$$2\,\mathrm{w}_\sigma(h_\varkappa) - 2\,\mathrm{w}_\sigma(g_\varkappa) = a_{\sigma\varkappa},$$

mithin z. B. auch:

$$2\,\mathrm{w}_\varkappa(h_\varkappa) - 2\,\mathrm{w}_\varkappa(g_\varkappa) = a_{\varkappa\varkappa} = \pi i.$$

Diese beiden Relationen aber können, weil wir die Punkte $g_\varkappa$, $h_\varkappa$, $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$, $\gamma_\varkappa$, $\delta_\varkappa$ kurzweg mit g, h, α, β, γ, δ bezeichnet haben, auch so geschrieben werden:

$$(\xi.) \qquad \begin{aligned} 2\,\mathrm{w}_\sigma(h) &= 2\,\mathrm{w}_\sigma(g) + a_{\sigma\varkappa}, \\ 2\,\mathrm{w}_\varkappa(h) &= 2\,\mathrm{w}_\varkappa(g) + \pi i. \end{aligned}$$

Ueberdies ist, was die zu beiden Ufern des Stromes $a_\varkappa$ einander gegenüberliegenden Punkte β, γ betrifft [vgl. die vorhergehende Figur] offenbar:

$$(\eta.) \qquad \mathrm{w}_\varkappa(\gamma) = \mathrm{w}_\varkappa(\beta) - \pi i.$$

Eliminirt man nun mittelst der Relationen (ξ.), (η.) die Punkte h und γ aus dem Ausdruck (H.), so erhält man:

$$\text{(J.)} \qquad \Delta_\varkappa = \left\{ \begin{aligned} &[2\,\mathrm{w}_\sigma(g) + a_{\sigma\varkappa}][\mathrm{w}_\varkappa(g) - \mathrm{w}_\varkappa(\beta) + \tfrac{1}{2}\pi i] \\ &\quad - 2\,\mathrm{w}_\sigma(g)[\mathrm{w}_\varkappa(g) - \mathrm{w}_\varkappa(\beta) + \pi i] \end{aligned} \right\},$$

oder, was dasselbe ist:

$$\text{(K.)} \qquad \Delta_\varkappa = a_{\sigma\varkappa}[\mathrm{w}_\varkappa(g) - \mathrm{w}_\varkappa(\beta) + \tfrac{1}{2}\pi i] - \pi i\,\mathrm{w}_\sigma(g),$$

oder, falls man jetzt statt g und β die genaueren Bezeichnungen $g_\varkappa$ und $\beta_\varkappa$ eintreten lässt:

$$\text{(L.)} \qquad \Delta_\varkappa = a_{\sigma\varkappa}[\mathrm{w}_\varkappa(g_\varkappa) - \mathrm{w}_\varkappa(\beta_\varkappa) + \tfrac{1}{2}\pi i] - \pi i\,\mathrm{w}_\sigma(g_\varkappa).$$

Hieraus folgt, falls man nach $\varkappa$ summirt, und dabei beachtet, dass $a_{\sigma\varkappa}$, je nachdem σ, $\varkappa$ gleich oder ungleich sind, den Werth πi oder 0 hat, sofort:

$$\text{(M.)} \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}{}' \Delta_\varkappa = \pi i[\mathrm{w}_\sigma(g_\sigma) - \mathrm{w}_\sigma(\beta_\sigma) + \tfrac{1}{2}\pi i] - \pi i \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}{}' \mathrm{w}_\sigma(g_\varkappa).$$

Substituirt man jetzt endlich diesen Werth in (30.), so erhält man:

$$\text{(33.)} \qquad K_\sigma = \mathrm{w}_\sigma(g_\sigma) - \frac{b_{\sigma\sigma} - \pi i}{2} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}{}' [b_{\sigma\varkappa} - \mathrm{w}_\sigma(g_\varkappa)],$$

oder, falls man für $\mathrm{w}_\sigma(g_0)$ den aus (25.) sich ergebenden Werth substituirt:

$$K_\sigma = \mathrm{w}_\sigma(g_{p+1}) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} [b_{\sigma\varkappa} - \mathrm{w}_\sigma(g_\varkappa)], \tag{34.}$$

oder, mit Einführung des Congruenzzeichens:

$$K_\sigma \equiv \mathrm{w}_\sigma(g_{p+1}) - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \mathrm{w}_\sigma(g_\varkappa), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p. \tag{35.}$$

Die in den w's enthaltenen additiven Constanten sind nun aber [nach (28.)] der Art zu fixiren, dass diese Grössen $K_\sigma \equiv 0$ werden. Demgemäss gelangt man zu folgendem Resultat:

Satz. — *Versteht man unter $G_1, G_2, \ldots G_p$ willkürlich gegebene Constanten, so werden die Nullpunkte $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ der Function*

$$F(z) = \vartheta\,(\mathrm{w}_\sigma(z) - G_\sigma) \tag{36.}$$

den einfachen Formeln entsprechen:

$$\mathrm{w}_\sigma(\eta_1) + \mathrm{w}_\sigma(\eta_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\eta_p) \equiv G_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \ldots p, \tag{37.}$$

falls man nur die in den w's enthaltenen additiven Constanten in solcher Weise sich fixirt denkt, dass die Bedingungen:

$$\mathrm{w}_\sigma(g_1) + \mathrm{w}_\sigma(g_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(g_p) \equiv \mathrm{w}_\sigma(g_{p+1}), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p \tag{38.}$$

erfüllt sind.

Bezeichnet man die Formel (13.) kurzweg mit

$$\mathrm{w}_\sigma(z) = l_\sigma^{(0)} + \omega_\sigma(z), \tag{39.}$$

so gehen die Bedingungen (38.) über in:

$$p l_\sigma^{(0)} + \omega_\sigma(g_1) + \omega_\sigma(g_2) + \ldots + \omega_\sigma(g_p) \equiv l_\sigma^{(0)} + \omega_\sigma(g_{p+1}), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p;$$

so dass also diesen Bedingungen Genüge geschehen wird, wenn man den additiven Constanten $l_1^{(0)}, l_2^{(0)}, \ldots l_p^{(0)}$ die Werthe zuertheilt:

$$l_\sigma^{(0)} = \frac{\omega_\sigma(g_{p+1}) - [\omega_\sigma(g_1) + \omega_\sigma(g_2) \ldots + \omega_\sigma(g_p)]}{p-1}, \quad \sigma = 1, 2, \ldots p. \tag{40.}$$

§ 4.

Ueber Thetafunctionen, deren Argumente hyperelliptische Integrale erster Gattung sind.

Sind $G_1, G_2, \ldots G_p$ beliebig gegebene Constanten, und $M_1, M_2, \ldots M_p$ beliebig gegebene ganze Zahlen, so wird der Ausdruck:

$$\Phi = \Phi(z) = \left(\frac{\vartheta(w_\sigma(z) - G_\sigma)}{\vartheta\left(w_\sigma(z) - G_\sigma - M_\sigma \frac{\pi i}{2}\right)} \right)^2 \tag{41.}$$

stets eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function, mithin eine algebraische Function von z sein. So lautet der früher in (37) pg. 333 gefundene Satz.

Wir stellen uns hier die Aufgabe, diese algebraische Abhängigkeit zwischen Φ und z wirklich durch eine *Formel* darzustellen. Zu diesem Zwecke müssen wir zuvörderst die Nullpunkte des Zählers und Nenners, d. i. die Nullpunkte der Functionen

$$\vartheta(w_\sigma(z) - G_\sigma) \quad \text{und} \quad \vartheta\left(w_\sigma(z) - G_\sigma - M_\sigma \frac{\pi i}{2}\right)$$

ermitteln. Solches aber wird sich am Einfachsten bewerkstelligen lassen, wenn wir die Constanten G und die Zahlen M nicht beliebig lassen, sondern auf geeignete Weise festsetzen.

Die auf $\mathfrak{R}$ vorhandenen Windungspunkte bilden zusammengenommen $(p + 1)$ Punktpaare:

$$(g_1, h_1), \quad (g_2, h_2), \quad \ldots (g_{p+1}, h_{p+1});$$

und diese Punktpaare mögen, in irgend welche *beliebige* Reihenfolge versetzt, mit

$$(\alpha, \alpha'), \quad (\beta, \beta'), \quad \ldots (\gamma, \gamma'), \quad (\delta, \delta')$$

bezeichnet werden, der Art, dass etwa (α, α') identisch mit (g_m, h_m), ferner (β, β') identisch mit (g_n, h_n) ist, u. s. f. Alsdann ist nach (19.)

$$\begin{aligned} w_\sigma(\alpha') - w_\sigma(\alpha) &= A_\sigma \frac{\pi i}{2}, \\ w_\sigma(\beta') - w_\sigma(\beta) &= B_\sigma \frac{\pi i}{2}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ w_\sigma(\gamma') - w_\sigma(\gamma) &= C_\sigma \frac{\pi i}{2}, \\ w_\sigma(\delta') - w_\sigma(\delta) &= D_\sigma \frac{\pi i}{2}, \end{aligned} \tag{42.}$$

wo $A_\sigma, B_\sigma, \ldots C_\sigma, D_\sigma$ *ganze Zahlen* vorstellen, deren Summe $= 0$ ist:

$$A_\sigma + B_\sigma + \ldots + C_\sigma + D_\sigma = 0. \tag{42a.}$$

Es ist nämlich stets eine dieser Zahlen $= + 1$, eine andere $= - 1$, während alle übrigen $= 0$ sind.

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} w_\sigma(\alpha) + w_\sigma(\beta) \ldots + w_\sigma(\gamma) &= G_\sigma, \\ w_\sigma(\alpha) + w_\sigma(\beta) \ldots + w_\sigma(\gamma) + w_\sigma(\delta) &= H_\sigma, \end{aligned} \tag{43.}$$

so wird zufolge (42.) und (42a.):

$$\text{(44.)}\qquad \begin{aligned} &w_\sigma(\alpha') + w_\sigma(\beta') \ldots + w_\sigma(\gamma') = G_\sigma + M_\sigma \frac{\pi i}{2}, \\ &w_\sigma(\alpha') + w_\sigma(\beta') \ldots + w_\sigma(\gamma') + w_\sigma(\delta') = H_\sigma, \end{aligned}$$

wo M_σ eine gewisse ganze Zahl vorstellt. *Die durch diese Formeln (43.), (44.) bestimmten Constanten G, M sind es nun, welche wir in den Ausdruck Φ einsetzen wollen.* Wir erhalten alsdann:

$$\text{(45.)}\qquad \Phi(z) = \left(\frac{\vartheta\,(w_\sigma(z) - [w_\sigma(\alpha) + w_\sigma(\beta) \ldots + w_\sigma(\gamma)])}{\vartheta\,(w_\sigma(z) - [w_\sigma(\alpha') + w_\sigma(\beta') \ldots + w_\sigma(\gamma')])}\right)^2;$$

überdies ist [vgl. (16.) pg. 358]

$$\Delta(\alpha, \beta, \ldots \gamma) \neq 0, \quad \text{und ebenso auch} \quad \Delta(\alpha', \beta', \ldots \gamma') \neq 0.$$

Somit folgt aus dem Satze (20.) pg. 346, dass die in (45.) enthaltenen Thetafunctionen *nicht* identisch verschwinden, und dass ihre *elementaren Nullpunkte* respective in $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ und in $\alpha', \beta', \ldots \gamma'$ gelegen sind. *Demgemäss repräsentirt also $\Phi(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function $2p^{\text{ter}}$ Ordnung, welche p Nullpunkte zweiter Ordnung: $\alpha, \beta, \ldots \gamma$, und ebenso auch p Pole zweiter Ordnung: $\alpha', \beta', \ldots \gamma'$ besitzt.*

Genau dasselbe gilt aber auf $\mathfrak{R}$ auch von der Function

$$\text{(46.)}\qquad \varphi(z) = \frac{(z-\alpha)(z-\beta)\ldots(z-\gamma)}{(z-\alpha')(z-\beta')\ldots(z-\gamma')};$$

wie aus dem Satze (27.) pg. 115 sich leicht ergiebt. Hieraus folgt weiter, nach Satz (33.) pg. 118, dass die beiden Functionen $\Phi(z)$ und $\varphi(z)$ nur durch einen constanten Factor verschieden sein können. Bezeichnet man diesen mit K, so ist also: $\Phi(z) = K\varphi(z)$, d. i.

$$\text{(47.)}\qquad \left(\frac{\vartheta(w_\sigma(z) - [w_\sigma(\alpha) + w_\sigma(\beta) \ldots + w_\sigma(\gamma)])}{\vartheta(w_\sigma(z) - [w_\sigma(\alpha') + w_\sigma(\beta') \ldots + w_\sigma(\gamma')])}\right)^2 = K\varphi(z).$$

Es handelt sich nur noch um die Bestimmung von K. Nun ist nach (43.), (44.):

$$\begin{aligned} w_\sigma(\alpha) + w_\sigma(\beta) \ldots + w_\sigma(\gamma) &= H_\sigma - w_\sigma(\delta), \\ w_\sigma(\alpha') + w_\sigma(\beta') \ldots + w_\sigma(\gamma') &= H_\sigma - w_\sigma(\delta'); \end{aligned}$$

wodurch die Formel (47.) übergeht in:

$$\left(\frac{\vartheta(w_\sigma(z) + w_\sigma(\delta) - H_\sigma)}{\vartheta(w_\sigma(z) + w_\sigma(\delta') - H_\sigma)}\right)^2 = K\varphi(z).$$

Hieraus ergiebt sich, falls man den variablen Punkt z successive in δ und in δ' hineinfallen lässt:

$$\left(\frac{\vartheta(2w_\sigma(\delta) - H_\sigma)}{\vartheta(w_\sigma(\delta) + w_\sigma(\delta') - H_\sigma)}\right)^2 = K\varphi(\delta),$$

und

$$\left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\delta) + \mathrm{w}_\sigma(\delta') - H_\sigma)}{\vartheta(2\,\mathrm{w}_\sigma(\delta') - H_\sigma)}\right)^2 = K\varphi(\delta');$$

und hieraus folgt weiter durch Multiplication:

$$\left(\frac{\vartheta(2\,\mathrm{w}_\sigma(\delta) - H_\sigma)}{\vartheta(2\,\mathrm{w}_\sigma(\delta') - H_\sigma)}\right)^2 = K^2\varphi(\delta)\,\varphi(\delta').$$

Der hier auf der linken Seite stehende Quotient hat aber, weil [nach (42.)]

$$2\,\mathrm{w}_\sigma(\delta') - 2\,\mathrm{w}_\sigma(\delta) = D_\sigma\pi i$$

ist, und D_σ eine ganze Zahl vorstellt, nothwendiger Weise den Werth 1; wie solches mittelst des Satzes (27.) pg. 330 sich sofort ergiebt. Somit erhält man:

$$K = \frac{1}{\sqrt{\varphi(\delta)\,\varphi(\delta')}}, \tag{48.}$$

und gelangt also zu folgendem Resultat:

Satz. — *Bezeichnet man die* $(p+1)$ *Paare von Windungspunkten:*

$$(g_1,\ h_1),\quad (g_2,\ h_2),\quad \ldots (g_{p+1},\ h_{p+1})$$

in irgend einer beliebigen Reihenfolge mit

$$(\alpha,\ \alpha'),\quad (\beta,\ \beta'),\quad \ldots (\gamma,\ \gamma'),\quad (\delta,\ \delta'),$$

und setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{(z-\alpha)(z-\beta)\ldots(z-\gamma)}{(z-\alpha')(z-\beta')\ldots(z-\gamma')} = \varphi(z), \tag{49.}$$

so findet jederzeit die für z identische Gleichung statt:

$$\left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - [\mathrm{w}_\sigma(\alpha) + \mathrm{w}_\sigma(\beta) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\gamma)])}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - [\mathrm{w}_\sigma(\alpha') + \mathrm{w}_\sigma(\beta') \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\gamma')])}\right)^2 = \frac{\varphi(z)}{\sqrt{\varphi(\delta)\,\varphi(\delta')}}. \tag{50.}$$

Diese Gleichung repräsentirt, weil die mit (α, α'), (β, β') *etc. bezeichnete Anordnung der Punktpaare* (g, h) *eine beliebige ist, im Ganzen* $(p+1)$ *Formeln.*

§ 5.

Fortsetzung.

Wir wollen die Bezeichnungen (α, α'), (β, β'), $\ldots (\gamma, \gamma')$, (δ, δ') genau in demselben Sinne, wie im vorhergehenden Paragraph, beibehalten, ausserdem aber auf der Fläche $\mathfrak{R}$ p Punkte markiren: z_1, z_2, $\ldots z_p$, von denen der erste *beweglich*, die $(p-1)$ übrigen aber *fest* sein sollen. Der Ausdruck:

$$\Psi = \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z_1) + \mathrm{w}_\sigma(z_2) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(z_p) - \mathrm{w}_\sigma(\delta))}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z_1) + \mathrm{w}_\sigma(z_2) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(z_p) - \mathrm{w}_\sigma(\delta'))}\right)^2 \tag{51.}$$

wird alsdann, weil [nach (42.)]

$$w_\sigma(\delta') - w_\sigma(\delta) = D_\sigma \frac{\pi i}{2}$$

und D_σ eine ganze Zahl ist, eine auf $\mathfrak{R}$ *reguläre* Function von z_1 vorstellen; wie solches aus dem Satze (41.) unmittelbar folgt. Nun kann man, nach Satz (27.) pg. 349, stets $(p-1)$ Punkte $c_2, c_3, \ldots c_p$ sich vorstellen, die zu den $(p-1)$ festen Punkten $z_2, z_3, \ldots z_p$ in der Beziehung stehen:

$$w_\sigma(z_2) + \ldots + w_\sigma(z_p) \equiv -[w_\sigma(c_2) + \ldots + w_\sigma(c_p)],$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots p.$$

Führt man aber mittelst dieser Relationen, statt $z_2, z_3, \ldots z_p$, diese neuen Punkte $c_2, c_3, \ldots c_p$ in den Ausdruck Ψ ein, so ergiebt sich [ähnlich wie im vorhergehenden Paragraph], dass $\Psi = \Psi(z_1)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function $2p^{\text{ter}}$ Ordnung ist, welche p Nullpunkte zweiter Ordnung: $c_2, c_3, \ldots c_p, \delta$, und ebenso p Pole zweiter Ordnung: $c_2, c_3, \ldots c_p, \delta'$ besitzt*). Die mit einander coincidirenden Nullpunkte und Pole zerstören aber einander; *so dass $\Psi = \Psi(z_1)$ sich schliesslich als eine reguläre Function zweiter Ordnung herausstellt, welche in δ einen Nullpunkt zweiter Ordnung, andererseits in δ' einen Pol zweiter Ordnung besitzt.*

Genau dasselbe gilt aber auf $\mathfrak{R}$ auch von dem Ausdruck

$$\psi = \psi(z_1, z_2, \ldots z_p) = \frac{(z_1 - \delta)(z_2 - \delta) \ldots (z_p - \delta)}{(z_1 - \delta')(z_2 - \delta') \ldots (z_p - \delta')}, \tag{52.}$$

vgl. den Satz (27.) pg. 115. Die beiden Functionen $\Psi = \Psi(z_1)$ und $\psi = \psi(z_1)$ können daher, nach Satz (33.) pg. 118, nur durch einen *constanten*, d. i. von z_1 unabhängigen Factor von einander verschieden sein. Es ist also der Quotient

$$\frac{\Psi}{\psi}$$

von z_1 unabhängig. Hieraus aber ergiebt sich [auf Grund der in Bezug auf $z_1, z_2, z_3, \ldots z_p$ vorhandenen Symmetrie], dass derselbe auch unabhängig ist von $z_2, z_3, \ldots z_p$. Man erhält also die Formel: $\Psi = K\psi$, d. i.

$$\left(\frac{\vartheta(w_\sigma(z_1) + w_\sigma(z_2) \ldots + w_\sigma(z_p) - w_\sigma(\delta))}{\vartheta(w_\sigma(z_1) + w_\sigma(z_2) \ldots + w_\sigma(z_p) - w_\sigma(\delta'))}\right)^2 = K\psi(z_1, z_2, \ldots z_p), \tag{53.}$$

*) Vorausgesetzt, dass von den beiden im Zähler und Nenner von $\Psi(z_1)$ enthaltenen Thetafunctionen keine identisch verschwindet. Vgl. die Bemerkung pg. 374.

wo K eine *Constante*, d. i. eine von $z_1, z_2, \dots z_p$ unabhängige Grösse vorstellt.

Es handelt sich nur noch um die Bestimmung von K. Zu diesem Zweck lassen wir in der Formel (53.) die Punkte $z_1, z_2, \dots z_p$ einmal in die festen Punkte $\alpha, \beta, \dots \gamma$, das andere Mal in die Punkte $\alpha', \beta', \dots \gamma'$ hineinfallen, und erhalten so die Gleichungen:

$$\left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha) + \mathrm{w}_\sigma(\beta) \dots + \mathrm{w}_\sigma(\gamma) - \mathrm{w}_\sigma(\delta))}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha) + \mathrm{w}_\sigma(\beta) \dots + \mathrm{w}_\sigma(\gamma) - \mathrm{w}_\sigma(\delta'))}\right)^2 = K\,\psi(\alpha, \beta, \dots \gamma),$$

$$\left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha') + \mathrm{w}_\sigma(\beta') \dots + \mathrm{w}_\sigma(\gamma') - \mathrm{w}_\sigma(\delta))}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha') + \mathrm{w}_\sigma(\beta') \dots + \mathrm{w}_\sigma(\gamma') - \mathrm{w}_\sigma(\delta'))}\right)^2 = K\,\psi(\alpha', \beta', \dots \gamma'),$$

Gleichungen, die unter Anwendung der Bezeichnungen (43.), (44.) sich auch so schreiben lassen:

$$\left(\frac{\vartheta(H_\sigma - 2\,\mathrm{w}_\sigma(\delta))}{\vartheta(H_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(\delta) - \mathrm{w}_\sigma(\delta'))}\right)^2 = K\,\psi(\alpha, \beta, \dots \gamma),$$

$$\left(\frac{\vartheta(H_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(\delta) - \mathrm{w}_\sigma(\delta'))}{\vartheta(H_\sigma - 2\,\mathrm{w}_\sigma(\delta'))}\right)^2 = K\,\psi(\alpha', \beta', \dots \gamma').$$

Hieraus folgt durch Multiplication:

$$\left(\frac{\vartheta(H_\sigma - 2\,\mathrm{w}_\sigma(\delta))}{\vartheta(H_\sigma - 2\,\mathrm{w}_\sigma(\delta'))}\right)^2 = K^2\,\psi(\alpha, \beta, \dots \gamma)\,\psi(\alpha', \beta', \dots \gamma').$$

Der hier auf der linken Seite stehende Quotient ist aber $= 1$ [vgl. die analoge Betrachtung auf pg. 370]. Somit erhält man:

$$K = \frac{1}{\sqrt{\psi(\alpha, \beta, \dots \gamma)\,\psi(\alpha', \beta', \dots \gamma')}},$$

und gelangt daher zu folgendem Resultat:

Satz. — *Bezeichnet man die $(p+1)$ Paare von Windungspunkten*

$$(g_1, h_1), \quad (g_2, h_2), \quad \dots (g_{p+1}, h_{p+1})$$

in irgend einer beliebigen Reihenfolge mit

$$(\alpha, \alpha'), \quad (\beta, \beta'), \quad \dots (\gamma, \gamma'), \quad (\delta, \delta'),$$

und setzt man zur Abkürzung

$$\frac{(z_1 - \delta)(z_2 - \delta) \dots (z_p - \delta)}{(z_1 - \delta')(z_2 - \delta') \dots (z_p - \delta')} = \psi(z_1, z_2, \dots z_p), \tag{54.}$$

so wird für beliebig variirende Lagen der Punkte $z_1, z_2, \dots z_p$ stets die Formel stattfinden:

$$\left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z_1) + \mathrm{w}_\sigma(z_2) \dots + \mathrm{w}_\sigma(z_p) - \mathrm{w}_\sigma(\delta))}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z_1) + \mathrm{w}_\sigma(z_2) \dots + \mathrm{w}_\sigma(z_p) - \mathrm{w}_\sigma(\delta'))}\right)^2 = \tag{55.}$$

$$= \frac{\psi(z_1, z_2, \dots z_p)}{\sqrt{\psi(\alpha, \beta, \dots \gamma)\,\psi(\alpha', \beta', \dots \gamma')}}.$$

Und zwar repräsentirt diese Formel im Ganzen $(p+1)$ Gleichungen, weil die mit (α, α'), (β, β') etc. bezeichnete Reihenfolge der Punktpaare (g, h) mehrfach geändert werden kann.

§ 6.

Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems für die hyperelliptischen Integrale.

Das Jacobi'sche Umkehrproblem besteht [nach (5.) pg. 352] in der Ermittelung desjenigen Punktsystems $z_1, z_2, \ldots z_p$, welches den Formeln entspricht:

$$\mathrm{w}_\sigma(z_1) + \mathrm{w}_\sigma(z_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(z_p) = V_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \ldots p, \tag{56.}$$

wobei $V_1, V_2, \ldots V_p$ als *beliebig gegebene* Grössen zu betrachten sind.

Oder mit andern Worten: Das Jacobi'sche Umkehrproblem besteht in der Ermittelung desjenigen Punktsystems $z_1, z_2, \ldots z_p$, welches, in Verbindung mit irgend welchen ganzen Zahlen m, n, den Gleichungen Genüge leistet:

$$\mathrm{w}_\sigma(z_1) + \mathrm{w}_\sigma(z_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(z_p) = V_\sigma + m_\sigma \pi i + \Sigma_\varkappa n_\varkappa b_{\varkappa\sigma}, \quad \sigma = 1, 2, \ldots p, \tag{56a.}$$

die Summation ausgedehnt gedacht über $\varkappa = 1, 2, \ldots p$.

Bezeichnet man die *linken Seiten* dieser Formeln (56a.) für den Augenblick mit Z_σ, so ergeben sich, falls man $\mathrm{w}_\sigma(\delta)$, respective $\mathrm{w}_\sigma(\delta')$ auf beiden Seiten subtrahirt, die Gleichungen:

$$Z_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(\delta) = [V_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(\delta)] + m_\sigma \pi i + \Sigma_\varkappa n_\varkappa b_{\varkappa\sigma},$$
$$Z_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(\delta') = [V_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(\delta')] + m_\sigma \pi i + \Sigma_\varkappa n_\varkappa b_{\varkappa\sigma}.$$

Zufolge des Satzes (28.) pg. 330 ist daher:

$$\frac{\vartheta(Z_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(\delta))}{\vartheta(Z_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(\delta'))} = \frac{\vartheta(V_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(\delta))}{\vartheta(V_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(\delta'))}\, e^{-\Sigma_\sigma 2 n_\sigma [\mathrm{w}_\sigma(\delta') - \mathrm{w}_\sigma(\delta)]},$$

die Summation ausgedehnt gedacht über $\sigma = 1, 2, \ldots p$. Der hier auftretende Exponentialfactor hat aber, weil nach (42.)

$$\mathrm{w}_\sigma(\delta') - \mathrm{w}_\sigma(\delta) = D_\sigma \frac{\pi i}{2},$$

und D_σ eine *ganze Zahl* ist, den Werth ± 1. Somit folgt:

$$\left(\frac{\vartheta(Z_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(\delta))}{\vartheta(Z_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(\delta'))}\right)^2 = \left(\frac{\vartheta(V_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(\delta))}{\vartheta(V_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(\delta'))}\right)^2.$$

Der hier auf der linken Seite stehende Quotient ist aber, falls man die eigentlichen Bedeutungen der Z_σ im Auge behält, nichts Ande-

res, als der in der Formel (55.) enthaltene Quotient; so dass man also jene Formel jetzt auch so schreiben kann:

$$(57.)\qquad \left(\frac{\vartheta(V_\sigma - w_\sigma(\delta))}{\vartheta(V_\sigma - w_\sigma(\delta'))}\right)^2 = \frac{\psi(z_1, z_2, \ldots z_p)}{\sqrt{\psi(\alpha, \beta, \ldots \gamma)\,\psi(\alpha', \beta', \ldots \gamma')}}.$$

Und diese Formel repräsentirt, ebenso wie (55.), im Ganzen $(p+1)$ Gleichungen, und zwar Gleichungen, durch welche die *gesuchten Punkte* $z_1, z_2, \ldots z_p$ in unmittelbare Beziehung gesetzt werden zu den *gegebenen Grössen* $V_1, V_2, \ldots V_p$. Demgemäss gelangt man zu folgendem Resultat:

Lösung des Jacobi'schen Problems. — *Sind $V_1, V_2, \ldots V_p$ beliebig gegebene Grössen, und sollen die den Formeln*

$$(58.)\qquad w_\sigma(z_1) + w_\sigma(z_2) \ldots + w_\sigma(z_p) = V_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \ldots p$$

entsprechenden Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ ermittelt werden, so bezeichne man zuvörderst die $(p+1)$ Paare von Windungspunkten

$$(g_1, h_1), \quad (g_2, h_2), \quad \ldots (g_{p+1}, h_{p+1})$$

in irgend welcher beliebigen Reihenfolge mit

$$(\alpha, \alpha'), \quad (\beta, \beta'), \quad \ldots (\gamma, \gamma'), \quad (\delta, \delta'),$$

und setze zur Abkürzung

$$(59.)\qquad \frac{(z_1 - \delta)(z_2 - \delta) \ldots (z_p - \delta)}{(z_1 - \delta')(z_2 - \delta') \ldots (z_p - \delta')} = \psi(z_1, z_2, \ldots z_p).$$

Alsdann ergiebt sich zur Bestimmung jener Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ die Formel:

$$(60.)\qquad \frac{\psi(z_1, z_2, \ldots z_p)}{\sqrt{\psi(\alpha, \beta, \ldots \gamma)\,\psi(\alpha', \beta', \ldots \gamma')}} = \left(\frac{\vartheta(V_\sigma - w_\sigma(\delta))}{\vartheta(V_\sigma - w_\sigma(\delta'))}\right)^2.$$

Diese Formel repräsentirt, weil die mit (α, α'), (β, β') etc. bezeichnete Reihenfolge der Punktpaare (g, h) eine beliebige ist, im Ganzen $(p+1)$ Gleichungen, also Gleichungen, die mehr als hinreichend sind, um die unbekannten Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ zu ermitteln.

Bemerkung. — Auf pg. 371 war von einer gewissen Function $\Psi = \Psi(z_1)$ die Rede. Dabei ist dort ausser Acht gelassen, dass der Zähler dieser Function möglicher Weise *identisch verschwinden* kann, ebenso auch ihr Nenner. Die hierdurch in den Sätzen pg. 372 und 374 hervorgebrachte Unsicherheit wird indessen beseitigt werden durch den Schluss des nächstfolgenden Capitels.

Fünfzehntes Capitel.

Die Umkehrung der Abel'schen Integrale erster Gattung.

Ich werde in diesem Capitel mich wesentlich stützen auf das ausgezeichnete Werk von *Clebsch* und *Gordan* über die Theorie der Abel'schen Integrale (Leipzig, 1866), daneben aber auch auf die diesem Werke sich anschliessenden Aufsätze von *H. Weber* im 70. Bande des Crelle'schen Journals Seite 193 und 314.

§ 1.

Darstellung des Quotienten zweier Thetafunctionen durch Integrale dritter Gattung.

Wir kehren zurück zu unsern *allgemeinen* Betrachtungen, indem wir wiederum unter $\mathfrak{R}$ eine *willkürlich* construirte n-blättrige Riemann'sche Kugelfläche, ferner unter $\mathrm{w}_1(z), \mathrm{w}_2(z), \ldots \mathrm{w}_p(z)$ die derselben zugehörigen Abel'schen Normalintegrale erster Gattung verstehen.

Sind $G_1, G_2, \ldots G_p$ und $H_1, H_2, \ldots H_p$ beliebig gegebene Constanten, so ist der Quotient

$$\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - H_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - G_\sigma)},$$

wie im Folgenden gezeigt werden soll, in einfacher Weise ausdrückbar durch die der Fläche $\mathfrak{R}$ zugehörigen Integrale dritter Gattung.

Um näher auf die Sache einzugehen, markire man auf $\mathfrak{R}$ irgend welche Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ und $d_1, d_2, \ldots d_p$, jedoch von solcher Lage, dass

$$(1.) \qquad \Delta(c_1, c_2, \ldots c_p) \neq 0 \quad \text{und} \quad \Delta(d_1, d_2, \ldots d_p) \neq 0$$

ist. Alsdann sind [Satz (20.) pg. 346] Zähler und Nenner des Bruches

$$(2.) \qquad F(z) = \frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - [\mathrm{w}_\sigma(d_1) + \mathrm{w}_\sigma(d_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(d_p)])}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - [\mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(c_p)])}$$

wirkliche Functionen von z, d. i. Functionen, die *nicht* identisch ver-

schwinden. Der Nenner besitzt [zufolge des genannten Satzes] p elementare Nullpunkte: $c_1, c_2, \ldots c_p$, und der Zähler ebenfalls p elementare Nullpunkte: $d_1, d_2, \ldots d_p$. Gleichzeitig ergiebt sich [vgl. Theorem pg. 333], dass $F(z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function ist mit den elementaren Polen $c_1, c_2, \ldots c_p$ und den elementaren Nullpunkten $d_1, d_2, \ldots d_p$, und dass diese Function in den Curven $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$) folgende Quotienten besitzt:

$$(3.)\qquad \text{längs } b_\varkappa:\ \frac{F(\lambda)}{F(\varrho)} = e^{2\Sigma_j [w_\varkappa(d_j) - w_\varkappa(c_j)]}.$$

Genau dasselbe gilt aber, zufolge des Satzes pg. 274, auch von der Function

$$\Phi(z) = e^{\varpi_{c_1 d_1}(z) + \varpi_{c_2 d_2}(z) \ldots + \varpi_{c_p d_p}(z)}.$$

Der Quotient $\frac{F(z)}{\Phi(z)}$ ist daher auf $\mathfrak{R}$ allenthalben *eindeutig* und *stetig*, mithin [Satz pg. 118] eine *Constante*. Bezeichnet man also irgend *zwei* Lagen des Punktes z respective mit z_0 und z, so ist:

$$\frac{F(z)}{\Phi(z)} = \frac{F(z_0)}{\Phi(z_0)},$$

d. i.

$$\frac{F(z)}{F(z_0)} = \frac{\Phi(z)}{\Phi(z_0)},$$

also, falls man für Φ seine eigentliche Bedeutung substituirt:

$$(4.)\qquad \frac{F(z)}{F(z_0)} = \prod_{h=1}^{h=p} e^{\varpi_{c_h d_h}(z) - \varpi_{c_h d_h}(z_0)}.$$

Hiermit ist diese Formel (4.) bewiesen unter den in (1.) über die Punkte c, d gemachten Voraussetzungen. Versetzt man jetzt den Punkt c_1 auf der Fläche $\mathfrak{R}$ in willkürliche Bewegung, während alle übrigen Punkte c, d ihre anfänglichen Lagen beibehalten sollen, so werden jene Voraussetzungen (1.) beständig erfüllt bleiben, abgesehen von gewissen *einzelnen* Lagen c_1', c_1'', c_1''', ... des Punktes c_1. Und hieraus folgt, dass die Gleichung (4.), abgesehen von den speciellen Lagen c_1', c_1'', c_1''', ..., gültig ist für jedwede Lage des Punktes c_1, und dass sie daher [so weit ihre beiden Seiten bestimmte Werthe behalten] selbst noch gültig bleibt für jene speciellen Lagen c_1', c_1'', c_1''', ... Analoges ergiebt sich, wenn man jetzt zweitens den Punkt c_2 in Bewegung versetzt. U. s. f. Die Gleichung (4.) ist daher [so weit ihre beiden Seiten nicht etwa unbestimmt werden] *allgemein gültig* für jedwede Lage der $2p$ Punkte c, d.

Also der Satz: *Versteht man unter $F(z)$ den Quotienten:*

$$(5.)\qquad F(z) = \frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - [\mathrm{w}_\sigma(d_1) + \mathrm{w}_\sigma(d_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(d_p)])}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(z) - [\mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(c_p)])},$$

so gilt die Formel:

$$(6.)\qquad \frac{F(z)}{F(z_0)} = \prod_{h=1}^{h=p} e^{\varpi_{c_h d_h}(z) - \varpi_{c_h d_h}(z_0)}.$$

Und zwar wird diese Formel, soweit ihre beiden Seiten überhaupt bestimmte Werthe repräsentiren, gültig sein für ganz beliebige Lagen der $(2p+2)$ Punkte z, z_0 und $c_1, c_2, \ldots c_p, d_1, d_2, \ldots d_p$.

Diesen einfachen Satz vorangeschickt, gehen wir jetzt über zu unserm eigentlichen Gegenstande. Es sei $f(z)$ irgend welche auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung. Ferner seien $(\alpha_1 \ldots \beta_1)$, $(\alpha_2 \ldots \beta_2)$, $(\alpha_q \ldots \beta_q)$ irgend welche simultane Bahnen der q Niveaupunkte von

(7.) $f(z)$; und zwar mögen diese Bahnen die Curven $a_\varkappa$ nach Belieben überschreiten dürfen, *nicht* aber die Curven $b_\varkappa$. Alsdann gilt nach dem *Abel'schen Theorem* [vgl. (20.) pg. 303] die Formel:

$$(8.)\qquad \sum_{j=1}^{j=q} [\varpi_{cd}(\beta_j) - \varpi_{cd}(\alpha_j)] = \log\frac{f(d) - \mathsf{B}}{f(c) - \mathsf{B}} - \log\frac{f(d) - \mathsf{A}}{f(c) - \mathsf{A}},$$

oder, was dasselbe ist, die Formel:

$$(9.)\qquad \prod_{j=1}^{j=q} e^{\varpi_{cd}(\beta_j) - \varpi_{cd}(\alpha_j)} = \left(\frac{f(d) - \mathsf{B}}{f(c) - \mathsf{B}}\right)\left(\frac{f(d) - \mathsf{A}}{f(c) - \mathsf{A}}\right)^{-1},$$

wo A und B die Werthe von $f(z)$ respective in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ vorstellen.

Nimmt man nun für (c, d) der Reihe nach *beliebige* p Punktpaare (c_1, d_1), (c_2, d_2), $\ldots (c_p, d_p)$, und multiplicirt alle so sich ergebenden Formeln (9.) mit einander, so erhält man:

$$(10.)\qquad \prod_{j=1}^{j=q}\left\{\prod_{h=1}^{h=p} e^{\varpi_{c_h d_h}(\beta_j) - \varpi_{c_h d_h}(\alpha_j)}\right\} = \prod_{h=1}^{h=p}\left\{\left(\frac{f(d_h) - \mathsf{B}}{f(c_h) - \mathsf{B}}\right)\left(\frac{f(d_h) - \mathsf{A}}{f(c_h) - \mathsf{A}}\right)^{-1}\right\}.$$

Die linke Seite dieser Formel kann aber, nach (6.), auch so geschrieben werden:

$$(10a.)\qquad \prod_{j=1}^{j=q} \frac{F(\beta_j)}{F(\alpha_j)};$$

oder, weil $F(z)$ die Function (5.) repräsentirt, auch so:

$$(10b.)\qquad \prod_{j=1}^{j=q}\left\{\left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - D_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha_j) - D_\sigma)}\right)\left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - C_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha_j) - C_\sigma)}\right)^{-1}\right\},$$

wo C_σ und D_σ die in (5.) in den eckigen Klammern enthaltenen Ausdrücke vorstellen. Demgemäss gelangt man also zu folgendem Satz:

Theorem. — *Man markire auf $\mathfrak{R}$ irgend welche Punkte c_1, c_2, $\ldots c_p$, d_1, d_2, $\ldots d_p$, und setze zur Abkürzung:*

$$(11.)\quad \begin{aligned} C_\sigma &= \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(c_p), \\ D_\sigma &= \mathrm{w}_\sigma(d_1) + \mathrm{w}_\sigma(d_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(d_p), \quad \sigma = 1, 2, \ldots p. \end{aligned}$$

Versteht man alsdann unter $f(z)$ irgend eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function q^{ter} Ordnung, ferner unter $(\alpha_1 \ldots \beta_1)$, $(\alpha_2 \ldots \beta_2)$, $\ldots (\alpha_q \ldots \beta_q)$ irgend welche simultane Bahnen der q Niveaupunkte von $f(z)$, und setzt man voraus, dass diese Bahnen wohl die Curven $a_\varkappa$, nicht aber die Curven $b_\varkappa$ überschreiten, so findet die Formel statt:

$$(12.)\quad \prod_{h=1}^{h=p} \left\{ \left(\frac{f(d_h) - \mathsf{B}}{f(c_h) - \mathsf{B}}\right) \left(\frac{f(d_h) - \mathsf{A}}{f(c_h) - \mathsf{A}}\right)^{-1} \right\} =$$
$$= \prod_{j=1}^{j=q} \left\{ \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - D_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha_j) - D_\sigma)}\right) \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - C_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha_j) - C_\sigma)}\right)^{-1} \right\}.$$

Dabei bezeichnen A *und* B *die Werthe von $f(z)$ in α_1, α_2, $\ldots \alpha_q$ und β_1, β_2, $\ldots \beta_q$.*

Wählt man z. B. für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ die Pole der Function $f(z)$, so wird $\mathsf{A} = \infty$; *so dass in diesem Fall die Formel die einfachere Gestalt erhält:*

$$(13.)\quad \prod_{h=1}^{h=p} \left(\frac{f(d_h) - \mathsf{B}}{f(c_h) - \mathsf{B}}\right) = \prod_{j=1}^{j=q} \left\{ \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - D_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha_j) - D_\sigma)}\right) \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - C_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha_j) - C_\sigma)}\right)^{-1} \right\}.$$

$f(z)$ ist eine *willkürlich* zu wählende, auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function. Man kann also für $f(z)$ z. B. auch z selber nehmen:

$$f(z) = z.$$

Die Niveaupunkte von $f(z)$ verwandeln sich alsdann in die Niveaupunkte von z, d. i. in diejenigen Punkte, in denen z *einerlei* Werth hat. Mit andern Worten: Die in Rede stehenden Niveaupunkte sind alsdann dargestellt durch je n in der n-blättrigen Fläche $\mathfrak{R}$ an ein und derselben Stelle übereinander liegende Punkte; woraus folgt, dass die Zahl q in diesem Fall $= n$ wird.

Gleichzeitig erkennt man, dass die *simultanen Bahnen* der in Rede stehenden n Niveaupunkte im gegenwärtigen Falle durch je n in den n Blättern der Fläche $\mathfrak{R}$ genau übereinander liegende Curven dargestellt sind; — so dass also der vorhergehende Satz (12.) folgende Gestalt annimmt:

Specielleres Theorem. — *Sind auf der Fläche $\mathfrak{R}$ irgend welche Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p, d_1, d_2, \ldots d_p$ markirt, und setzt man:*

$$C_\sigma = \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) \cdots + \mathrm{w}_\sigma(c_p),$$
$$D_\sigma = \mathrm{w}_\sigma(d_1) + \mathrm{w}_\sigma(d_2) \cdots + \mathrm{w}_\sigma(d_p), \quad \sigma = 1, 2, \cdots p,$$

so gilt die Formel:

$$\prod_{h=1}^{h=p} \left\{ \begin{pmatrix} d_h - \mathsf{B} \\ c_h - \mathsf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_h - \mathsf{A} \\ \overline{c_h - \mathsf{A}} \end{pmatrix}^{-1} \right\} = \tag{14.}$$
$$= \prod_{j=1}^{j=n} \left\{ \begin{pmatrix} \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - D_\sigma) \\ \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha_j) - D_\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - C_\sigma) \\ \overline{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha_j) - C_\sigma)} \end{pmatrix}^{-1} \right\}.$$

Dabei sind unter A *und* B *beliebige Constanten zu verstehen. Ferner repräsentiren $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die in der Fläche $\mathfrak{R}$ bei $z = \mathsf{A}$ übereinander liegenden Punkte, und ebenso $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ die bei $z = \mathsf{B}$ übereinander liegenden Punkte.*

Doch dürfen jene beiden Constanten A, B *nicht ganz ad libitum gewählt werden. Vielmehr müssen die beiden Stellen $z = \mathsf{A}$ und $z = \mathsf{B}$,* (15.) *falls die Formel* (14.) *gültig sein soll, der Art gewählt werden, dass man von $z = \mathsf{A}$ aus nach $z = \mathsf{B}$ hin einen alle n Blätter der Fläche durchdringenden Schnitt zu führen im Stande ist, welcher keine der Curven $b_\varkappa$ durchkreuzt.*

§ 2.

Die Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems.

Das Jacobi'sche Umkehrproblem besteht [vgl. (5.) pg. 352] in der Ermittelung desjenigen Punktsystems $z_1, z_2, \ldots z_p$, welches den Formeln entspricht:

$$\mathrm{w}_\sigma(z_1) + \mathrm{w}_\sigma(z_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(z_p) = V_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \ldots p, \tag{16.}$$

wobei $V_1, V_2, \ldots V_p$ als *beliebige Variabeln* zu betrachten sind. Genauer ausgedrückt besteht also dieses Problem in der Ermittelung desjenigen Punktsystems $z_1, z_2, \ldots z_p$, welches, in Verbindung mit irgend welchen ganzen Zahlen m, n, den p Gleichungen Genüge leistet:

$$\mathrm{w}_\sigma(z_1) + \mathrm{w}_\sigma(z_2) \cdots + \mathrm{w}_\sigma(z_p) = V_\sigma + m_\sigma \pi i + \Sigma_\varkappa n_\varkappa b_{\varkappa\sigma}, \tag{16a.}$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots p.$$

Um dieses Problem zu lösen, bezeichne man die linken Seiten der Formeln (16.a) zur Abkürzung mit Z_σ:

$$\mathrm{w}_\sigma(z_1) + \mathrm{w}_\sigma(z_2) \cdots + \mathrm{w}_\sigma(z_p) = Z_\sigma. \tag{17.}$$

Ferner markire man auf $\mathfrak{R}$ p feste Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ von ganz beliebiger Lage, und setze:

$$(18.)\qquad \mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) \cdots + \mathrm{w}_\sigma(c_p) = C_\sigma .$$

Sodann bilde man irgend eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function $f(z)$ von beliebiger, etwa q^{ter} Ordnung, und construire irgend welche simultane Bahnen $(\alpha_1 \dots \beta_1)$, $(\alpha_2 \dots \beta_2)$, $\dots (\alpha_q \dots \beta_q)$ der q Niveaupunkte von $f(z)$, jedoch in solcher Weise, dass diese Bahnen die Curven $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \dots p)$ nirgends überschreiten, und bezeichne endlich die Werthe von $f(z)$ in den Anfangs- und Endpunkten dieser Bahnen respective mit A und B. — Alsdann ist zufolge des Theoremes (12.):

$$(19.)\qquad \prod_{h=1}^{h=p} \left\{ \left(\frac{f(z_h) - \mathsf{B}}{f(c_h) - \mathsf{B}} \right) \left(\frac{f(z_h) - \mathsf{A}}{f(c_h) - \mathsf{A}} \right)^{-1} \right\} = \\ = \prod_{j=1}^{j=q} \left\{ \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - Z_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha_j) - Z_\sigma)} \right) \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - C_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha_j) - C_\sigma)} \right)^{-1} \right\}.$$

In dieser Formel können die Z_σ durch die V_σ ersetzt werden. Nach (16.a) und (17.) ist nämlich:

$$Z_\sigma = V_\sigma + m_\sigma \pi i + \Sigma_\varkappa n_\varkappa b_{\varkappa\sigma},$$

mithin:

$$(\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - Z_\sigma) = (\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - V_\sigma) - m_\sigma \pi i - \Sigma_\varkappa n_\varkappa b_{\varkappa\sigma},$$

$$(\mathrm{w}_\sigma(\alpha_j) - Z_\sigma) = (\mathrm{w}_\sigma(\alpha_j) - V_\sigma) - m_\sigma \pi i - \Sigma_\varkappa n_\varkappa b_{\varkappa\sigma},$$

wo die m, n unbekannte ganze Zahlen vorstellen. Somit folgt aus (28.) pg. 330:

$$(20.)\qquad \frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - Z_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha_j) - Z_\sigma)} = \frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - V_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha_j) - V_\sigma)} e^{\psi_j},$$

wo ψ_j die Bedeutung hat:

$$\psi_j = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=q} 2 n_\sigma [\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - \mathrm{w}_\sigma(\alpha_j)].$$

Demgemäss ist z. B.:

$$\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_q = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} \left(2 n_\sigma \sum_{j=1}^{j=q} [\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - \mathrm{w}_\sigma(\alpha_j)] \right),$$

also unter Anwendung des Abel'schen Theorems [vgl. (B.) pg. 294]:

$$\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_q = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} (2 n_\sigma M_\sigma \pi i) = \mathsf{N} \cdot 2\pi i,$$

wo die M's *ganze Zahlen* sind, mithin Gleiches auch von N gilt. Mit Rücksicht auf diese letzte Formel aber ergiebt sich aus (20.) sofort:

$$(21.)\qquad \prod_{j=1}^{j=q} \frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - Z_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha_j) - Z_\sigma)} = \prod_{j=1}^{j=q} \frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - V_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha_j) - V_\sigma)}.$$

Dies aber in (19.) substituirt, erhält man offenbar eine Formel, welche von (19.) selber nur dadurch sich unterscheidet, dass statt der Z_σ die V_σ auftreten; und gelangt daher zu folgendem Resultat:

Lösung des Jacobi'schen Problems. — *Soll das Jacobi'sche Umkehrproblem* (16.), (16.a) *gelöst werden, so markire man zuvörderst auf* $\mathfrak{R}$ *irgend welche festen Puncte* $c_1, c_2, \ldots c_p$, *und setze:*

$$w_\sigma(c_1) + w_\sigma(c_2) \cdots + w_\sigma(c_p) = C_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \cdots p. \tag{22.}$$

Sodann bilde man irgend eine auf $\mathfrak{R}$ *reguläre Function* $f(z)$ *von beliebiger, etwa* q^{ter} *Ordnung, und construire irgend welche simultane Bahnen* $(\alpha_1 \ldots \beta_1)$, $(\alpha_2 \ldots \beta_2)$, $\ldots$ $(\alpha_q \ldots \beta_q)$ *der* q *Niveaupunkte von* $f(z)$, *jedoch in solcher Art, dass diese Bahnen die Curven* $b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ *nirgends überschreiten, und bezeichne endlich die Werthe von* $f(z)$ *in den Anfangs- und Endpunkten dieser Bahnen respective mit* A *und* B.

Alsdann gilt zur Bestimmung der gesuchten Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ *die Formel:*

$$\prod_{h=1}^{h=p} \left\{ \left(\frac{f(z_h) - \mathsf{B}}{f(c_h) - \mathsf{B}} \right) \left(\frac{f(z_h) - \mathsf{A}}{f(c_h) - \mathsf{A}} \right)^{-1} \right\} = \\ = \prod_{j=1}^{j=q} \left\{ \left(\frac{\vartheta(w_\sigma(\beta_j) - V_\sigma)}{\vartheta(w_\sigma(\alpha_j) - V_\sigma)} \right) \left(\frac{\vartheta(w_\sigma(\beta_j) - C_\sigma)}{\vartheta(w_\sigma(\alpha_j) - C_\sigma)} \right)^{-1} \right\}. \tag{23.}$$

Diese Formel enthält, ausser den construirten Constanten c, C, α, A, β, B, *nur noch die Variablen:*

$$f(z_1), f(z_2), \ldots f(z_p) \text{ und } V_1, V_2, \ldots V_p.$$

Man kann nun solcher Formeln (23.) *beliebig viele bilden, indem man die Constanten* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$, A *und* $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$, B *innerhalb des ihnen durch die Construction angewiesenen Spielraumes beliebig variiren lässt. Bildet man aber in dieser Weise im Ganzen* p *solche Formeln* (23.), *so kann man mittelst dieser* p *Formeln die Grössen* $f(z_1), f(z_2), \ldots f(z_p)$ *ausdrücken als Functionen von* $V_1, V_2, \ldots V_p$.

Allerdings sind hierdurch die $z_1, z_2, \ldots z_p$ noch immer nicht völlig bestimmt. Denn $f(z)$ ist eine reguläre Function q^{ter} Ordnung; so dass also z. B. durch Kenntniss des Werthes von $f(z_1)$ im Ganzen q Punkte z_1 sich bestimmen, unter denen nur *einer* der gesuchte sein kann.

Man kann aber, in derselben Weise wie $f(z_1), f(z_2), \ldots f(z_p)$, z. B. auch $\varphi(z_1), \varphi(z_2), \ldots \varphi(z_p)$ berechnen, falls nämlich $\varphi(z)$ irgend welche *zweite* auf $\mathfrak{R}$ reguläre Function repräsentirt. U. s. w.

Empfehlenswerther als dieses sehr umständliche Verfahren,

dürfte folgendes sein: Man nimmt zur Function $f(z)$ das Argument z selber. Die Niveaupunkte von $f(z)$ verwandeln sich alsdann in die Niveaupunkte von z, d. i. in diejenigen Punkte, in denen z *einerlei* Werth hat. Mit andern Worten: Die in Rede stehenden Niveaupunkte sind alsdann dargestellt durch die in der n-blättrigen Fläche $\mathfrak{R}$ an ein und derselben Stelle übereinander liegenden n Punkte; woraus folgt, dass die Zahl q in diesem Fall $= n$ wird. Der vorhergehende Satz nimmt daher, bei dieser Specialisirung, folgende Gestalt an:

Einfachere Lösung des Problems. — *Man markire wiederum auf $\mathfrak{R}$ zuvörderst irgend welche festen Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$, und setze:*

$$\mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) \cdots + \mathrm{w}_\sigma(c_p) = C_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \ldots p. \tag{24.}$$

Sodann markire man weiter auf der n-blättrigen Fläche $\mathfrak{R}$ an irgend zwei Stellen $z = \mathsf{A}$ und $z = \mathsf{B}$ die übereinander liegenden Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$; dabei wähle man aber diese beiden Stellen in solcher Weise, dass man, von $z = \mathsf{A}$ aus, nach $z = \mathsf{B}$ hin einen alle n Blätter der Fläche $\mathfrak{R}$ durchdringenden Schnitt zu führen im Stande ist, welcher keine *der Curven $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots p$) durchkreuzt.*

Alsdann gilt für die unbekannten Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ folgende Formel:

$$\prod_{h=1}^{h=p} \left\{ \left(\frac{z_h - \mathsf{B}}{c_h - \mathsf{B}}\right) \left(\frac{z_h - \mathsf{A}}{c_h - \mathsf{A}}\right)^{-1} \right\} = \tag{25.}$$
$$= \prod_{j=1}^{j=n} \left\{ \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - V_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha_j) - V_\sigma)}\right) \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\beta_j) - C_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\alpha_j) - C_\sigma)}\right)^{-1} \right\}.$$

Diese Formel repräsentirt eine Relation zwischen den Variablen

$$z_1, z_2, \ldots z_p \quad \text{und} \quad V_1, V_2, \ldots V_p.$$

Denkt man sich nun, durch Variation der Constanten A und B im Ganzen p solche Formeln (25.) hergestellt, so bestimmen sich mittelst dieser die Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ als Functionen von $V_1, V_2, \ldots V_p$.

§ 3.

Fortsetzung. Anwendung auf den Specialfall der hyperelliptischen Integrale.

Für $\mathfrak{R}$ sei gegeben diejenige $2p$-fach zusammenhängende *zweiblättrige* Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}$, auf welcher die Function

$$s = \sqrt{(z - g_1)(z - h_1)(z - g_2)(z - h_2) \cdots (z - g_{p+1})(z - h_{p+1})} \tag{26.}$$

in eindeutiger Weise sich ausbreitet, wo die g, h beliebig gegebene (reelle oder complexe) Constanten vorstellen. Und auf dieser Fläche seien die $2p$ Riemann'schen Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ in solcher Weise festgesetzt, wie in der Figur pg. 359 für den speciellen Fall $p = 3$ näher angegeben ist.

Es handelt sich nun wieder um die Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems, d. i. um die Ermittelung derjenigen Punkte z_1, $z_2, \ldots z_p$, welche den Formeln

$$\mathrm{w}_\sigma(z_1) + \mathrm{w}_\sigma(z_2) \ldots + \mathrm{w}_\sigma(z_p) = V_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \cdots p, \tag{27.}$$

entsprechen. Zu diesem Zwecke markiren wir zuvörderst auf $\mathfrak{R}$ irgend welche festen Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ und $d_1, d_2, \ldots d_p$ und setzen:

$$\begin{aligned} &\mathrm{w}_\sigma(c_1) + \mathrm{w}_\sigma(c_2) \cdots + \mathrm{w}_\sigma(c_p) = C_\sigma, \\ &\mathrm{w}_\sigma(d_1) + \mathrm{w}_\sigma(d_2) \cdots + \mathrm{w}_\sigma(d_p) = D_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \cdots p. \end{aligned} \tag{28.}$$

Dies vorangeschickt, wollen wir jetzt den vorhergehenden Satz (25.) auf den gegenwärtigen Fall in Anwendung bringen. Dabei sind alsdann auf der Fläche $\mathfrak{R}$ irgend zwei Stellen $z = \mathsf{A}$ und $z = \mathsf{B}$ willkürlich zu wählen, jedoch [vgl. den vorhergehenden Satz] in solcher Weise, dass man in der Fläche $\mathfrak{R}$ von der einen Stelle zur andern einen beide Blätter durchdringenden Schnitt zu führen im Stande ist, welcher *keine* der Curven $b_\varkappa$ durchkreuzt. Ein Blick auf die Figur pg. 359 zeigt daher, dass man für $z = \mathsf{A}$ und $z = \mathsf{B}$ z. B. die beiden Windungspunkte g_1 und h_1 wählen darf, oder auch g_2 und h_2, u. s. f. Man kann also den vorhergehenden Satz (25.) in Anwendung bringen, indem man dabei für (A, B) irgend eines der $(p + 1)$ Punktpaare (g_τ, h_τ) eintreten lässt. Die bei $z = \mathsf{A} = g_\tau$ über einander liegenden Punkte α_1, α_2 verschmelzen alsdann, weil g_τ ein Windungspunkt ist, zu *einem einzigen* Punkte, der kurzweg mit A oder g_τ zu bezeichnen sein wird. Desgleichen verschmelzen alsdann die beiden bei $z = \mathsf{B} = h_\tau$ übereinander liegenden Punkte β_1, β_2 zu *einem einzigen* Punkte B oder h_τ. Demgemäss wird das auf der rechten Seite der Formel (25.) stehende Product die Gestalt besitzen:

$$\prod_{j=1}^{j=2} F(\alpha_j, \beta_j),$$

d. i. die Gestalt

$$F(\alpha_1, \beta_1)\, F(\alpha_2, \beta_2) = [F(\mathsf{A}, \mathsf{B})]^2;$$

so dass also jene Formel (25.) folgendes Aussehen erhält:

$$\prod_{k=1}^{k=p} \left\{ \left(\frac{z_k - \mathsf{B}}{c_k - \mathsf{B}}\right) \left(\frac{z_k - \mathsf{A}}{c_k - \mathsf{A}}\right)^{-1} \right\} = \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_o(\mathsf{B}) - V_o)}{\vartheta(\mathrm{w}_o(\mathsf{A}) - V_o)}\right)^2 \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_o(\mathsf{B}) - C_o)}{\vartheta(\mathrm{w}_o(\mathsf{A}) - C_o)}\right)^{-2}.$$

Und diese Formel kann unter Einführung des Functionszeichens:

$$\psi(z_1, z_2, \cdots z_p) = \frac{(z_1 - \mathsf{B})(z_2 - \mathsf{B}) \cdots (z_p - \mathsf{B})}{(z_1 - \mathsf{A})(z_2 - \mathsf{A}) \cdots (z_p - \mathsf{A})}, \tag{29.}$$

einfacher so dargestellt werden:

$$\frac{\psi(z_1, z_2, \cdots z_p)}{\psi(c_1, c_2, \cdots c_p)} = \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_o(\mathsf{B}) - V_o)}{\vartheta(\mathrm{w}_o(\mathsf{A}) - V_o)}\right)^2 \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_o(\mathsf{B}) - C_o)}{\vartheta(\mathrm{w}_o(\mathsf{A}) - C_o)}\right)^{-2}. \tag{30.}$$

Denkt man sich nun diese Formel $(p+1)$ Male hingeschrieben, indem man dabei für (A, B) *der Reihe nach die Punktpaare* (g_1, h_1), (g_2, h_2), $\cdots (g_{p+1}, h_{p+1})$ *eintreten lässt, so erhält man im Ganzen* $(p+1)$ *Gleichungen, von denen bereits p ausreichend sind, um* $z_1, z_2, \ldots z_p$ *als Functionen von* $V_1, V_2, \ldots V_p$ *zu bestimmen.*

Hiemit ist das Jacobi'sche Umkehrproblem für den gegenwärtigen Fall absolvirt. Es bleibt noch übrig, diese Lösung weiter zu vereinfachen.

Die Gleichung (30.) findet statt zwischen je zwei den Formeln (27.) entsprechenden Werthsystemen der Variablen $z_1, z_2, \ldots z_p$ und $V_1, V_2, \ldots V_p$. Sie wird also [zufolge (28.)] z. B. auch stattfinden zwischen $c_1, c_2, \ldots c_p$ und $C_1, C_2, \ldots C_p$, ebenso zwischen $d_1, d_2, \ldots d_p$ und $D_1, D_2, \ldots D_p$. Durch Substitution dieser *letzten* Werthe erhält man:

$$\frac{\psi(d_1, d_2, \cdots d_p)}{\psi(c_1, c_2, \cdots c_p)} = \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_o(\mathsf{B}) - D_o)}{\vartheta(\mathrm{w}_o(\mathsf{A}) - D_o)}\right)^2 \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_o(\mathsf{B}) - C_o)}{\vartheta(\mathrm{w}_o(\mathsf{A}) - C_o)}\right)^{-2},$$

oder, falls man für die D_σ ihre eigentlichen Bedeutungen (28.) eintreten lässt:

$$\frac{\psi(d_1, d_2, \cdots d_p)}{\psi(c_1, c_2, \cdots c_p)} = \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_o(\mathsf{B}) - \Sigma_j \mathrm{w}_o(d_j))}{\vartheta(\mathrm{w}_o(\mathsf{A}) - \Sigma_j \mathrm{w}_o(d_j))}\right)^2 \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_o(\mathsf{B}) - C_o)}{\vartheta(\mathrm{w}_o(\mathsf{A}) - C_o)}\right)^{-2}, \tag{31.}$$

die Summationen ausgedehnt gedacht über $j = 1, 2, \cdots p$. In dieser Formel (31.) repräsentiren $d_1, d_2, \ldots d_p$ *beliebig* zu wählende Punkte; so dass also die Formel gültig bleiben wird *bei jedweder Variation* dieser Punkte. Hievon soll sogleich Gebrauch gemacht werden.

In (30.) und ebenso in (31.) war unter (A, B) irgend eines der Punktpaare (g_1, h_1), (g_2, h_2), $\ldots (g_{p+1}, h_{p+1})$ zu verstehen. Wir wollen uns jetzt für (A, B) irgend ein *bestimmtes* dieser $(p+1)$ Punktpaare festgesetzt, die übrigen p Punktpaare aber in irgend welcher Reihenfolge mit $(\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1)$, $(\mathsf{A}_2, \mathsf{B}_2)$, $\ldots (\mathsf{A}_p, \mathsf{B}_p)$ bezeichnet denken. Nehmen wir nun in (31.) für die willkürlichen Punkte

$d_1, d_2, \ldots d_p$ einmal die $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots \mathsf{A}_p$, das andere Mal die $\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2, \ldots \mathsf{B}_p$, so erhalten wir:

$$\frac{\psi(\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_p)}{\psi(c_1, c_2, \cdots c_p)} = \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}) - \Sigma_j \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}_j))}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}) - \Sigma_j \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}_j))}\right)^2 \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}) - C_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}) - C_\sigma)}\right)^{-2},$$

und:

$$\frac{\psi(\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2, \cdots \mathsf{B}_p)}{\psi(c_1, c_2, \cdots c_p)} = \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}) - \Sigma_j \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}_j))}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}) - \Sigma_j \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}_j))}\right)^2 \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}) - C_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}) - C_\sigma)}\right)^{-2};$$

und hieraus durch Multiplication und Wurzelausziehung:

$$\frac{\sqrt{\psi(\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_p)\, \psi(\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2, \cdots \mathsf{B}_p)}}{\psi(c_1, c_2, \cdots c_p)} = \mathsf{K}\left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}) - C_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}) - C_\sigma)}\right)^{-2}, \tag{32.}$$

wo K die Bedeutung hat:

$$\mathsf{K} = \frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}) - \Sigma_j \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}_j))\ \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}) - \Sigma_j \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}_j))}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}) - \Sigma_j \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}_j))\ \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}) - \Sigma_j \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}_j))}, \tag{33.}$$

die Summationen stets ausgedehnt gedacht über $j = 1, 2, \cdots p$. Schliesslich folgt aus (30.) und (32.) durch Division:

$$\frac{\psi(z_1, z_2, \cdots z_p)}{\sqrt{\psi(\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_p)\, \psi(\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2, \cdots \mathsf{B}_p)}} = \frac{1}{\mathsf{K}}\left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}) - V_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}) - V_\sigma)}\right)^2. \tag{34.}$$

Bemerkung. — Es ist nach (19.) pg. 361:

$$\begin{aligned}
2[\mathrm{w}_\sigma(h_1) - \mathrm{w}_\sigma(g_1)] &= + a_{\sigma 1}, \\
2[\mathrm{w}_\sigma(h_2) - \mathrm{w}_\sigma(g_2)] &= + a_{\sigma 2}, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
2[\mathrm{w}_\sigma(h_p) - \mathrm{w}_\sigma(g_p)] &= + a_{\sigma p}, \\
2[\mathrm{w}_\sigma(h_{p+1}) - \mathrm{w}_\sigma(g_{p+1})] &= -(a_{\sigma 1} + a_{\sigma 2} \cdots + a_{\sigma p});
\end{aligned} \tag{35.}$$

woraus durch Addition folgt:

$$\mathrm{w}_\sigma(h_1) + \mathrm{w}_\sigma(h_2) \cdots + \mathrm{w}_\sigma(h_{p+1}) = \mathrm{w}_\sigma(g_1) + \mathrm{w}_\sigma(g_2) \cdots + \mathrm{w}_\sigma(g_{p+1}). \tag{36.}$$

Gleichzeitig folgt aus (35.), mit Rücksicht auf die bekannte Bedeutung der $a_{\sigma\varkappa}$:

$$\begin{aligned}
2[\mathrm{w}_\sigma(h_1) - \mathrm{w}_\sigma(g_1)] &= M_\sigma^{(1)}\pi i, \\
2[\mathrm{w}_\sigma(h_2) - \mathrm{w}_\sigma(g_2)] &= M_\sigma^{(2)}\pi i, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
2[\mathrm{w}_\sigma(h_{p+1}) - \mathrm{w}_\sigma(g_{p+1})] &= M_\sigma^{(p+1)}\pi i,
\end{aligned} \tag{37.}$$

wo die M_σ lauter ganze Zahlen sind, von denen eine $= 1$, eine andere $= -1$, und die übrigen $= 0$ sind, so dass also die Beziehung stattfindet:

$$M_\sigma^{(1)} + M_\sigma^{(2)} \cdots + M_\sigma^{(p+1)} = 0. \tag{37a.}$$

Wir haben nun im Vorhergehenden die Punktpaare (g_1, h_1), $(g_2, h_2), \cdots (g_{p+1}, h_{p+1})$ in irgend welcher *beliebigen* Reihenfolge mit

$$(\mathsf{A}, \mathsf{B}),\ (\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1),\ (\mathsf{A}_2, \mathsf{B}_2),\ \ldots\ (\mathsf{A}_p, \mathsf{B}_p)$$

bezeichnet. Zufolge (36.) ist daher z. B.:

$$\text{(38.)}\qquad \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}) + \sum_{j=1}^{j=p} \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}_j) = \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}) + \sum_{j=1}^{j=p} \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}_j) = L_\sigma,$$

wo L_σ den gemeinschaftlichen Werth der beiden Ausdrücke vorstellen soll. Ferner folgt aus (37.) z. B.:

$$\text{(39.)}\qquad 2[\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}) - \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A})] = \mathsf{M}_\sigma \pi i,$$

und ebenso:

$$\text{(40.)}\qquad 2[\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}_j) - \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}_j)] = \mathsf{M}_\sigma^{(j)} \pi i, \quad j = 1, 2, \cdots p,$$

wo die M und die $\mathsf{M}^{(j)}$ *ganze Zahlen* sind.

Nach (33.) war nun

$$\mathsf{K} = \frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}) - \Sigma_j \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}_j))\ \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}) - \Sigma_j \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}_j))}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}) - \Sigma_j \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}_j))\ \vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}) - \Sigma_j \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}_j))},$$

die Summationen ausgedehnt über $j = 1, 2, \cdots p$. Eliminirt man diese Summen $\Sigma_j \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}_j)$ und $\Sigma_j \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}_j)$ mittelst der Formeln (38.), unter Einführung von L_σ, so ergiebt sich:

$$\mathsf{K} = \frac{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}) + \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}) - L_\sigma)}{\vartheta(2\,\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}) - L_\sigma)}\ \frac{\vartheta(2\,\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}) - L_\sigma)}{\vartheta(\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}) + \mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}) - L_\sigma)},$$

oder, was dasselbe ist:

$$\mathsf{K} = \frac{\vartheta(2\,\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{B}) - L_\sigma)}{\vartheta(2\,\mathrm{w}_\sigma(\mathsf{A}) - L_\sigma)}.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (39.), unter Anwendung des Satzes (27.) pg. 330, sofort:

$$\text{(41.)}\qquad \mathsf{K} = 1. \quad Q.\ e.\ d.$$

Somit gelangt man, auf Grund von (34.), zu folgendem Resultat:

Soll das Jacobi'sche Umkehrproblem für diejenige zweiblättrige Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}$ gelöst werden, auf welcher die Function

$$\text{(42.)}\qquad s = \sqrt{(z - g_1)(z - h_1)(z - g_2)(z - h_2) \cdots (z - g_{p+1})(z - h_{p+1})}$$

in eindeutiger Weise sich ausbreitet, so bezeichne man die Punktpaare (g_1, h_1), $(g_2, h_2), \cdots (g_{p+1}, h_{p+1})$ in irgend welcher beliebigen Reihenfolge mit

$$(\mathsf{A}, \mathsf{B}),\ (\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1),\ (\mathsf{A}_2, \mathsf{B}_2),\ \ldots\ (\mathsf{A}_p, \mathsf{B}_p).$$

Alsdann gilt, wenn zur Abkürzung

$$\frac{(z_1 - \mathsf{B})(z_2 - \mathsf{B}) \cdots (z_p - \mathsf{B})}{(z_1 - \mathsf{A})(z_2 - \mathsf{A}) \cdots (z_p - \mathsf{A})} = \psi(z_1, z_2, \cdots z_p) \tag{43.}$$

gesetzt wird, für die unbekannten Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ *folgende Formel* [vgl. (34.) und (41.)]:

$$\frac{\psi(z_1, z_2, \cdots z_p)}{\sqrt{\psi(\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_p)\,\psi(\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2, \cdots \mathsf{B}_p)}} = \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_\alpha(\mathsf{B}) - V_\alpha)}{\vartheta(\mathrm{w}_\alpha(\mathsf{A}) - V_\alpha)}\right)^2. \tag{44.}$$

Diese Formel repräsentirt, weil (A, B) *ein beliebiges unter den* $(p+1)$ *Punktpaaren* $(g_1, h_1), (g_2, h_2), \cdots (g_{p+1}, h_{p+1})$ *vorstellt, im Ganzen* $(p+1)$ *Gleichungen, von denen bereits* p *ausreichend sind, um* $z_1, z_2, \cdots z_p$ *als Functionen von* $V_1, V_2, \cdots V_p$ *zu bestimmen.*

Dieses Resultat (44.) ist, abgesehen von einer etwas anderen Bezeichnungsweise, in vollem Einklang mit der früher erhaltenen Formel (60.) auf pg. 374.

Sechzehntes Capitel.

Einführung der Fundamentalfunctionen einer gegebenen Fläche.

Um nachträglich die Riemann'schen Existenztheoreme [pg. 238, 239] zu *beweisen*, werde ich in diesem und den beiden folgenden Capiteln zuvörderst gewisse *Fundamentalfunctionen* einführen, sodann die Fundamentalfunctionen einer *Kreisfläche* näher untersuchen, und sodann schliesslich den in Rede stehenden Beweis wirklich liefern.

§ 1.

Einige Bemerkungen über monogene Functionen. Einführung des Wortes harmonisch.

Es sei $f(z) = U + iV$ eine monogene Function von $z = x + iy$:

$$U + iV = f(z) = f(x + iy). \tag{1.}$$

Alsdann ergeben sich durch Differentiation nach x respective y die Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} &= f'(z), \\ \frac{\partial U}{\partial y} + i\frac{\partial V}{\partial y} &= if'(z). \end{aligned} \tag{2.}$$

Hieraus folgt sofort:

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \tag{3.}$$

und hieraus folgt weiter durch Elimination von V, respective U:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \tag{4.}$$

Nimmt man nun an, die Function $f(z)$ sei auf irgend einem Gebiet $\mathfrak{A}$ der z-Ebene *eindeutig* und *stetig*, so gilt Gleiches innerhalb $\mathfrak{A}$ [Satz pg. 23] auch von $f'(z)$, also nach (1.), (2.) auch von U, $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ und V, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$. Also der Satz:

Ist eine Function $f(z) = U + iV$ auf einem gegebenen Gebiet $\mathfrak{A}$ der z-Ebene eindeutig und stetig, so gilt offenbar Gleiches daselbst auch von U. Ueberdies aber wird U innerhalb $\mathfrak{A}$ den Formeln entsprechen:

(5.) $$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \text{ stetig}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Genau dasselbe ist von V zu sagen.

Dieser Satz ist fast unmittelbar übertragbar auf solche Functionen $f(z)$, die eindeutig und stetig sind auf irgend einem Theil $\mathfrak{S}$ einer *mehrblättrigen Riemann'schen* Kugelfläche. Eine Ausnahme findet dabei offenbar nur statt in den Windungspunkten Denn in diesen kann bekanntlich [vgl. pg. 124] aus der Stetigkeit von $f(z)$ noch kein Schluss gemacht werden auf die Stetigkeit von $f'(z)$.

Um nun, trotz dieser Ausnahmefälle, ein für die ganze Fläche $\mathfrak{S}$ *gleichmässiges* Verfahren eintreten zu lassen, zerlege man $\mathfrak{S}$ zuvörderst in einzelne Stücke, der Art, dass jedes dieser Stücke eines natürlichen Zustandes fähig ist. Bezeichnet man irgend eines dieser Stücke in seinem ursprünglichen und natürlichen Zustande mit

$$\mathfrak{U}(c, z), \text{ respective } \mathfrak{A}(\gamma, \zeta), \quad [\text{vgl. pg. } 96, 97],$$

oder ausführlicher mit

$$\mathfrak{U}(a + ib, x + iy), \quad \text{respective} \quad \mathfrak{A}(\alpha + i\beta, \xi + i\eta),$$

so ergeben sich für die auf diesem Flächenstück ausgebreiteten Functionen zweierlei Ableitungen, nämlich einerseits die Ableitungen nach x, y, und andererseits die nach ξ, η. Die ersteren mögen die *ursprünglichen*, die letzteren die *natürlichen* Ableitungen genannt werden.

Da nun die gegebene Function $f = f(z) = U + iV$ auf $\mathfrak{S}$, mithin auch auf $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{A}$ *eindeutig* und *stetig* sein soll, so kann man, *was $\mathfrak{A}$ betrifft*, die frühere Schlussfolge (1.), (2.), (3.), (4.) von Neuem wiederholen, wobei alsdann gegenwärtig statt x, y, z die Buchstaben ξ, η, ζ eintreten werden. Also der Satz:

(6.) *Ist die Function $f(z) = U + iV$ auf irgend einem Theil $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und stetig, so gilt Gleiches daselbst auch von U. Denkt man sich überdies die Fläche $\mathfrak{S}$ in einzelne Stücke zerlegt, deren jedes einen natürlichen Zustand anzunehmen vermag, so werden die natürlichen Ableitungen von U innerhalb eines jeden solchen Stückes den Formeln entsprechen:*

(6a.) $$\frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta} \textit{ stetig}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0.$$

Genau dasselbe ist von V zu sagen.

Zur Abkürzung mag im Folgenden jede mit den Differential-(6b.) eigenschaften (6a.) behaftete Function schlechtweg eine *harmonische Function* genannt werden.

Genaueres. — Ein beliebig gegebener Theil $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche kann immer in einzelne Stücke zerlegt werden, deren jedes eines *natürlichen* Zustandes fähig ist. Und eine auf $\mathfrak{S}$ ausgebreitete Function $U = U(x, y)$ soll innerhalb $\mathfrak{S}$ *harmonisch* heissen, sobald innerhalb eines jeden solchen Stückes die natürlichen Ableitungen von U den Formeln entsprechen:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta} \text{ stetig}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0.$$

Ich habe mich hier bei Benutzung des Wortes „*harmonisch*" einem schon vorhandenen Sprachgebrauch angelehnt [vgl. z. B. das Handbuch der theoretischen Physik von *Thomson* und *Tait*, Braunschweig 1871, Band 1, Theil 1, Seite 156]. Dabei habe ich allerdings diesem Worte, mit Rücksicht auf die hier zu behandelnden Gegenstände, eine gewisse *speciellere* Bedeutung zuertheilt.

Solches festgesetzt, kann man also den vorstehenden Satz (6.) jetzt auch so aussprechen: *Ist eine Function $f(z) = U + iV$ auf irgend einem Theil $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche* eindeutig *und* (7.) stetig, *so wird ihr reeller Theil U innerhalb $\mathfrak{S}$* harmonisch *sein. Gleiches ist von V zu sagen.*

Wir wollen jetzt untersuchen, in wie weit dieser Satz *umkehrbar* ist, also untersuchen, ob eine auf $\mathfrak{S}$ eindeutige, stetige und harmonische Function $U = U(x, y)$ stets als der reelle Theil irgend einer monogenen Function $f(z)$ angesehen werden darf. Zu diesem Zweck zerlegen wir wiederum $\mathfrak{S}$ in einzelne Stücke $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots$ und bezeichnen die natürlichen Zustände derselben mit $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ Da nun U auf $\mathfrak{S}$, mithin auch auf $\mathfrak{U}_\varkappa$ und $\mathfrak{A}_\varkappa$ eindeutig, stetig und harmonisch sein soll, also z. B. auf $\mathfrak{A}_\varkappa$ den Bedingungen entspricht:

$$U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta} \text{ stetig}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0,$$

so ergiebt sich leicht [vgl. pg. 6, 7]:

$$\int_{\mathfrak{A}_\varkappa} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial U}{\partial \eta} d\xi \right) = 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\int_{\mathfrak{U}_\varkappa} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial U}{\partial \eta} d\xi \right) = 0.$$

Diese Formel kann man offenbar auch so schreiben:

$$\int_{\mathfrak{U}_\varkappa} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\eta - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) d\xi \right\} = 0,$$

oder, weil $z = x + iy$ eine monogene Function von $\zeta = \xi + i\eta$ ist, mithin die Relationen stattfinden:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta} \text{ und } \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0,$$

auch so:

$$\int_{\mathfrak{U}_\varkappa} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) d\eta + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) d\xi \right\} = 0,$$

oder, falls man nach $\frac{\partial U}{\partial x}$ und $\frac{\partial U}{\partial y}$ ordnet, auch so:

$$\int_{\mathfrak{U}_\varkappa} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx \right) = 0.$$

Denkt man sich aber diese Formel der Reihe nach für *alle* Stücke $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots$ der Fläche $\mathfrak{S}$ gebildet, und all' diese Formeln addirt, so erhält man offenbar:

$$\int_{\mathfrak{S}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx \right) = 0;$$

so dass man also vorläufig zu folgendem Satz gelangt:

Ist eine Function $U = U(x, y)$ auf irgend einem Theil $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig, stetig und harmonisch, so gilt stets die Formel:

$$\int_{\mathfrak{S}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx \right) = 0, \tag{8.}$$

die Integration positiv erstreckt über alle Randcurven von $\mathfrak{S}$.

Dieser Satz ist selbstverständlich auch anwendbar auf jeden *Theil* von $\mathfrak{S}$. Ist nun insbesondere die Fläche $\mathfrak{S}$ *einfach zusammenhängend*, so wird dieselbe durch jedweden Rückkehrschnitt σ in zwei getrennte Stücke zerfallen, von denen *eines* lediglich von σ begrenzt ist. Demgemäss ergiebt sich durch Anwendung der Formel (8.):

$$\int_{\sigma} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx \right) = 0;$$

so dass man also [vgl. die einfachen Betrachtungen pg. 195—197] zu folgendem Satz gelangt:

Theorem. — *Repräsentirt $\mathfrak{S}$ einen einfach zusammenhängenden Theil einer Riemann'schen Kugelfläche, und ist die Function $U = U(x, y)$ auf $\mathfrak{S}$ eindeutig, stetig und harmonisch, so wird*

das von einem festen Punkte x_0, y_0 ausgehende, und in seiner Bewegung auf $\mathfrak{S}$ beschränkte Integral

$$(9.) \qquad V = \int_{x_0 y_0}^{x y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx \right), \quad [\mathfrak{S}]$$

eine Function von x, y sein, die auf $\mathfrak{S}$ eindeutig und stetig ist.

Die so definirte Function V besitzt [zufolge (9.)] *die Eigenschaften:*

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Und demgemäss repräsentirt also das Binom

$$(10.) \qquad U + iV$$

eine monogene Function von $z = x + iy$, welche auf $\mathfrak{S}$ eindeutig und stetig ist.

Dieser Satz lässt sich leicht übertragen auf den Fall einer *mehrfach* zusammenhängenden Fläche. Man erhält alsdann folgendes

Allgemeineres Theorem. — *Ist die Function $U = U(x, y)$ eindeutig, stetig und harmonisch auf irgend einem mehrfach zusammenhängenden Theil $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche, und denkt man sich diesen Theil $\mathfrak{S}$ durch irgend welche Schnitte $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_\nu$ in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt, so wird U der reelle Theil einer monogenen Function*

$$(10a.) \qquad U + iV$$

sein, welche auf $\mathfrak{S}$, mit Ausnahme der Curven $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_\nu$, eindeutig und stetig, in jeder solchen Curve aber mit einer constanten und zwar rein imaginären Werthdifferenz behaftet ist.

Bemerkung. — Denkt man sich die Fläche $\mathfrak{S}$ in lauter kleine Stücke $\mathfrak{U}$ zerlegt, deren jedes einen natürlichen Zustand anzunehmen fähig ist, und diejenigen Stücke $\mathfrak{U}$, welche die Integrationscurve des Integrals (9.) durchläuft, der Reihe nach mit $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots \mathfrak{U}_n$ bezeichnet, so kann das Integral selber dementsprechend in n Theile zerlegt werden. Und der einem *einzelnen* solchen $\mathfrak{U}$ zugehörige Integraltheil ist alsdann in die Form

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial U}{\partial \eta} d\xi \right)$$

versetzbar, wo ξ, η zu x, y in derselben Beziehung stehen wie auf pg. 389.

Diese Zerlegbarkeit und Umformbarkeit des Integrales (9.) und ähnlicher Integrale ist stets im Auge zu behalten. Sie ist z. B. zu beachten, falls man die im Satze (9.) über die *Stetigkeit* von V gemachte Behauptung wirklich beweisen will.

§ 2.

Aufstellung einer gewissen Fundamentalaufgabe. Begriff der Fundamentalfunctionen.

(11.) Die Function $U = U(x, y)$ sei *auf* irgend einem Theil $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und stetig, und *innerhalb* $\mathfrak{S}$ harmonisch. Wir stellen uns die Aufgabe, diese Function U näher zu untersuchen, und namentlich den Punkt näher zu bestimmen, in welchem sie auf $\mathfrak{S}$ den *grössten* Werth hat.

Bemerkung. — Wir unterscheiden hier und im Folgenden zwischen *auf* und *innerhalb*. Unter den *auf* $\mathfrak{S}$ gelegenen Punkten verstehen wir nämlich alle Punkte der Fläche $\mathfrak{S}$, *inclusive* ihrer Randpunkte, unter den *innerhalb* $\mathfrak{S}$ befindlichen Punkten hingegen alle Punkte der Fläche $\mathfrak{S}$, *exclusive* ihrer Randpunkte. Und in analoger Weise benutzen wir die Worte *auf* und *innerhalb* auch bei Angabe irgend welcher Eigenschaften einer auf $\mathfrak{S}$ ausgebreiteten Function.

Uebrigens werden wir statt „*auf* $\mathfrak{S}$" zuweilen auch mit schärferer Accentuirung sagen: „*in Erstreckung von* $\mathfrak{S}$" oder „*in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{S}$".

Da die Function U nach unserer Voraussetzung *auf* $\mathfrak{S}$ eindeutig und stetig sein soll, so unterliegt es zuvörderst keinem Zweifel, dass sie auf $\mathfrak{S}$ in irgend einem Punkte einen Maximalwerth erreicht. Dieser Punkt soll näher bestimmt werden.

Zu diesem Zweck markiren wir irgendwo *innerhalb* $\mathfrak{S}$ einen Punkt c. Gleichzeitig construiren wir das Bereich $\mathfrak{U}(c, z)$ oder $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$ dieses Punktes, und zwar in solcher Weise, dass einerseits $\mathfrak{U}$ völlig *innerhalb* $\mathfrak{S}$ liegt, und dass andererseits $\mathfrak{A}$ eine um γ (als Centrum) beschriebene Kreisfläche vorstellt. Alsdann ist U in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{U}$ oder $\mathfrak{A}$ eindeutig, stetig und harmonisch. Zufolge (10.) existirt daher eine monogene Function

$$U + iV,$$

welche auf $\mathfrak{U}$ oder $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig ist. Diese letztere aber wird im Centrum γ der Kreisfläche $\mathfrak{A}$ einen Werth haben, der nach dem Cauchy'schen Satz [pg. 21] folgendermassen darstellbar ist:

$$U_\gamma + iV_\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{(U + iV)\, d\zeta}{\zeta - \gamma}.$$

Setzt man nun hier in bekannter Weise

$$\zeta - \gamma = \varrho e^{i\vartheta}, \text{ mithin } \frac{d\zeta}{\zeta - \gamma} = i\, d\vartheta,$$

wo ϱ den von γ nach ζ gehenden Radius, und ϑ das Azimuth desselben vorstellt, so erhält man:

$$U_\gamma + iV_\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(U + iV)\,d\vartheta,$$

und folglich:

(12.) $$U_\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\,d\vartheta \text{ und } V_\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V d\vartheta.$$

Die erste dieser beiden Formeln nimmt, falls man das Randelement der Fläche $\mathfrak{A}$ mit $d\sigma$, und den in $d\sigma$ vorhandenen Werth U mit U_σ bezeichnet, die Gestalt an:

(13.) $$U_\gamma = \frac{\int U_\sigma d\sigma}{2\pi\varrho},$$

und sagt also aus, *dass der Centralwerth U_γ identisch ist mit dem arithmetischen Mittel der peripherischen Werthe U_σ.*

Nun sind offenbar nur zwei Fälle denkbar. *Entweder* die U_σ sind constant, d. h. alle von einerlei Grösse. Alsdann wird ihr arithmetisches Mittel d. i. U_γ ebendieselbe Grösse haben. *Oder aber* die U_σ sind *nicht* alle von einerlei Grösse. Alsdann wird ihr arithmetisches Mittel d. i. U_γ zwischen den U_σ eine mittlere Rangstufe einnehmen, indem es einige derselben an Grösse übertrifft,
(14.) anderen nachsteht. *Niemals also wird U_γ die sämmtlichen U_σ an Grösse übertreffen können.*

Dieser Satz führt zu wichtigen Folgerungen. Bezeichnet man nämlich alle Werthe, die U in Erstreckung der Fläche $\mathfrak{S}$ besitzt, mit $U_\mathfrak{S}$, so dass also z. B. U_γ und ebenso auch die U_σ nur Individuen aus dem System der $U_\mathfrak{S}$ vorstellen, so ergiebt sich aus (14.)
(15.) sofort, *dass jenes U_γ unmöglich alle übrigen $U_\mathfrak{S}$ an Grösse überragen kann.* Denn wäre dies der Fall, so müsste jenes U_γ z. B. auch alle U_σ an Grösse übertreffen; was dem Satze (14.) widerspricht.

Nun war aber c ein *innerhalb* $\mathfrak{S}$ beliebig markirter Punkt, und jenes U_γ ist identisch mit U_c d. h. mit demjenigen Werth, den U im Punkte c besitzt. Demgemäss kann der Satz (15.) auch so ausgesprochen werden: *Markirt man irgendwo innerhalb $\mathfrak{S}$ einen Punkt*
(16.) *c, so wird der daselbst vorhandene Werth U_c unmöglich grösser sein können als alle übrigen $U_\mathfrak{S}$.*

Existirt also überhaupt unter den Werthen $U_\mathfrak{S}$ einer, der alle übrigen an Grösse überragt, — und das wird stets der Fall sein, wenn U auf $\mathfrak{S}$ *inconstant* ist, — so kann dieser Werth *niemals*

innerhalb $\mathfrak{S}$, folglich *nur* am Rande von $\mathfrak{S}$ anzutreffen sein. Oder kürzer ausgedrückt: *Ist die Function U auf $\mathfrak{S}$ inconstant, so wird ihr grösster Werth niemals innerhalb $\mathfrak{S}$, sondern nur am Rande von $\mathfrak{S}$ anzutreffen sein.*

Sollte andererseits die Function U auf $\mathfrak{S}$ *constant* sein, so würde ihr *grösster* Werth allenthalben, *sowohl* innerhalb $\mathfrak{S}$ *wie auch* am Rande von $\mathfrak{S}$ sich vorfinden. Beide Fälle zusammengefasst, gelangt man also zu folgendem Resultat:

(17.) **Erster Satz.** — *Es sei $\mathfrak{S}$ irgend ein Theil einer Riemann'schen Kugelfläche, ferner $U = U(x, y)$ eine Function, die auf $\mathfrak{S}$ eindeutig und stetig, und innerhalb $\mathfrak{S}$ harmonisch ist.*

Alsdann wird der grösste Werth von U unter allen Umständen, einerlei ob U auf $\mathfrak{S}$ constant oder inconstant ist, am Rande von $\mathfrak{S}$ anzutreffen sein. Ist aber U auf $\mathfrak{S}$ inconstant, so wird dieser grösste Werth nur am Rande, und niemals innerhalb $\mathfrak{S}$ anzutreffen sein.

Analoges gilt offenbar andererseits auch für den kleinsten Werth von U.

Betrachtet man also die *Randwerthe* einer solchen Function U, und bezeichnet man den kleinsten und grössten dieser Randwerthe respective mit K und G, so werden die Werthe, welche U *innerhalb* $\mathfrak{S}$ besitzt, ebenfalls sämmtlich zwischen K und G liegen, folglich constant sein, falls $K = G$ ist. Somit ergiebt sich folgender

(18.) **Zweiter Satz.** — *Ist die Function $U = U(x, y)$ auf $\mathfrak{S}$ eindeutig und stetig, ferner innerhalb $\mathfrak{S}$ harmonisch, und setzt man voraus, dieselbe sei längs des Randes von $\mathfrak{S}$ constant, so wird sie auf $\mathfrak{S}$ allenthalben constant sein.*

Hieraus folgt sofort, dass eine Function, die *auf* $\mathfrak{S}$ eindeutig und stetig, und *innerhalb* $\mathfrak{S}$ harmonisch sein soll, durch blosse Angabe ihrer Randwerthe vollständig bestimmt ist. Denn existirten zwei solche Functionen U und U', beide mit *denselben* Randwerthen, so würde offenbar ihre Differenz $U - U'$ eine Function sein, die *auf* $\mathfrak{S}$ eindeutig und stetig, *innerhalb* $\mathfrak{S}$ harmonisch, und *am Rande* von $\mathfrak{S}$ überall $= 0$ ist. Zufolge des Satzes (18.) würde daher diese Differenz $U - U'$ auch *innerhalb* $\mathfrak{S}$ überall $= 0$ sein. — *Q. e. d.*

Es ergiebt sich in dieser Weise also folgender

(19.) **Dritter Satz.** — *Soll eine Function $U = U(x, y)$ auf irgend einem Theil $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und stetig, und innerhalb $\mathfrak{S}$ harmonisch sein, so wird sie vollkommen bestimmt sein durch blosse Angabe ihrer Randwerthe.*

An diesen Satz schliesst sich von selber die Aufgabe an, eine mit den genannten Eigenschaften versehene Function wirklich zu construiren, falls ihre Randwerthe irgendwie vorgeschrieben sind. Diese Aufgabe bildet den eigentlichen Angelpunkt unserer weiteren Betrachtungen. Sie mag demgemäss die Fundamentalaufgabe genannt, und sorgfältiger formulirt werden.

(20.) Die Fundamentalaufgabe. — *Man denke sich längs des Randes* σ *der Fläche* $\mathfrak{S}$ *irgend welche reellen Werthe* Σ *in willkürlicher Weise vorgeschrieben, jedoch so, dass dieselben längs* σ *stetig sind. Es wird die Construction einer Function* $U = U(x, y)$ *verlangt, die folgende Eigenschaften besitzt:*

I. *U soll auf* $\mathfrak{S}$ *eindeutig und stetig, und innerhalb* $\mathfrak{S}$ *harmonisch sein.*

II. *U soll am Rande von* $\mathfrak{S}$ *Werthe besitzen, die mit jenen vorgeschriebenen* Σ*'s identisch sind.*

(20a.) Diese der Fläche $\mathfrak{S}$ zugehörigen Functionen U mögen kurzweg die *Fundamentalfunctionen der Fläche* $\mathfrak{S}$ heissen. Auch mögen dieselben als *bekannt* oder *construirbar* bezeichnet werden, sobald irgend welche Methode gefunden ist, mittelst deren man dieselben für *beliebig* vorgeschriebene, jedoch *stetige* Randwerthe Σ wirklich aufzustellen vermag.

Es handelt sich dabei namentlich um die Frage, ob derartige Functionen U *wirklich existiren*, also um die Frage, ob jene Fundamentalaufgabe für eine *beliebig* gegebene Fläche $\mathfrak{S}$ und *beliebig* vorgeschriebene stetige Randwerthe Σ *wirklich lösbar* ist. Wir werden im Folgenden zeigen, dass diese Frage für solche Flächen $\mathfrak{S}$, die von lauter Kreislinien begrenzt sind, *bejahend* zu beantworten ist, nämlich zeigen, dass die fundamentalen Functionen U einer von lauter Kreisen begrenzten Fläche $\mathfrak{S}$ wirklich *construirbar* sind.

(20b.) Der Definition (20 a.) entsprechend werden unter den Fundamentalfunctionen einer *geschlossenen* Fläche solche zu verstehen sein, *die auf dieser Fläche allenthalben eindeutig, stetig und harmonisch sind.* Hieraus aber ergiebt sich leicht, dass die Fundamentalfunctionen einer ein- oder mehrblättrigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ ohne Weiteres angebbar, nämlich *Constanten* sind. Dass jede Constante die in Rede stehenden Eigenschaften besitzt, unterliegt keinem Zweifel. Leicht aber lässt sich auch zeigen, dass jede Fundamentalfunction der Fläche $\mathfrak{R}$ nothwendiger Weise eine Constante sein *muss*.

Erläuterung. — Ist nämlich irgend eine Function U auf $\mathfrak{R}$ eindeutig, stetig und harmonisch, so wird dieselbe [nach Satz (10a.)] der reelle Theil einer *monogenen* Function

$$U + iV$$

sein, welche auf $\mathfrak{R}$, mit Ausnahme der Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$, *eindeutig und stetig*, in jeder solchen Curve aber mit einer *constanten rein imaginären* Differenz behaftet ist. Hieraus aber folgt sofort [vgl. die Betrachtungen pg. 235, 236, namentlich den dortigen Satz (R.)], dass $U + iV$ eine *Constante* ist. *Q. e. d.*

Bemerkung. — Die Betrachtungen dieses Paragraphs sind, ihrem eigentlichen Kern nach, bereits *früher* von mir dargelegt worden, im Jahre 1870, in zwei Aufsätzen über das Logarithmische und Newton'sche Potential in den Math. Annalen, Bd. 3, Seite 325—349 und 424—434.

§ 3.

Einige Eigenschaften der Fundamentalfunctionen.

Es bezeichne $\mathfrak{S}$ irgend eine *speciell* gegebene Fläche. Wir nehmen an, dass die Fundamentalfunctionen U dieser speciellen Fläche $\mathfrak{S}$ wirklich *construirbar* seien, für beliebig vorgeschriebene stetige Randwerthe Σ, und bezeichnen die diesen Randwerthen Σ zugehörige Function U mit

$$U^{\Sigma}, \text{ oder besser mit } U^{\sigma,\,\Sigma}, \tag{1.}$$

wo σ den Rand der Fläche $\mathfrak{S}$ vorstellen soll. Absichtlich setzen wir dabei im Exponenten σ, Σ statt des blossen Σ, um anzudeuten, dass jene Werthe Σ längs σ ausgebreitet zu denken sind.

Sind die Σ's gegeben, so ist dadurch die Function (1.) *vollständig und eindeutig bestimmt*; zufolge des Satzes (19.) pg. 395. Sind insbesondere die Σ's längs σ *constant*, etwa $= 1$, so wird jene Function, zufolge des Satzes (18.) pg. 395, auf $\mathfrak{S}$ *allenthalben* $= 1$ sein; was angedeutet werden kann durch die Formel:

$$U^{\sigma,\,1} = 1. \tag{2.}$$

Ebenso ergiebt sich allgemein:

$$U^{\sigma,\,A} = A, \tag{3.}$$

falls nämlich A eine beliebig gegebene *Constante* vorstellt.

Die Fundamentalfunction (1.) ist, nach ihrer Definition [(20a.) pg. 396], in ganzer Erstreckung der Fläche $\mathfrak{S}$ eindeutig und stetig. Sie wird daher irgendwo auf der Fläche $\mathfrak{S}$ einen *grössten* Werth annehmen. Dieser *grösste Werth* ist aber, nach Satz (17.) pg. 395, unter allen Umständen *am Rande* von $\mathfrak{S}$ anzutreffen. Er wird

daher, weil die Randwerthe der in Rede stehenden Function (1.) durch die Σ's selber dargestellt sind, identisch sein mit Max Σ, d. i. mit dem Maximalwerth der Σ's. Und demgemäss entsprechen also *sämmtliche* Werthe, welche die Function (1.) auf $\mathfrak{S}$ besitzt, der Formel:

(4.) $$U^{\sigma, \Sigma} < \text{Max } \Sigma.$$

Denkt man sich also z. B. auf $\mathfrak{S}$ irgend eine *Curve* ζ gegeben, die einzelnen Punkte dieser Curve ebenfalls mit ζ benannt, und die Werthe der Function (1.) in diesen Punkten ζ mit

(5.) $$U_\zeta^{\sigma, \Sigma}$$

bezeichnet, so entsprechen all' diese Werthe (5.) der Formel:

(6.) $$U_\zeta^{\sigma, \Sigma} < \text{Max } \Sigma.$$

Demgemäss ist also z. B.

(6a.) $$\text{Max } U_\zeta^{\sigma, \Sigma} \text{ ebenfalls} < \text{Max } \Sigma,$$

falls man nämlich unter Max $U_\zeta^{\sigma, \Sigma}$ den grössten derjenigen Werthe versteht, den die Function $U_\zeta^{\sigma, \Sigma}$ auf der *Curve* ζ besitzt.

Andererseits wird die Function (1.) offenbar irgendwo auf der Fläche $\mathfrak{S}$ einen *kleinsten* Werth annehmen. Hieraus ergeben sich analoge Formeln; so dass man also, Alles zusammengefasst, folgenden Satz erhält:

Erster Satz. — *Es sei $\mathfrak{S}$ ein (von beliebig vielen Randcurven begrenzter) Theil einer Riemann'schen Kugelfläche. Am Rande σ der Fläche $\mathfrak{S}$ seien irgend welche längs σ stetige Werthe Σ vorgeschrieben. Ferner sei gebildet die diesen Σ's zugehörige Fundamentalfunction*

$$U = U^{\sigma, \Sigma}.$$

Denkt man sich nun in Erstreckung der Fläche $\mathfrak{S}$ irgend eine Curve ζ gegeben, und die einzelnen Punkte dieser Curve ebenfalls mit ζ bezeichnet, so wird für all' diese Punkte ζ die Formel stattfinden:

(I.) $$\text{Min } \Sigma \leq U_\zeta^{\sigma, \Sigma} \leq \text{Max } \Sigma.$$

Hieraus folgt sofort:

$$\text{Max } U_\zeta^{\sigma, \Sigma} < \text{Max } \Sigma,$$

$$\text{Min } U_\zeta^{\sigma, \Sigma} > \text{Min } \Sigma;$$

und hieraus durch Subtraction:

(Ia.) $$\text{Max } U_\zeta^{\sigma, \Sigma} - \text{Min } U_\zeta^{\sigma, \Sigma} < \text{Max } \Sigma - \text{Min } \Sigma.$$

Man kann, mit Riemann, die linke Seite dieser letzten Formel als die Schwankung der Function $U^{\sigma, \Sigma}$ auf der Curve ζ, und ebenso

die rechte Seite als die Schwankung der Function Σ auf σ bezeichnen. Demgemäss kann man diese Formel, falls die Schwankung einer Function durch die Charakteristik D angedeutet wird, auch so schreiben:

(Ib.) $$D\,U_\xi^{\sigma,\,\Sigma} < D\Sigma.$$

Schliesslich kann noch folgende Formel hinzugefügt werden:

(Ic.) $$\text{Max abs } U_\xi^{\sigma,\,\Sigma} < \text{Max abs } \Sigma,$$

die aus (I.) *sich leicht ergiebt.*

Erläuterung zu (Ic.). — Liegen, wie durch (I.) constatirt ist, sämmtliche Werthe einer Function F_ξ zwischen zwei festen Schranken A und B, und bezeichnet man den absolut grössten Betrag dieser beiden Quantitäten A und B mit M, so wird offenbar abs F_ξ stets $< M$, mithin auch Max abs $F_\xi < M$ sein. *Q. e. d.*

Bemerkung. — In den Formeln des vorstehenden Satzes würde die Ersetzung des Zeichens $\leq$ durch $<$ selbst dann nicht gestattet sein, wenn die Curve ξ völlig *innerhalb* $\mathfrak{S}$ liegen sollte. Denn es könnte z. B. Σ auf σ constant sein. Und alsdann würde in jenen Formeln das in Rede stehende Zeichen durch $=$ zu ersetzen sein; wie sich solches aus dem Satze (18.) pg. 395 sofort ergiebt.

Wir wollen jetzt annehmen, die Randcurvenanzahl der gegebenen Fläche $\mathfrak{S}$ sei > 1, etwa $= 2$. Die beiden Randcurven mögen σ_1 und σ_2 heissen. Sind nun am Rande σ der Fläche $\mathfrak{S}$, d. i. auf σ_1 und σ_2, irgend welche stetige Werthe Σ vorgeschrieben, so wird die diesen Σ's zugehörige Fundamentalfunction der Fläche $\mathfrak{S}$ nach wie vor mit

(1.) $$U^{\sigma,\,\Sigma} \quad \text{oder} \quad U^{\sigma_1 + \sigma_2,\,\Sigma}$$

zu bezeichnen sein. Gleichzeitig aber mag unter

(2.) $$U^{\sigma_1,\,\Sigma}$$

diejenige Fundamentalfunction verstanden werden, deren Randwerthe nur auf σ_1 mit jenen Σ's identisch, auf σ_2 hingegen *Null* sind. Und ebenso mag umgekehrt

(3.) $$U^{\sigma_2,\,\Sigma}$$

diejenige Fundamentalfunction vorstellen, deren Randwerthe auf σ_2 mit jenen Σ's identisch, auf σ_1 aber *Null* sind. Das Aggregat

$$U^{\sigma_1,\,\Sigma} + U^{\sigma_2,\,\Sigma}$$

repräsentirt daher eine Fundamentalfunction, deren Randwerthe *durchweg* (auf σ_1 wie auf σ_2) identisch mit den Σ's sind, d. h. eine Fundamentalfunction, deren Randwerthe identisch mit denen der Function (1.) sind. Besitzen aber zwei Fundamentalfunctionen *einerlei*

Randwerthe, so sind sie, nach Satz (19.) pg. 395, unter einander *identisch.* Somit folgt also:

$$U^{\sigma_1, \Sigma} + U^{\sigma_2, \Sigma} = U^{\sigma, \Sigma}. \tag{4.}$$

Ist insbesondere Σ *constant*, etwa *durchweg* $= 1$ (auf σ_1 wie auf σ_2), so nimmt die Formel (4.) die Gestalt an:

$$U^{\sigma_1, 1} + U^{\sigma_2, 1} = U^{\sigma, 1}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung aber repräsentirt, nach Satz (18.) pg. 395, eine Fundamentalfunction, die auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{S}$ *allenthalben* $= 1$ ist. Somit folgt:

$$U^{\sigma_1, 1} + U^{\sigma_2, 1} = 1. \tag{5.}$$

Wir wollen jetzt insbesondere die Function (2.), oder vielmehr zunächst die etwas *speciellere* Function

$$U^{\sigma_1, 1} \tag{6.}$$

in Betracht ziehen. Diese ist auf σ_1 überall $= 1$, auf σ_2 überall $= 0$, also auf $\mathfrak{S}$ *inconstant.* Ihr *grösster Werth auf* $\mathfrak{S}$ wird daher, nach Satz (17.) pg. 395, niemals *innerhalb* $\mathfrak{S}$, sondern immer nur *am Rande* von $\mathfrak{S}$ anzutreffen sein. Er wird somit, weil die Randwerthe der Function theils $= 1$, theils $= 0$ sind, nothwendiger Weise durch 1 dargestellt sein.

Um die Hauptsache zusammenzufassen: Jener grösste Werth ist $= 1$, und niemals *innerhalb* $\mathfrak{S}$, sondern nur *am Rande* von $\mathfrak{S}$ anzutreffen. Markirt man also irgend einen Punkt j *innerhalb* $\mathfrak{S}$, so wird der daselbst vorhandene Functionswerth

$$U_j^{\sigma_1, 1} \text{ nothwendig } < 1 \text{ (niemals } = 1)$$

sein. Und denkt man sich ferner völlig *innerhalb* $\mathfrak{S}$ irgend eine Curve ζ gegeben, und die einzelnen Punkte dieser Curve ebenfalls mit ζ bezeichnet, so wird für all' diese Punkte ζ die Formel stattfinden:

$$U_\zeta^{\sigma_1, 1} < 1 \text{ (niemals } = 1).$$

Diese Formel kann schliesslich, durch eine analoge Betrachtung über den *kleinsten Werth* der Function (6.), leicht vervollständigt werden; so dass man erhält:

$$0 < U_\zeta^{\sigma_1, 1} < 1, \tag{7.}$$

die Zeichen genommen *in sensu rigoroso.*

Nun ist die Function (6.) auf $\mathfrak{S}$, mithin z. B. auch auf ζ eindeutig und stetig. Unter den Werthen, die sie auf ζ besitzt, muss also ein bestimmter *kleinster*, und ebenso auch ein bestimmter *grösster*

Werth sich vorfinden. Diese beiden besonderen Werthe — sie mögen $\varkappa$ und λ heissen — müssen der allgemeinen Formel (7.) sich ebenfalls subordiniren. Und demgemäss erhält man:

$$(8.)\qquad 0 < \varkappa \leq U_z^{\sigma_1, 1} \leq \lambda < 1.$$

Die Grössen $\varkappa$ und λ sind also *positive Constanten*, beide > 0, und beide < 1. Auch werden die Werthe dieser beiden Constanten $\varkappa$, λ, wie aus ihrer Definition folgt, lediglich abhängen von den durch die Fläche $\mathfrak{S}$ und die Curve ζ gegebenen *geometrischen* Verhältnissen; so dass sie etwa bezeichnet werden können als die *Situationsconstanten von* ζ *in Bezug auf* $\mathfrak{S}$.

Dies vorausgeschickt, gehen wir über zur Betrachtung der *allgemeineren* Function (2.):

$$(9.)\qquad U^{\sigma_1, \Sigma}.$$

Bezeichnet man den absolut grössten Werth von Σ auf σ_1 mit M_1, was angedeutet sein mag durch die Formel:

$$(10.)\qquad M_1 = \text{Max abs } \Sigma_{\sigma_1},$$

so sind $M_1 + \Sigma$ und $M_1 - \Sigma$ auf σ_1 überall > 0. Demgemäss besitzen also die Functionen

$$U^{\sigma_1, M_1 + \Sigma} \text{ und } U^{\sigma_1, M_1 - \Sigma}$$

Randwerthe, die auf σ_1 überall > 0, und auf σ_2 überall $= 0$ sind*). Ihre *Randwerthe* sind mithin durchweg positiv. Und hieraus folgt, mittelst des Satzes (17.) pg. 395, dass ihre Werthe auf der Fläche $\mathfrak{S}$ *allenthalben* positiv sind. Somit ergeben sich für jedweden Punkt der Fläche $\mathfrak{S}$ die Formeln:

$$(\alpha.)\qquad U^{\sigma_1, M_1 + \Sigma} \geq 0,$$

$$(\beta.)\qquad U^{\sigma_1, M_1 - \Sigma} > 0,$$

Formeln, die man auch so schreiben kann**):

$$(\gamma.)\qquad U^{\sigma_1, M_1} + U^{\sigma_1, \Sigma} > 0,$$

$$(\delta.)\qquad U^{\sigma_1, M_1} - U^{\sigma_1, \Sigma} > 0,$$

oder auch so:

$$- U^{\sigma_1, M_1} < U^{\sigma_1, \Sigma} < + U^{\sigma_1, M_1}.$$

---

*) Vgl. die in (2.) pg. 399 gegebene Definition.

**) Dass z. B. in (α.) und (γ.) die linken Seiten unter einander *identisch* sind, ergiebt sich in ähnlicher Weise, wie vorhin die Richtigkeit der Formel (4.) dargethan wurde.

Ist aber $(-A) < B < (+A)$, so wird offenbar abs $B <$ abs A sein. Somit folgt:

$$\text{abs}\, U^{\sigma_1, \Sigma} < \text{abs}\, U^{\sigma_1, M_1}, \tag{11.}$$

oder, weil $U^{\sigma_1, M_1} = M_1 U^{\sigma_1, 1}$ ist*), und die Werthe von M_1 und $U^{\sigma_1, 1}$ *stets positiv* sind:

$$\text{abs}\, U^{\sigma_1, \Sigma} < M_1 U^{\sigma_1, 1}. \tag{12.}$$

All' diese Formeln gelten für jedweden Punkt der Fläche $\mathfrak{S}$. Bringt man nun die letzte auf irgend einen Punkt der vorhin betrachteten *Curve* ζ in Anwendung, so erhält man:

$$\text{abs}\, U_\zeta^{\sigma_1, \Sigma} < M_1 U_\zeta^{\sigma_1, 1},$$

also mit Rücksicht auf (8.):

$$\text{abs}\, U_\zeta^{\sigma_1, \Sigma} < M_1 \lambda, \tag{13.}$$

mithin z. B. auch:

$$\text{Max abs}\, U_\zeta^{\sigma_1, \Sigma} \leqq M_1 \lambda. \tag{14.}$$

Substituirt man schliesslich für M_1 seine eigentliche Bedeutung (10.), so gelangt man zu folgendem Satz:

Zweiter Satz. — *Es sei $\mathfrak{S}$ ein von zwei Randcurven σ_1 und σ_2 begrenzter Theil einer Riemann'schen Kugelfläche. Ferner bezeichne*

$$U = U^{\sigma_1, \Sigma}$$

diejenige Fundamentalfunction der Fläche $\mathfrak{S}$, welche längs σ_1 beliebig vorgeschriebene stetige Werthe Σ besitzt, andererseits aber längs σ_2 durchweg $= 0$ ist.

Denkt man sich nun völlig innerhalb $\mathfrak{S}$ eine Curve ζ gegeben, und die einzelnen Punkte dieser Curve ebenfalls mit ζ bezeichnet, so wird für diese Punkte ζ die Formel stattfinden:

$$\text{Max abs}\, U_\zeta^{\sigma_1, \Sigma} < (\text{Max abs}\, \Sigma_{\sigma_1})\, \lambda. \tag{II.}$$

Dabei bezeichnet λ eine positive Constante, die < 1 ist, und deren Werth lediglich abhängt von den durch die Fläche $\mathfrak{S}$ und die Curve ζ gegebenen geometrischen Verhältnissen. Man kann λ etwa die Situationsconstante der Curve ζ in Bezug auf $\mathfrak{S}$ nennen.

*) Die Richtigkeit dieser Gleichung ergiebt sich in ähnlicher Weise, wie vorhin die Richtigkeit der Formel (4.) dargethan wurde.

Siebzehntes Capitel.

Nähere Untersuchung der Fundamentalfunctionen der Kreisfläche.

§ 1.

Die Fundamentalfunctionen der Kreisfläche.

Denkt man sich irgendwo in der z-Ebene eine Kreisfläche gegeben, und den Rand derselben mit σ bezeichnet, so ist unter der Fundamentalfunction der Kreisfläche diejenige Function $U = U(x, y)$ zu verstehen, *welche auf der Kreisfläche eindeutig und stetig ist, welche ferner innerhalb der Kreisfläche harmonisch ist, [d. h. den Bedingungen*

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \textit{ stetig}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

entsprechend], und welche endlich am Rande σ beliebig vorgeschriebene Werthe Σ besitzt; wobei vorausgesetzt sein soll, dass diese Σ's längs σ stetig sind.

Wir werden im Folgenden, nach mancherlei mühsamen und weitläufigen Betrachtungen, schliesslich zu einer Formel gelangen, mittelst deren man diese Function U, falls die Σ's gegeben sind, jederzeit auszudrücken vermag.

Es sei $d\sigma$ das Element der gegebenen Kreisperipherie*), ferner ν die auf $d\sigma$ errichtete *innere* Normale, endlich E die Entfernung des Elementes $d\sigma$ von einem beliebig gegebenen Punkte x. Alsdann kann das über die ganze Peripherie erstreckte Integral:

$$w_x = \int \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\log \frac{1}{E}\right) d\sigma$$

auch so geschrieben werden:

$$w_x = \int \frac{(-1)}{E} \frac{\partial E}{\partial \nu}\, d\sigma = \int \frac{\cos\vartheta}{E}\, d\sigma,$$

wo ϑ den Winkel vorstellt, unter welchem die Linie $E\,(d\sigma \rightarrow x)$

*) In nachstehender Figur ist das Element $d\sigma$ mit $\alpha\beta$ bezeichnet.

gegen ν geneigt ist. Nun ist aber $\frac{\cos\vartheta}{E}\,d\sigma$ gleich dem Winkel $\alpha x \beta$ (wo α und β die beiden Endpunkte des Elementes $d\sigma$ vorstellen), also gleich der *scheinbaren Grösse* des Elementes $d\sigma$ für einen in x befindlichen Beobachter, vorausgesetzt, dass der Punkt x *innerhalb* resp. *auf* der Peripherie liegt.

Sollte nämlich x *ausserhalb* der Peripherie liegen, so könnte $\cos\vartheta$ unter Umständen *negativ* werden. Dann aber würde die scheinbare Grösse des Elementes $d\sigma$ für einen in x befindlichen Beobachter nicht durch $\left(+\frac{\cos\vartheta}{E}\,d\sigma\right)$ sondern durch $\left(-\frac{\cos\vartheta}{E}\,d\sigma\right)$ dargestellt sein.

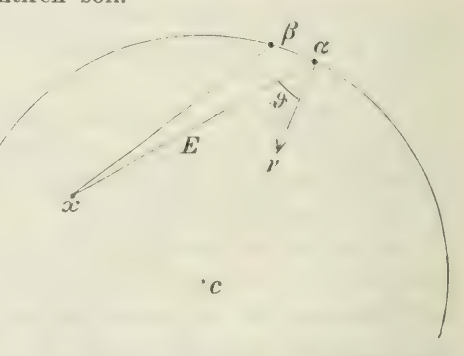
Acceptirt man also die genannte Voraussetzung, und bezeichnet man zugleich jene scheinbare Grösse mit $(d\sigma)_x$, so wird:

$$(1.)\qquad w_x = \int \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\log\frac{1}{E}\right) d\sigma = \int \frac{\cos\vartheta}{E}\, d\sigma = \int (d\sigma)_x.$$

Wir werden im Folgenden nicht nur dieses Integral, sondern namentlich auch das allgemeinere Integral

$$(2.)\qquad W_x = \int \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\log\frac{1}{E}\right) \Sigma\, d\sigma = \int \frac{\cos\vartheta}{E}\, \Sigma\, d\sigma = \int \Sigma\, (d\sigma)_x$$

näher zu untersuchen haben, wo Σ die längs des Randes σ vorgeschriebenen Werthe repräsentiren soll.



Eine sehr merkwürdige Eigenschaft dieser Functionen w_x und W_x besteht darin, dass jede derselben längs der gegebenen Peripherie *constant* ist. Lässt man nämlich in der beistehenden Figur den Punkt x nach der Peripherie rücken, so wird das von den Punkten x, α und c (dem Mittelpunkt der Peripherie) gebildete Dreieck ein *gleichschenkliges*. Und aus diesem Dreieck ergiebt sich alsdann sofort die Relation: $E = 2R\cos\vartheta$, wo R den Radius der Peripherie vorstellt. Durch Substitution dieses Werthes von E nehmen aber die Formeln (1.), (2.):

$$w_x = \int \frac{\cos\vartheta}{E}\, d\sigma,$$

$$W_x = \int \frac{\cos\vartheta}{E}\, \Sigma\, d\sigma$$

folgende Gestalt an:

(3.)
$$w_x = \pi \frac{\int d\sigma}{2R\pi} = \pi,$$
$$W_x = \pi \frac{\int \Sigma\, d\sigma}{2R\pi} = \pi \mathsf{M},$$
[vorausgesetzt, dass x *am Rande* der Kreisfläche liegt],

wo M das arithmetische Mittel derjenigen Werthe vorstellt, welche die Function Σ längs des Randes besitzt. W. z. z. w.

Der in (1.), (2.) enthaltene $\log \frac{1}{E}$ drückt sich durch die Coordinaten x, y des Punktes x und durch die Coordinaten a, b des Elementes $d\sigma$ folgendermassen aus:

$$\log \frac{1}{E} = -\frac{1}{2} \log [(x-a)^2 + (y-b)^2],$$

und genügt also der Differentialgleichung $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$. Demgemäss folgt aus (1.), (2.), dass die Functionen w und W ebenfalls dieser Differentialgleichung Genüge leisten. *Ueberhaupt erkennt* (4.) *man aus jenen Formeln* (1.), (2.) *sofort, dass die Functionen* w *und* W *innerhalb der gegebenen Kreisfläche eindeutig, stetig und harmonisch sind.* Man könnte vielleicht vermuthen, dass w und W nicht nur *innerhalb*, sondern *in ganzer Erstreckung* der Kreisfläche eindeutig und stetig seien. Das aber ist *nicht* der Fall. In der That ergiebt sich z. B. aus (1.), dass $w_x = 2\pi$ oder $= \pi$ ist, je nachdem der Punkt x *innerhalb* der Kreisfläche oder an ihrem Rande liegt.

Es ist nämlich nach (1.): $w_x = \int (d\sigma)_x$; und hieraus folgt, mittelst der geometrischen Bedeutung von $(d\sigma)_x$, sofort, dass $w_x = 2\pi$ ist, sobald der Punkt x *innerhalb* der Kreisfläche liegt. Befindet sich andrerseits der Punkt x am *Rande* dieser Fläche, so wird nach (3.): $w_x = \pi$.

Diese Function w_x hat somit im Innern der Fläche einen *constanten Werth* 2π, der jedoch beim Uebergange zum Rande *plötzlich sinkt* von 2π auf π. Wir können diese Verhältnisse, falls wir die *innern* Punkte mit j, und die *Rand*punkte mit s bezeichnen, durch die Formeln andeuten:

$$(5.)\qquad \begin{cases} w_j = 2\pi, \\ w_s = \pi. \end{cases}$$

Construirt man also eine in den Punkten j und s resp. den Formeln

$$(6.)\qquad \begin{cases} \psi_j = w_j, \\ \psi_s = w_s + \pi \end{cases}$$

entsprechende Function ψ_x, *so wird diese letztere für die ganze ge-*

gebene Kreisfläche, ihren Rand mit eingeschlossen, constant, nämlich
(6a.) $=2\pi$ *sein*. D. h. *sie wird constant sein in ganzer Erstreckung der Kreisfläche.*

Einigermassen analoge Verhältnisse sind zu erwarten bei der allgemeinern Function (2.):

$$W_x = \int \Sigma (d\sigma)_x. \tag{7.}$$

In der That wird es, ebenso wie für w das ψ eingeführt wurde, ebenso auch hier zweckmässig sein, an Stelle von W eine neue Function Ψ einzuführen mittelst der Formeln:

$$\begin{cases} \Psi_j = W_j, \\ \Psi_s = W_s + \pi\Sigma_s. \end{cases} \tag{8.}$$

alsdann aber wird sich zeigen, *dass diese neue Function Ψ_x eindeutig und stetig ist in ganzer Erstreckung der gegebenen Kreisfläche.*

Um näher hierauf einzugehen, markiren wir irgendwo am Rande der Kreisfläche einen festen Punkt α, bezeichnen den in α vorhandenen Werth Σ_α der Kürze willen mit A, und subtrahiren von der Formel (7.) die mit A multiplicirte Formel (1.):

$$\mathsf{A} w_x = \mathsf{A}\int (d\sigma)_x, \tag{9.}$$

wodurch sich ergiebt:

$$W_x - \mathsf{A} w_x = \int (\Sigma - \mathsf{A})(d\sigma)_x. \tag{10.}$$

Sondern wir nun, mittelst eines kleinen um α als Mittelpunkt beschriebenen Hülfskreises $\mathfrak{A}$, sämmtliche Elemente $d\sigma$ in solche Elemente $d\sigma'$, die innerhalb $\mathfrak{A}$, und in solche Elemente $d\sigma''$, die ausserhalb $\mathfrak{A}$ liegen, so können wir die Formel (10.) so schreiben:

$$W_x - \mathsf{A} w_x = \underbrace{\int (\Sigma - \mathsf{A})(d\sigma')_x}_{U_x} + \underbrace{\int (\Sigma - \mathsf{A})(d\sigma'')_x}_{V_x}, \tag{11.}$$

das eine Integral über die $d\sigma'$, das andere über die $d\sigma''$ hinerstreckt. Da wir unter x immer nur solche Punkte verstehen, die *innerhalb* oder *am Rande* der gegebenen Kreisfläche liegen, so sind die $(d\sigma)_x$, $(d\sigma')_x$, $(d\sigma'')_x$, ihrer geometrischen Bedeutung zufolge, sämmtlich *positiv*. Auch ist das über den ganzen Rand jener Fläche erstreckte Integral $\int (d\sigma)_x$ stets $< 2\pi$; um so mehr also auch $\int (d\sigma')_x < 2\pi$. Denn dieses letztere Integral soll sich selbstverständlich nur über die Elemente $d\sigma'$, also nur über diejenigen der Elemente $d\sigma$ erstrecken, welche innerhalb des kleinen Hülfskreises $\mathfrak{A}$ liegen. Beachtet man diese Bemerkungen, und bezeichnet man ausserdem den absolut grössten Werth der Function $(\Sigma - \mathsf{A})$ innerhalb des Krei-

ses $\mathfrak{A}$ mit M, so ergiebt sich aus (11.):

$$\text{abs}\, U_x < \int [\text{abs}\, (\Sigma - \mathsf{A})]\, (d\sigma')_x \leq M \int (d\sigma')_x < M \cdot 2\pi, \tag{12.}$$

welche Lage der Punkt x innerhalb oder am Rande der gegebenen Kreisfläche auch besitzen mag.

Nach unserer Voraussetzung ist nun Σ längs des Kreisrandes σ *stetig*. Gleiches gilt daher auch von der Function:

$$\Sigma - \mathsf{A} = \Sigma_s - \mathsf{A} = \Sigma_s - \Sigma_\alpha. \tag{13.}$$

Auch wird diese letztere Function $= 0$ werden, sobald man den variablen Randpunkt s nach α rücken lässt. Folglich wird man das in (12.) enthaltene M, d. i. den absolut grössten Werth der Function $(\Sigma - \mathsf{A})$ innerhalb des Hülfskreises $\mathfrak{A}$, durch Verkleinerung dieses Hülfskreises beliebig klein machen können. Und dies überträgt sich, vermöge jener Formel (12.), auf das abs U_x. Bezeichnet also ε einen *ad libitum* gegebenen Kleinheitsgrad, so kann man das abs U_x durch gehörige Verkleinerung des um den festen Punkt α beschriebenen Hülfskreises $\mathfrak{A}$ z. B. kleiner als $\frac{1}{3}\varepsilon$ machen; wobei die augenblickliche Lage des Punktes x (innerhalb oder am Rande der gegebenen Kreisfläche) völlig *gleichgültig* bleibt.

Solches ausgeführt gedacht, beschreiben wir um α einen zweiten noch kleinern Hülfskreis $\mathfrak{a}$, und lassen denselben so klein werden, dass für alle von ihm umschlossenen Punkte x die Schwankung der Function V_x ebenfalls $< \frac{1}{3}\varepsilon$ ist.

Dass solches ausführbar ist, unterliegt keinem Zweifel. Denn das in (11.) mit V_x bezeichnete Integral erstreckt sich nur über die Elemente $d\sigma''$, d. i. nur über denjenigen Theil der gegebenen Peripherie, welcher *ausserhalb* des Hülfskreises $\mathfrak{A}$ liegt. Folglich ist dieses V_x für die *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegenden Punkte x durchweg *stetig*.

Solches ausgeführt, sind alsdann offenbar die Schwankungen der Function $(U_x + V_x)$ für alle innerhalb $\mathfrak{a}$ befindlichen Punkte x kleiner als ε. Gleiches gilt daher auch von der mit $(U_x + V_x)$ identischen Function $(W_x - \mathsf{A} w_x)$, vgl. (11.).

Wir wollen sofort noch einen Schritt weiter gehen, nämlich um den festen Punkt α einen neuen noch kleineren Hülfskreis $\mathfrak{a}^0$ beschreiben, und denselben so klein uns denken, dass die (stetige und in α verschwindende) Function $\pi(\Sigma - \mathsf{A})$ ihrem absoluten Betrage nach innerhalb $\mathfrak{a}^0$ überall kleiner als jenes ε ist.

Alsdann werden also, um die Hauptsache zusammenzufassen, *innerhalb des um α beschriebenen Hülfskreises $\mathfrak{a}^0$ einerseits die Schwankungen der Function*

$$F_x = W_x - \mathsf{A} w_x, \tag{14.}$$

und andererseits die absoluten Werthe der Function

$$f_s = \pi(\Sigma_s - \mathsf{A}) \tag{15.}$$

durchweg kleiner als ε sein, wo ε den zu Anfang ad libitum gewählten Kleinheitsgrad vorstellt. Dabei ist, was die Formel (14.) betrifft, wohl im Auge zu behalten, dass x als Collectivbezeichnung dient für *alle Punkte der gegebenen Kreisfläche, ihren Rand mit eingeschlossen*, also als Collectivbezeichnung für sämmtliche Punkte j, s.

Dies constatirt, wollen wir nun statt der Functionen W, w die ihnen adjungirten Functionen Ψ, ψ in den Vordergrund treten lassen. Nach (6.) und (8.) ist:

$$\begin{cases}\Psi_j = W_j, \\ \Psi_s = W_s + \pi\Sigma_s,\end{cases} \qquad \begin{cases}\psi_j = w_j \\ \psi_s = w_s + \pi,\end{cases}$$

und folglich:

$$\begin{cases}\Psi_j - \mathsf{A}\psi_j = (W_j - \mathsf{A}w_j), \\ \Psi_s - \mathsf{A}\psi_s = (W_s - \mathsf{A}w_s) + \pi(\Sigma_s - \mathsf{A}),\end{cases}$$

also mit Rücksicht auf die in (14.), (15.) eingeführten Bezeichnungen:

$$\begin{cases}\Psi_j - \mathsf{A}\psi_j = F_j, \\ \Psi_s - \mathsf{A}\psi_s = F_s + f_s,\end{cases}$$

oder, weil ψ_x [vergl. (6a.)] auf der ganzen Kreisfläche, ihren Rand mit eingeschlossen, *constant*, nämlich $= 2\pi$ ist:

$$\begin{cases}\Psi_j = 2\pi\mathsf{A} + F_j, \\ \Psi_s = 2\pi\mathsf{A} + F_s + f_s.\end{cases} \tag{16.}$$

Aus diesen Formeln (16.) aber folgt mit Rücksicht auf die Ergebnisse (14.), (15.), dass die Schwankungen der Function Ψ_x innerhalb des um α beschriebenen Hülfskreises $\mathfrak{a}^0$ überall kleiner als 3ε sind.

Auf die Gefahr hin, zu weitläufig zu werden, will ich das eben Gesagte noch ein wenig weiter erläutern. Sind j, j_1 irgend zwei Punkte innerhalb der gegebenen Kreisfläche, und s, s_1 irgend zwei Punkte an ihrem Rande, so sind die Schwankungen der Function Ψ (16.) theils von der Form:

$$\Psi_j - \Psi_{j_1} = F_j - F_{j_1}, \tag{α.}$$

theils von der Form:

$$\Psi_j - \Psi_s = F_j - (F_s + f_s), \tag{β.}$$

theils endlich von der Form:

$$\Psi_s - \Psi_{s_1} = (F_s + f_s) - (F_{s_1} + f_{s_1}). \tag{γ.}$$

So lange aber j, j_1 und s, s_1 innerhalb des Kreises $\mathfrak{a}^0$ bleiben, ist jeder dieser Ausdrücke (α.), (β.), (γ.), zufolge der Sätze (14.), (15.), seinem absoluten Betrage nach kleiner als 3ε, nämlich der absolute Werth von (α.) kleiner als ε, der von (β.) kleiner als 2ε, und der von (γ.) kleiner als 3ε.

Innerhalb des um den Randpunkt α beschriebenen Hülfskreises $\mathfrak{a}^0$ sind also die Schwankungen der Function Ψ kleiner als 3ε, wo das ε einen zu Anfang *ad libitum* gewählten Kleinheitsgrad vorstellt. Mit andern Worten: *Die Function Ψ ist in jenem Punkte α stetig.* Und solches gilt offenbar für *jeden beliebigen* Randpunkt; denn α war ja zu Anfang auf dem Rande der gegebenen Kreisfläche ganz beliebig gewählt. Dass andererseits die Function Ψ auch stetig ist für jeden *innern* Punkt j, bedarf keiner Erläuterung, folgt nämlich unmittelbar aus der für Ψ gegebenen Definition (8.). Wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

Es seien am Rande σ der gegebenen Kreisfläche irgend welche längs σ stetige Werthe Σ vorgeschrieben. Setzt man alsdann:

$$W_x = \int \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\log \frac{1}{E}\right) \Sigma\, d\sigma = \int \frac{\cos \vartheta}{E} \Sigma\, d\sigma = \int \Sigma\, (d\sigma)_x, \tag{17.}$$

und construirt man ferner die den Formeln:

$$\begin{cases} \Psi_j = W_j, \\ \Psi_s = W_s + \pi \Sigma_s \end{cases} \tag{18.}$$

entsprechende Function Ψ, so wird diese letztere auf der ganzen Kreisfläche, ihren Rand mit eingeschlossen, eindeutig und stetig sein. Oder kürzer ausgedrückt: *Sie wird eindeutig und stetig sein in ganzer Erstreckung der Kreisfläche.* [Vgl. die Bemerkung pg. 393.]

Innerhalb der Kreisfläche ist diese Function Ψ, nach (18.), *identisch* mit W, mithin, ebenso wie W selber [vergl. (4.)], *harmonisch.* Beachtet man ausserdem, dass das in (18.) enthaltene W_s *constant,* nämlich $= \pi \mathsf{M}$ ist [vgl. (3.)], so kann man den soeben ausgesprochenen Satz folgendermassen vervollständigen:

Die in (17.) *genannte Function W besitzt am Rande der Kreisfläche einen constanten Werth $\pi \mathsf{M}$. Setzt man nun*

$$\begin{cases} \Psi_j = W_j, \\ \Psi_s = \pi \mathsf{M} + \pi \Sigma_s, \end{cases} \tag{19.}$$

so wird die durch diese beiden Formeln definirte Function Ψ in ganzer Erstreckung der Kreisfläche eindeutig und stetig, überdies aber innerhalb der Kreisfläche harmonisch sein.

Genau dieselben Eigenschaften besitzt offenbar, falls man unter H, K beliebige Constanten versteht, auch die Function $H\Psi + K$, also z. B. die Function:

$$U = \frac{1}{\pi} \Psi - \mathsf{M}. \tag{20.}$$

Die analytischen Ausdrücke dieser letztern Function sind für alle Punkte j, s sofort angebbar. Es ist nämlich nach (20.):

$$\begin{cases} U_j = \frac{1}{\pi}\,\Psi_j - \mathsf{M}, \\ U_s = \frac{1}{\pi}\,\Psi_s - \mathsf{M}, \end{cases}$$

also nach (19.):

$$(21.)\qquad \begin{cases} U_j = \frac{1}{\pi}\,W_j - \mathsf{M}, \\ U_s = \Sigma_s. \end{cases}$$

Diese Function U ist also nicht nur *in Erstreckung* der Kreisfläche eindeutig und stetig, und *innerhalb* derselben harmonisch, sondern überdies auch *am Rande* derselben [wie aus (21.) folgt] *identisch mit den vorgeschriebenen* Σ*'s*. Es wird mithin diese Function U die den vorgeschriebenen Σ's entsprechende *Fundamentalfunction* der Kreisfläche sein [vgl. die Definition (20a.) pg. 396]. Demgemäss gelangt man auf Grund der Formeln (21.), indem man daselbst für W_j und M ihre aus (17.) und (3.) ersichtlichen Werthe substituirt, zu folgendem Satz:

Das Kreistheorem. — *Sind am Rande σ einer gegebenen Kreisfläche irgend welche längs σ stetige Werthe Σ vorgeschrieben, so ist die diesen Werthen Σ zugehörige Fundamentalfunction U sofort angebbar. Einerseits nämlich wird dieselbe in den Randpunkten mit jenen Σ's identisch sein; und andererseits wird dieselbe in allen innern Punkten j darstellbar sein durch die Formel*:

$$(22.)\qquad U_j = \frac{1}{\pi}\int\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\log\frac{1}{E}\right) - \frac{1}{2R}\right]\Sigma\,d\sigma.$$

Diese Formel kann man auch so schreiben:

$$(22a.)\qquad U_j = \frac{1}{\pi}\int\left[\frac{\cos\vartheta}{E} - \frac{1}{2R}\right]\Sigma\,d\sigma,$$

oder auch so:

$$(22b.)\qquad U_j = \frac{1}{\pi}\int\Sigma\,(d\sigma)_j - \frac{1}{2\pi R}\int\Sigma\,d\sigma,$$

oder endlich auch so:

$$(22c.)\qquad U_j = \frac{1}{\pi}\int\Sigma\,(d\sigma)_j - \frac{1}{2\pi}\int\Sigma\,(d\sigma)_c.$$

Dabei bezeichnet σ den Rand, c das Centrum und R den Radius der Kreisfläche. Ferner bezeichnen $(d\sigma)_j$ und $(d\sigma)_c$ die scheinbaren Grössen irgend eines Randelementes $d\sigma$ für einen in j respective in c befindlichen Beobachter. Ausserdem bezeichnet ν die innere Normale

des Elementes $d\sigma$, E die Entfernung des Punktes j vom Element $d\sigma$, und ϑ den von v und E gebildeten Winkel [vgl. die Figur pg. 404].

Bemerkung. — Setzt man $\Sigma =$ Const., z. B. $= 1$, so muss [nach Satz (18.) pg. 395] das zugehörige U ebenfalls $= 1$ sein, für sämmtliche Punkte der betrachteten Fläche. Hiermit aber sind die vorstehenden Formeln in Einklang. So z. B. geht die rechte Seite der Formel (22b.) für $\Sigma = 1$ über in:

$$\frac{1}{\pi}\int (d\sigma)_j - \frac{1}{2\pi R}\int d\sigma,$$

d. i. in

$$\frac{1}{\pi}\cdot 2\pi - \frac{1}{2\pi R}\, 2\pi R = 1. \qquad \textit{Q. e. d.}$$

Der gegenwärtige Paragraph repräsentirt, seinem ganzen Inhalt nach, nur einen speciellen Fall meiner *Methode des arithmetischen Mittels*. Diese Methode ist von mir theils in den Berichten der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. vom April und October 1870, theils auch in den Math. Annalen (Bd. 11 pg. 558) exponirt worden. In mehr ausführlicher Gestalt findet man dieselbe dargestellt in meinem Werke über das *Logarithmische und Newton'sche Potential* (Leipzig, bei Teubner, 1877), über welches referirt ist in den Math. Annalen (Bd. 13, pg. 255).

Uebrigens ist der in diesem Paragraph behandelte Gegenstand derselbe, mit dem auch *Schwarz* (XV. Jahrgang der Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft in Zürich, 1870 und Crelle's Journal Bd. 74, pg. 218) und *Prym* (Crelle's Journal Bd. 73, pg. 340) sich beschäftigt haben; wobei bemerkt sein mag, dass der Schwarz-sche Aufsatz einige Bemerkungen über meine Schriften enthält, die entweder irrthümlich sind, oder wenigstens leicht zu irrthümlichen Auffassungen Veranlassung geben können.

Man findet solche Bemerkungen in dem genannten Aufsatz (Crelle's Journal Bd. 74) z. B. auf Seite 220 und 240. Wollte irgend ein Autor den Satz drucken lassen: *Wenn in einem rechtwinkligen Parallelepipedum alle Kanten von gleicher Länge sind, so ist das Parallelepipedum ein Würfel;* so würde es für den Recensenten doch wohl wenig angemessen sein zu bemerken, jener Autor „*fordere*" die Gleichheit *aller* Kanten, und habe also die für den Satz nothwendigen Bedingungen nicht auf das geringste Maass reducirt. — Gewiss habe ich in meinen Schriften sehr häufig Sätze ausgesprochen, ohne in ihnen die Bedingungen auf das geringste Maass zu reduciren. Aber ich habe in solchen Fällen eine derartige Reduction auch niemals beabsichtigt gehabt, — geschweige denn behauptet, dass in den betreffenden Sätzen eine derartige Reduction von mir bewerkstelligt sei. Wenn *Schwarz* oder irgend ein anderer Mathematiker eine solche (in vielen Fällen recht schwierige) *Reduction der Bedingungen auf ihr geringstes Maass* ausführt, oder auch nur Schritte thut, um einer solchen sich zu

nähern, so halte ich das sicherlich für sehr verdienstlich. Aber man darf mir doch keinen Vorwurf daraus machen, dass bei meinen Untersuchungen noch Fragen *offen* bleiben, mit denen Andere sich beschäftigen können.

Die genannten beiden Autoren, *Schwarz* und *Prym*, haben in ihren Aufsätzen auf mehrere meiner Schriften Bezug genommen; aber merkwürdiger Weise haben sie dabei meinen Aufsatz über die *Methode des arithmetischen Mittels*, der hier vorzugsweise in Betracht zu ziehen gewesen wäre, völlig unbeachtet gelassen. Doch würde es Unrecht sein, denselben hieraus einen Vorwurf zu machen. Denn meine Methode des arithmetischen Mittels war zu jener Zeit, als Prym und Schwarz ihre Aufsätze im Borchardt'schen Journal drucken liessen, allerdings schon publicirt, aber nur in ihren Hauptumrissen, fast mit blosser Angabe der sich ergebenden Resultate, und mit Uebergehung vieler zur festen Begründung erforderlicher Betrachtungen. Erst viel später habe ich Zeit gefunden, jene Untersuchungen in ausführlicher Weise darzulegen, in dem schon citirten Werk über das Logarithmische und Newton'sche Potential (Teubner 1877).

Jedenfalls dürfte meine *Methode des arithmetischen Mittels* gegenüber den Methoden der Herren *Schwarz* und *Prym* den Vorzug verdienen, nicht nur wegen ihrer grössern *Einfachheit*, sondern namentlich auch wegen ihrer grössern *Allgemeinheit*, indem sie nicht nur auf den Kreis, sondern auf eine sehr grosse Anzahl von *Curven in der Ebene* und von *Flächen im Raume*, und nicht nur auf die *innerhalb* dieser Curven oder Flächen, sondern ebenso auch auf die *ausserhalb* derselben liegenden Gebiete anwendbar ist.

§ 2.

Sich anschliessende Betrachtungen über die Kreisfläche.

Wir construiren innerhalb σ eine concentrische Peripherie τ, und stellen uns die Aufgabe, den grössten Werth näher zu untersuchen, den die Differenz

$$U_j - U_{j_1} \tag{1.}$$

anzunehmen vermag, falls j und j_1 zwei Punkte vorstellen, die längs jener Peripherie τ in beliebiger Bewegung begriffen sind.

Nach (22b.) pg. 410 ist:

$$U_j = \frac{1}{\pi} \int \Sigma \, (d\sigma)_j - \frac{1}{2\pi R} \int \Sigma \, d\sigma, \tag{2.}$$

woraus z. B. [vgl. die Bemerkung pg. 411] für $\Sigma = 1$ die Formel folgt:

$$1 = \frac{1}{\pi} \int (d\sigma)_j - \frac{1}{2\pi R} \int d\sigma.$$

Multiplicirt man aber diese letzte Formel mit einer *willkürlichen Constanten* A, und subtrahirt man sie sodann von (2.), so folgt:

$$(3.) \qquad U_j - A = \frac{1}{\pi} \int (\Sigma - A)(d\sigma)_j - \frac{1}{2\pi R} \int (\Sigma - A)\, d\sigma.$$

Vertauscht man hier j mit j_1, und bringt man die so entstehende neue Formel von (3.) in Abzug, so erhält man:

$$(4.) \qquad U_j - U_{j_1} = \frac{1}{\pi} \int (\Sigma - A)\,[(d\sigma)_j - (d\sigma)_{j_1}],$$

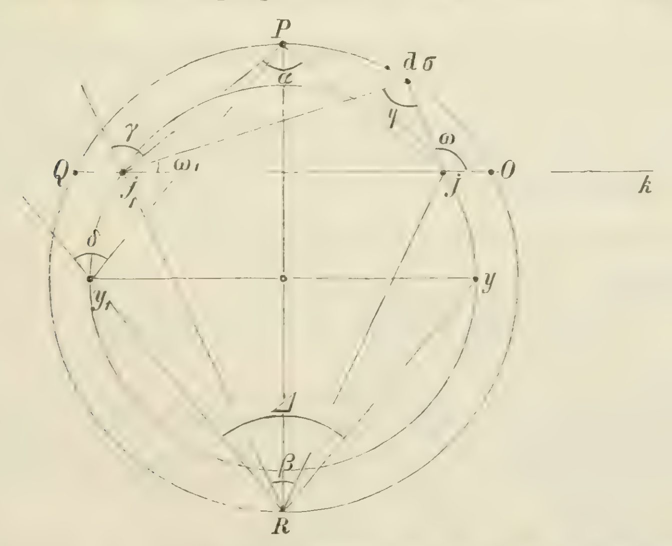
oder, falls man die willkürlich zu wählende Constante $A = \frac{K+G}{2}$ setzt:

$$(5.) \qquad U_j - U_{j_1} = \frac{1}{\pi} \int \left(\Sigma - \frac{K+G}{2}\right) [(d\sigma)_j - (d\sigma)_{j_1}].$$

Dabei mag unter K und G das Minimum und Maximum der am Rande σ vorgeschriebenen Werthe Σ verstanden werden:

$$(6.) \qquad K = \text{Min}\,\Sigma, \quad G = \text{Max}\,\Sigma.$$

Construirt man nun [vgl. die Figur] zwei vom Anfangspunkt des Elementes $d\sigma$ nach j und j_1 laufende Linien E und E_1, und bezeichnet man die Neigungswinkel dieser beiden Linien gegen die



Gerade $j_1 j k$ mit ω und ω_1, andererseits aber den Neigungswinkel von E und E_1 gegen einander mit η, so ist offenbar:

$$(\alpha.) \qquad \eta = \omega - \omega_1.$$

Ferner ergiebt sich aus der Figur sofort:

$$(\beta.)\qquad \begin{aligned}(d\sigma)_j &= d\omega,\\ (d\sigma)_{j_1} &= d\omega_1,\end{aligned}$$

falls man nämlich unter $d\omega$ und $d\omega_1$ die dem Element $d\sigma$ correspondirenden Zuwüchse der Winkel ω und ω_1, d. i. diejenigen Zuwüchse versteht, welche ω und ω_1 annehmen, sobald die Spitze des Winkels η das Element $d\sigma$ von rechts nach links durchwandert.

Aus den Formeln (α.), (β.) folgt sofort:

$$(\gamma.)\qquad (d\sigma)_j - (d\sigma)_{j_1} = d(\omega - \omega_1) = d\eta;$$

so dass also die Gleichung (5.) die Gestalt erhält:

$$(7.)\qquad U_j - U_{j_1} = \frac{1}{\pi}\int\left(\Sigma - \frac{K+G}{2}\right)d\eta.$$

Der Rand σ der gegebenen Kreisfläche zerfällt durch die verlängerte Linie jj_1 und durch ein in der Mitte von jj_1 auf jj_1 errichtetes Perpendikel in vier Theile:

$$OP,\quad PQ,\quad QR,\quad RO.$$

Bezeichnet man die entsprechenden Theile des Integrals (7.) respective mit

$$[OP],\quad [PQ],\quad [QR],\quad [RO],$$

so wird

$$(8.)\qquad U_j - U_{j_1} = \frac{1}{\pi}\Big([OP] + [PQ] + [QR] + [RO]\Big),$$

mithin:

$$(9.)\qquad \text{abs}\,(U_j - U_{j_1}) < \frac{1}{\pi}\Big(\text{abs}\,[OP] + \text{abs}\,[PQ] + \text{abs}\,[QR] + \text{abs}\,[RO]\Big).$$

Dabei ist also z. B.

$$[OP] = \int_O^P\left(\Sigma - \frac{K+G}{2}\right)d\eta,$$

und folglich:

$$\text{abs}\,[OP] < \int_O^P \text{abs}\left(\Sigma - \frac{K+G}{2}\right)\cdot\text{abs}\,(d\eta).$$

Nun liegen aber [vgl. (6.)] sämmtliche Werthe Σ, ihrer Grösse nach, zwischen K und G, mithin sämmtliche Werthe des Ausdruckes $\left(\Sigma - \frac{K+G}{2}\right)$ zwischen $\frac{K-G}{2}$ und $\frac{G-K}{2}$. Es ist also durchweg: $\text{abs}\left(\Sigma - \frac{K+G}{2}\right) < \frac{G-K}{2}$. Somit folgt:

$$\text{abs}\,[OP] < \frac{G-K}{2}\int_O^P \text{abs}\,(d\eta).$$

Beachtet man nun, dass η zwischen O und P beständig im Wachsen begriffen, mithin $d\eta$ beständig positiv, folglich abs $(d\eta)$ beständig $= d\eta$ ist, so ergiebt sich für das in der letzten Formel vorhandene Integral der Werth $(\eta_P - \eta_O)$, d. i. der Werth $(\alpha - 0)$. Denn η hat in P den Werth α, und in O den Werth 0 [vgl. die Figur]. Man erhält also die erste Formel des folgenden Systems:

$$\text{abs}\,[OP] < \frac{(G-K)\,\alpha}{2}, \qquad \text{abs}\,[PQ] < \frac{(G-K)\,\alpha}{2},$$

$$\text{abs}\,[QR] < \frac{(G-K)\,\beta}{2}, \qquad \text{abs}\,[RO] < \frac{(G-K)\,\beta}{2},$$

dessen drei übrige Formeln sich in analoger Weise ergeben. Dabei bezeichnen α und β die in der Figur bei P und R markirten Winkel. — Somit folgt aus (9.):

$$\text{abs}\,(U_j - U_{j_1}) < \frac{(G-K)(\alpha+\beta)}{\pi}. \tag{10.}$$

Nun ist [was die in der Figur mit α, β, γ, δ, Δ bezeichneten Winkel betrifft] offenbar: $\alpha + \beta = 2\gamma$, ferner $\gamma < \delta$, und $\delta = \Delta$, mithin:

$$\alpha + \beta = 2\gamma < 2\delta = 2\Delta,$$

und folglich:

$$\text{abs}\,(U_j - U_{j_1}) < \frac{(G-K)\,.\,2\Delta}{\pi}. \tag{11.}$$

Dabei bezeichnet Δ [vgl. die Figur] die scheinbare Grösse des (mit jj_1 parallelen) Durchmessers yy_1 für einen in R befindlichen Beobachter, oder, besser ausgedrückt, denjenigen Maximalwerth, den die scheinbare Grösse des Durchmessers yy_1 für einen längs des Kreisrandes σ fortschreitenden Beobachter anzunehmen im Stande ist. Setzt man $\frac{2\Delta}{\pi} = \varkappa$, so gelangt man zu folgendem Resultat:

Erster Zusatz zum Kreistheorem. — *Es sei σ der Rand einer gegebenen Kreisfläche, ferner τ eine kleinere und zu σ concentrische Kreisperipherie. Die Radien von σ und τ mögen respective R und r heissen; mithin $R > r$.*

Versteht man nun unter U irgend eine Fundamentalfunction der gegebenen Kreisfläche [d. i. eine Function, die *auf* dieser Fläche eindeutig und stetig, und *innerhalb* derselben harmonisch ist], *und versteht man ferner unter K und G das Minimum und Maximum der Randwerthe von U, so wird für zwei längs τ in beliebiger Bewegung begriffene Punkte j und j_1 fortdauernd die Formel gelten:*

$$\text{abs}\,(U_j - U_{j_1}) < (G-K)\,\varkappa. \tag{12.}$$

Dabei bezeichnet $\varkappa$ eine positive Constante, die < 1 ist, und deren Werth lediglich abhängt von den beiden Radien R, r.

Construirt man nämlich irgend einen Durchmesser der Peripherie τ, und versteht man unter Δ den Maximalwerth der scheinbaren Grösse dieses Durchmessers für einen längs σ fortschreitenden Beobachter [vgl. die Figur pg. 413], *so ist:*

$$\varkappa = \frac{2\,\Delta}{\pi}, \text{ also stets} < 1. \tag{13.}$$

Hieraus folgt übrigens sofort, dass $\varkappa$ auch so darstellbar ist:

$$\varkappa = \frac{4}{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{r}{R}, \tag{14.}$$

wo Arctg x *den kleinsten Winkel vorstellt, dessen Tangente $= x$ ist.*

Es sei jetzt innerhalb σ irgend eine Curve ζ gegeben, und die einzelnen Punkte dieser Curve seien ebenfalls mit ζ bezeichnet. Alsdann finden für diese Punkte ζ, zufolge des Satzes (I.), (Ib.) pg. 398, die Formeln statt:

$$\begin{aligned} K \leq U_\zeta < G, \\ DU_\zeta < G - K, \end{aligned} \tag{15.}$$

wo K und G die schon genannten Bedeutungen haben.

Die Function U wird aber, weil sie eine Fundamentalfunction der von σ begrenzten Kreisfläche ist, *eo ipso* auch eine Fundamentalfunction der *kleineren* von τ begrenzten Kreisfläche sein. Liegt daher die Curve ζ, wie wir annehmen wollen, nicht nur innerhalb σ, sondern auch innerhalb τ, so ergeben sich, zufolge des citirten Satzes, für diese *kleinere* Kreisfläche die mit (15.) analogen Formeln:

$$\begin{aligned} k < U_\zeta < g, \\ DU_\zeta < g - k; \end{aligned} \tag{16.}$$

dabei bezeichnen k und g das Minimum und Maximum derjenigen Werthe, welche U längs τ besitzt. Nach (12.) ist aber

$$g - k < (G - K)\,\varkappa,$$

wodurch die letzte der Formeln (16.) übergeht in:

$$DU_\zeta < (G - K)\,\varkappa. \tag{17.}$$

Bezeichnet man schliesslich die Werthe von U am Rande σ der ursprünglich gegebenen Kreisfläche, ebenso wie früher, mit Σ, so ist offenbar $K = \text{Min}\,\Sigma$, ferner $G = \text{Max}\,\Sigma$, endlich $G - K = D\Sigma$; so dass also die Formeln (15.), (17.) auch so darstellbar sind:

$$\text{(18.)}\qquad \begin{aligned} \text{Min}\,\Sigma < U_\zeta &< \text{Max}\,\Sigma, \\ D U_\zeta &< D\Sigma, \\ D U_\zeta &< (D\Sigma)\,\varkappa. \end{aligned}$$

Demgemäss gelangt man zu folgendem Resultat:

Der erste Zusatz zum Kreistheorem, in etwas anderer Gestalt. *Am Rande σ einer gegebenen Kreisfläche seien irgend welche längs σ stetige Werthe Σ vorgeschrieben. Ferner sei gebildet die diesen Σ's entsprechende Fundamentalfunction:*

$$U = U^{\sigma,\,\Sigma}.$$

Denkt man sich nun innerhalb der Kreisfläche eine mit σ concentrische Peripherie τ, und innerhalb τ irgend eine Curve ζ gegeben, und die einzelnen Punkte dieser Curve ebenfalls mit ζ bezeichnet, so gelten folgende Formeln:

$$\text{(K I.)}\qquad \begin{aligned} \text{Min}\,\Sigma < U_\zeta^{\sigma,\,\Sigma} &< \text{Max}\,\Sigma, \\ D U_\zeta^{\sigma,\,\Sigma} &< (D\Sigma)\,\varkappa. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\varkappa$ eine positive Constante, die < 1 ist, und deren Werth lediglich abhängt von den Radien R und r der beiden Kreise σ und τ. Es besitzt nämlich diese Constante $\varkappa$ den in (13.), (14.) genannten Werth.

§ 3.

Weitere Betrachtungen über die Kreisfläche.

Sind am Rande σ der gegebenen Kreisfläche irgend welche längs σ *stetige* Werthe Σ in beliebiger Weise vorgeschrieben, so liefert die Formel (22c.) pg. 410

$$\text{(1.)}\qquad U_j = \frac{1}{\pi}\int \Sigma\,[(d\sigma)_j - \tfrac{1}{2}\,(d\sigma)_c]$$

eine Function U, welche *auf* der Kreisfläche eindeutig und stetig, *innerhalb* derselben harmonisch, und *am Rande* derselben identisch mit jenen Σ's ist. Doch liefert die Formel [wie an der citirten Stelle ausdrücklich hervorgehoben wurde] nur diejenigen Werthe, welche U *innerhalb* der Kreisfläche besitzt. Demgemäss wird bei den jetzt folgenden, auf der Formel (1.) basirenden Betrachtungen,
(2.) beständig im Auge zu behalten sein, *dass daselbst unter j nur innere Punkte zu verstehen sind.* [Eine besondere Formel für die *Randwerthe* von U ist nicht weiter nöthig, weil diese identisch mit den

gegebenen Σ's sind.] Der in (1.) in der eckigen Klammer enthaltene Ausdruck:

$$(3.)\qquad (d\sigma)_j - \tfrac{1}{2}\,(d\sigma)_c$$

ist, wie man leicht erkennt [vgl. die Erläuterung auf pg. 419], *stets positiv.* Demgemäss folgt aus (1.) sofort:

$$(4.)\qquad \text{abs}\, U_j < \frac{1}{\pi}\int (\text{abs}\,\Sigma)\,[(d\sigma)_j - \tfrac{1}{2}\,(d\sigma)_c].$$

Wir wollen jetzt die Randfunction Σ uns der Art gegeben denken, dass sie auf σ längs einzelner Strecken δ', δ'', δ''' ... *verschwindet*, dagegen längs der nach Absonderung von δ', δ'', δ''' ... noch übrig bleibenden Strecken β', β'', β''' ... irgend welche *Werthe* besitzt. Dabei soll Σ, nach wie vor, längs des ganzen Randes σ *stetig sein.* Es soll also angenommen werden, dass Σ in den *Endpunkten* der Segmente β', β'', β''' ... *verschwindet*, zugleich aber längs jedes einzelnen solchen Segmentes *stetig* ist.

Solches festgesetzt, reducirt sich das Integral (4.) auf die einzelnen Strecken β', β'', β''', ... Man erhält daher:

$$\text{abs}\, U_j < \frac{1}{\pi}\left[\int_{\beta'}(\text{abs}\,\Sigma)\,[(d\sigma)_j - \tfrac{1}{2}(d\sigma)_c] + \right.$$
$$\left. + \int_{\beta''}(\text{abs}\,\Sigma)\,[(d\sigma)_j - \tfrac{1}{2}(d\sigma)_c] + \cdots\right],$$

(5.) oder, falls man den *absolut grössten Werth* von Σ für sämmtliche Segmente β', β'', β''', ... mit M bezeichnet:

$$\text{abs}\, U_j \leq \frac{M}{\pi}\left[\int_{\beta'}[(d\sigma)_j - \tfrac{1}{2}(d\sigma)_c] + \int_{\beta''}[(d\sigma)_j - \tfrac{1}{2}(d\sigma)_c] + \cdots\right],$$

oder, einfacher geschrieben:

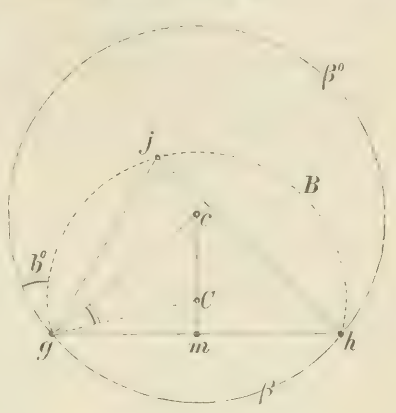
$$(6.)\qquad \text{abs}\, U_j \leq \frac{M}{\pi}\Big[[(\beta')_j - \tfrac{1}{2}(\beta')_c] + [(\beta'')_j - \tfrac{1}{2}(\beta'')_c] + \cdots\Big],$$

wo unter den $(\beta)_j$ und $(\beta)_c$ die scheinbaren Grössen der Segmente β zu verstehen sind für einen in j respective im Centrum c befindlichen Beobachter. Aus dieser Bedeutung der $(\beta)_j$ und $(\beta)_c$ ergiebt sich leicht, dass für jedwedes Segment β die Formel stattfindet:

$$(7.)\qquad (\beta)_j - \tfrac{1}{2}(\beta)_c = \pi - b_j,$$

wo b_j denjenigen Winkel repräsentirt, unter welchem der Bogen β gegen einen *continen* und durch j gehenden Kreisbogen geneigt ist. Dabei sind unter zwei continen Kreisbogen solche zu verstehen, deren Endpunkte coincidiren.

Erläuterung. — In beistehender Figur ist die gegebene, um das Centrum c beschriebene Peripherie σ durch irgend zwei Punkte g, h in einen untern Theil β, und einen obern Theil β^0 zerlegt. Markirt man nun irgendwo *innerhalb* σ einen Punkt j, und bezeichnet man mit C das Centrum des zu β *confinen* und durch j gehenden Kreisbogens B, so ist offenbar:



$$(\beta)_j = \text{Winkel } (g\,j\,h),$$

$$(\beta)_c = \text{Winkel } (g\,c\,h),$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\beta)_j = \text{Winkel } (g\,C\,m),$$

$$\tfrac{1}{2}(\beta)_c = \text{Winkel } (g\,c\,m).$$

Hieraus aber folgt, durch Subtraction und mit Hinblick auf das in der Figur gezeichnete Dreieck $g\,c\,C$:



$$(\beta)_j - \tfrac{1}{2}(\beta)_c = \text{Winkel } (c\,g\,C).$$

Dieser Winkel $(c\,g\,C)$ ist aber offenbar identisch mit demjenigen Winkel b^0, unter welchem der Kreisbogen B gegen β^0 geneigt ist. Man erhält also:

$$(\beta)_j - \tfrac{1}{2}\,(\beta)_c = b^0 = \pi - b, \tag{f.}$$

wo b^0 die schon genannte Bedeutung besitzt, während b den *supplementaren* Winkel, d. i. denjenigen vorstellt, unter welchem der Bogen B gegen β geneigt ist.

Diese Gleichung (f.), welche in analoger Weise für jedwede *andere* Lage des innern Punktes j ableitbar ist, repräsentirt aber die zu beweisende Formel (7.). Nur ist dort statt b die genauere Bezeichnungsweise b_j angewendet.

Die mit b und b^0 bezeichneten Neigungswinkel $(B\beta^0)$ und $(B\beta)$ werden, falls man dem *innern* Punkte j andere und andere Lagen zuertheilt, offenbar stets zwischen 0 und π bleiben. Somit folgt aus (f.), dass der Werth des Ausdrucks

$$(\beta)_j - \tfrac{1}{2}(\beta)_c \tag{g.}$$

ebenfalls stets *zwischen* 0 *und* π *bleibt,* also stets *positiv ist.* Und dies wird offenbar auch dann z. B. stattfinden, wenn man den Bogen β durch ein unendlich kleines Bogenelement $d\sigma$ ersetzt; womit die oben über den Ausdruck (3.) gemachte Behauptung bewiesen ist.

Die Formel (6.) nimmt nun mit Rücksicht auf (7.) die einfachere Gestalt an:

$$\text{abs}\, U_j \leq \frac{M}{\pi}\Big[(\pi - b_j') + (\pi - b_j'') + \ldots\Big], \tag{8.}$$

wo allgemein $b_j^{(n)}$ den Winkel vorstellt, unter welchem ein zu $\beta^{(n)}$

continuer und durch j gehender Kreisbogen gegen $\beta^{(n)}$ geneigt ist. Der hier auftretende Ausdruck

$$(9.)\qquad W_j = [(\pi - b_j') + (\pi - b_j'') + \ldots]$$

ist stets positiv und stets $< \pi$, wie sogleich erläutert werden soll.

Alle Bogen β', β'', ... und δ' δ'', ... zusammengenommen repräsentiren die *ganze* Peripherie σ. Folglich ist für jedwede Lage des innern Punktes j

$$[(\beta')_j + (\beta'')_j + \cdots] + [(\delta')_j + (\delta'')_j + \cdots] = 2\pi,$$

mithin z. B. auch:

$$[(\beta')_c + (\beta'')_c + \cdots] + [(\delta')_c + (\delta'')_c + \cdots] = 2\pi.$$

Multiplicirt man aber diese beiden Gleichungen respective mit 1 und $-\frac{1}{2}$, und addirt, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (7.):

$$(10.)\qquad [(\pi - b_j') + (\pi - b_j'') + \cdots] + [(\pi - d_j') + (\pi - d_j'') + \cdots] = \pi,$$

falls man nämlich den $d_j^{(n)}$ hinsichtlich der Bogen $\delta^{(n)}$ dieselbe Bedeutung zuertheilt, welche die $b_j^{(n)}$ hinsichtlich der $\beta^{(n)}$ besitzen.

Die Winkel $b_j^{(n)}$ und $d_j^{(n)}$ liegen ihrer Natur nach stets zwischen 0 und π. Folglich sind die Differenzen $\pi - b_j^{(n)}$ und $\pi - d_j^{(n)}$ stets *positiv*. Die linke Seite der Formel (10.) wird daher *verkleinert* werden, falls man einen Theil dieser positiven Differenzen daselbst unterdrückt. Man erhält also z. B.:

$$[(\pi - b_j') + (\pi - b_j'') + \cdots] + (\pi - d_j') < \pi,$$

oder, was dasselbe ist:

$$[(\pi - b_j') + (\pi - b_j'') + \cdots] \leq d_j',$$

oder mit Rücksicht auf (9.):

$$W_j < d_j'.$$

In analoger Weise ergiebt sich offenbar auch $W_j < d_j''$, u. s. w.; so dass man folgendes Formelsystem erhält:

$$(11.)\qquad W_j \leqq d_j', \qquad W_j \leqq d_j'', \qquad W_j \leqq d_j''', \qquad \text{etc. etc.}$$

Da nun die Winkel $b_j^{(n)}$ und $d_j^{(n)}$, wie bereits mehrfach bemerkt ist, ihrer Natur nach stets zwischen 0 und π bleiben, so ergiebt sich aus (9.), *dass W_j stets positiv ist*, andererseits aus (11.), *dass W_j stets $\leqq \pi$ ist*. Q. e. d.

Dies vorangeschickt, stellen wir uns jetzt folgende Aufgabe:

(12.) *Auf der Kreisfläche sind irgend welche Curven ζ', ζ'', ζ''', ... gegeben, der Art, dass $\zeta^{(n)}$ die beiden Endpunkte des Bogens $\beta^{(n)}$ mit einander verbindet, in diesen beiden Punkten aber die Peripherie σ nicht tangirt, und überhaupt, ausser diesen beiden Punkten, keinen weiteren Punkt*

mit σ gemein hat. Es soll das Maximum derjenigen Werthe untersucht werden, welche W_j annimmt, falls der Punkt j sämmtliche Curven $\zeta', \zeta'', \zeta''', \ldots$ durchläuft.

Zu diesem Zweck zerlegen wir jedwede Curve $\zeta^{(\nu)}$ in zwei Theile, etwa (um die Vorstellung zu fixiren) in zwei *gleiche* Theile, und nennen diese Theile die *Halbcurven.* Sodann construiren wir einen zu δ' confinen Kreisbogen Δ' von solcher Lage, dass die beiden in den Endpunkten von δ' anstossenden Halbcurven*) in Erstreckung des von δ' und Δ' umschlossenen Gebietes $(\delta' \Delta')$ liegen, indem wir gleichzeitig dafür sorgen, dass der Flächeninhalt dieses Gebietes *möglichst klein* wird. Alsdann ist offenbar der gegenseitige Neigungswinkel k' der beiden Bogen δ', Δ' stets $< \pi$ (niemals $= \pi$); denn man hat zu beachten, dass jene beiden Halbcurven, ausser den beiden Endpunkten des Bogens δ', keine weiteren Punkte mit σ gemein haben. Für sämmtliche Punkte j des Gebietes $(\delta' \Delta')$ ist aber $d_j' < k'$, also:



$$d_j' < k' < \pi,$$

folglich auch nach (11.):

$$W_j \leqq k' < \pi. \qquad (13a.)$$

Und diese Formel wird also z. B. auch stattfinden für alle Punkte j der in Rede stehenden beiden Halbcurven.

Analoges gilt für δ''. Construirt man nämlich einen zu δ'' confinen Kreisbogen Δ'' von solcher Lage, dass die beiden in den Endpunkten von δ'' anstossenden Halbcurven in Erstreckung des Gebietes $(\delta'' \Delta'')$ liegen, und dass überdies der Flächeninhalt dieses Gebietes ein möglichst kleiner ist, so wird der gegenseitige Neigungswinkel k'' der beiden Bogen δ'', Δ'' stets $< \pi$ (niemals $= \pi$) sein. Und gleichzeitig wird für alle Punkte j jener beiden Halbcurven die Formel stattfinden:

$$W_j \leqq k'' < \pi. \qquad (13b.)$$

U. s. w. U. s. w.

Operirt man in analoger Weise bei *sämmtlichen* Bogen $\delta', \delta'', \delta''', \ldots$, und bezeichnet man den *grössten* der dabei zu construirenden Winkel $k', k'', k''', \ldots$ mit K, so gelangt man also zu dem

*) Nur diese *Halbcurven* sind in der Figur angegeben.

Resultat, dass für sämmtliche Punkte j *aller Halbcurven zusammengenommen* die Formel stattfindet:

$$W_j < K < \pi, \quad [j \text{ auf } \zeta', \zeta'', \zeta''', \ldots], \tag{14.}$$

oder, etwas anders geschrieben:

$$\frac{W_j}{\pi} < \frac{K}{\pi} < 1, \quad [j \text{ auf } \zeta', \zeta'', \zeta''', \ldots]. \tag{15.}$$

In dieser Formel (15.), die also gültig ist *für sämmtliche Punkte j der gegebenen Curven ζ', ζ'', ζ''', ...* repräsentirt der Bruch $\frac{K}{\pi}$ eine (15a.) von den *geometrischen Verhältnissen* abhängende *positive Constante*, deren Werth stets < 1 (niemals $= 1$) ist. Zugleich repräsentiren die Formeln (14.), (15.) die Lösung der in (12.) proponirten Aufgabe.

Wir kehren jetzt zurück zur Function U. Die nach (8.) und (9.) für jedweden Punkt j innerhalb σ geltende Formel

$$\text{abs } U_j < M \frac{W_j}{\pi} \tag{16.}$$

wird z. B. auch gültig sein für diejenigen Punkte j, *welche auf den Curven ζ', ζ'', ζ''', ... gelegen sind.* Alsdann aber subordinirt sich die rechte Seite der Formel der in (15.) angegebenen Relation; so dass man erhält:

$$\text{abs } U_j < M \frac{K}{\pi}, \quad [j \text{ auf } \zeta', \zeta'', \zeta''', \ldots]. \tag{17.}$$

Wie zu Anfang dieses Paragraphs [in (2.)] betont ist, sind unter den Punkten j durchweg solche zu verstehen, die *innerhalb* der gegebenen Kreisfläche liegen. Demgemäss wird also z. B. die Formel (17.) gültig sein für solche Punkte j, die auf den Curven ζ', ζ'', ζ''', ..., und zugleich *innerhalb* der gegebenen Kreisfläche liegen.

Hieraus aber folgt, weil U in ganzer Erstreckung der Kreisfläche eindeutig und stetig ist, nach bekannter Schlussweise sofort, dass die Formel (17.) auch noch gültig ist für die *am Rande* der Kreisfläche befindlichen Endpunkte jener Curven.

Wollte man nämlich das Gegentheil annehmen, also behaupten, das abs U sei in irgend einem dieser Endpunkte g um eine angebbare Quantität ε *grösser* als $M \frac{K}{\pi}$, so müsste [weil U in ganzer Erstreckung der Kreisfläche eindeutig und stetig ist] auf der bei g mündenden Curve ζ in unmittelbarer Nähe von g ein Punkt j vorhanden sein, in welchem U um $\frac{\varepsilon}{2}$ grösser als $M \frac{K}{\pi}$ ist; — was der schon constatirten Formel (17.) widerspricht.

Bezeichnet man also *sämmtliche* Punkte der Curven $\zeta', \zeta'', \zeta''', \ldots$ (inclusive ihrer Endpunkte) kurzweg mit ζ, so ist *ausnahmslos:*

$$\text{abs } U_\zeta \leqq M \frac{K}{\pi}, \tag{18.}$$

mithin z. B. auch:

$$\text{Max abs } U_\zeta < M \frac{K}{\pi}, \tag{19.}$$

oder, was dasselbe ist [vgl. (5.)]:

$$\text{Max abs } U_\zeta < (\text{Max abs } \Sigma_\varphi) \frac{K}{\pi}. \tag{20.}$$

Bezeichnet man also die Constante $\frac{K}{\pi}$ mit λ, und beachtet man die in (15a.) über diese Constante gemachten Bemerkungen, so gelangt man zu folgendem Satz:

Zweiter Zusatz zum Kreistheorem. — *Am Rande σ der gegebenen Kreisfläche seien längs dieses Randes stetige Werthe Σ vorgeschrieben, die nur in einzelnen Randsegmenten $\beta', \beta'', \beta''', \ldots$ von Null verschieden sind, in den dazwischen liegenden Randsegmenten $\delta', \delta'', \delta''', \ldots$ aber verschwinden. Ferner sei gebildet die diesen Σ's entsprechende fundamentale Function:*

$$U = U^{\sigma, \Sigma} = U^{\beta, \Sigma}.$$

Sind nun auf der Kreisfläche irgend welche Curven $\zeta', \zeta'', \zeta''', \ldots$ gegeben, und zwar der Art, dass $\zeta^{(n)}$ die beiden Endpunkte des Segmentes $\beta^{(n)}$ verbindet, in jenen Endpunkten aber den Rand σ nicht tangirt, und überhaupt, ausser diesen beiden Punkten, keine weiteren Punkte mit σ gemein hat, so wird, falls man sämmtliche Punkte des Curvensystems $\zeta', \zeta'', \zeta''', \ldots$ kurzweg mit ζ bezeichnet, die Formel gelten:

$$\text{Max abs } U_\zeta^{\beta, \Sigma} < (\text{Max abs } \Sigma_\varphi) \lambda. \tag{K II.}$$

Dabei bezeichnet λ eine positive Constante, die < 1 ist, und deren Werth lediglich abhängt von den gegebenen geometrischen Verhältnissen, d. i. von der Lage des Curvensystems $\zeta', \zeta'', \zeta''', \ldots$ in Bezug auf die Kreisfläche.

§ 4.

Betrachtungen über einen Kreisring.

Die vorhergehenden Paragraphen enthalten gewisse für unsere eigentlichen Zwecke erforderlichen Hülfsätze. Ein weiterer solcher Satz betrifft den *Kreisring,* und lautet folgendermassen:

Satz über den Kreisring. — *Es sei gegeben eine von zwei concentrischen Kreislinien α und β begrenzte ringförmige Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$, und zwar sei, was die Radien betrifft:*

$$R_\alpha > R_\beta. \tag{1.}$$

Ausserdem sei eine Function $U = U(x, y)$ gegeben, welche auf $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ eindeutig und stetig, und innerhalb $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ harmonisch ist. Denkt man sich alsdann eine mit α, β concentrische Peripherie σ construirt, deren Radius R_σ der Formel entspricht:

$$R_\alpha > R_\sigma > R_\beta, \tag{2.}$$

so wird das über σ erstreckte Integral

$$\int_\sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx\right) = \text{Const.} \tag{3.}$$

sein, nämlich ein und denselben Werth behalten, welche Grösse man dem Radius R_σ innerhalb des soeben festgesetzten Spielraumes (2.) auch zuertheilen mag.

Setzt man nun insbesondere voraus, der constante Werth des Integrales (3.) sei $= 0$, es gelte also die Formel:

$$\int_\sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx\right) = 0, \tag{4.}$$

so wird stets auch folgende Formel gelten:

$$\mathfrak{M}(U_\alpha) = \mathfrak{M}(U_\beta). \tag{5.}$$

D. h.: Das arithmetische Mittel der längs α vorhandenen Werthe U wird alsdann ebensogross sein wie das arithmetische Mittel derjenigen Werthe U, die längs β sich vorfinden.

Beweis. — Construirt man zwischen α und β irgend zwei intermediäre concentrische Peripherien σ und τ, entsprechend der Formel:

$$R_\alpha > R_\sigma > R_\tau > R_\beta,$$

so ist U [zufolge der gemachten Voraussetzungen] in ganzer Erstreckung der ringförmigen Fläche $\mathfrak{S}_{\sigma\tau}$ eindeutig, stetig und harmonisch. Demgemäss ist [zufolge des Satzes (8.) pg. 391]:

$$\int_{\mathfrak{S}_{\sigma\tau}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx\right) = 0,$$

oder, etwas anders geschrieben:

$$\int_\sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx\right) = \int_\tau \left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx\right),$$

die Integrationen über σ und τ in gleichem Sinne, d. i. in paralleler Richtung hinerstreckt gedacht. Hiemit ist die Behauptung (3.) bewiesen.

Was nun ferner den Beweis der Formel (5.) betrifft, so denke man sich die Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ durch irgend einen von α nach β gehenden Querschnitt q in eine *einfach zusammenhängende* Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta q}$ verwandelt. Alsdann wird [zufolge des Satzes (9.) pg. 392] durch die Formel

$$V = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx \right), \quad [\mathfrak{S}_{\alpha\beta q}],$$

eine Function $V = V(x, y)$ definirt werden, die innerhalb $\mathfrak{S}_{\alpha\beta q}$ eindeutig und stetig, und längs q mit einer constanten Differenz behaftet ist. Diese Differenz aber ist $= 0$, zufolge unserer in (4.) gemachten Voraussetzung.

Die Function V ist daher nicht nur innerhalb $\mathfrak{S}_{\alpha\beta q}$, sondern auch innerhalb $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ eindeutig und stetig. Und demgemäss wird [vgl. (10a.) pg. 392] das Binom

$$f(z) = U + iV$$

eine monogene Function von $z = x + iy$ sein, die innerhalb $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ eindeutig und stetig ist. Genau dasselbe gilt auch von $\frac{1}{z-c}$, folglich auch von der Function

$$\frac{f(z)}{z-c} = \frac{U + iV}{z-c},$$

falls man nämlich unter $c = a + ib$ irgend einen festen und zwar *ausserhalb* $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ gelegenen Punkt versteht.

Da nun $f(z)$ die Eigenschaften der Eindeutigkeit und Stetigkeit *innerhalb* $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$, mithin *in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{S}_{\sigma\tau}$ besitzt, so folgt [mittelst des Cauchy'schen Satzes (9.) pg. 19]:

$$\int_\sigma \frac{f(z)\, dz}{z-c} = \int_\tau \frac{f(z)\, dz}{z-c},$$

die Integrationen über σ und τ in parallelen Richtungen erstreckt. Nimmt man jetzt für c das gemeinschaftliche Centrum der Peripherien $\alpha, \sigma, \tau, \beta$, so ergiebt sich [vgl. pg. 393, 394]:

$$\frac{\int f(z)\, d\sigma}{2\pi R_\sigma} = \frac{\int f(z)\, d\tau}{2\pi R_\tau},$$

die Integrationen hinerstreckt über alle Elemente $d\sigma$ und $d\tau$ der Kreislinien σ und τ. Setzt man hier aber für $f(z)$ seinen Werth $U + iV$, so ergeben sich zwei Relationen, von denen die eine lautet:

$$\frac{\int U_\sigma d\sigma}{2\pi R_\sigma} = \frac{\int U_\tau d\tau}{2\pi R_\tau}.$$

Diese Formel ist, wie aus ihrer Ableitung hervorgeht, gültig für irgend zwei der Formel

$$R_\alpha > R_\sigma > R_\tau > R_\beta$$

entsprechende Kreislinien σ, τ. Folglich wird sie, weil [nach unserer Voraussetzung] U *in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ eindeutig und stetig ist, auch dann noch gültig bleiben, wenn man σ mit α, und τ mit β *zusammenfallen* lässt; so dass man also erhält:

$$\frac{\int U_\alpha d\alpha}{2\pi R_\alpha} = \frac{\int U_\beta d\beta}{2\pi R_\beta},$$

oder einfacher geschrieben:

$$\mathfrak{M}(U_\alpha) = \mathfrak{M}(U_\beta). \qquad \text{Q. e. d.}$$

§ 5.

Die Fundamentalfunctionen der Normalcalotte.

Definition. — *Eine sphärisch gekrümmte m-blättrige Windungsfläche, deren Rand durch eine nach m Umläufen in sich zurückkehrende Kreislinie dargestellt ist, soll in Zukunft, einerlei ob das sphärische Centrum dieser Linie im Windungspunkte der Fläche liegt oder nicht, eine Normalcalotte heissen.* Für den Fall $m = 1$ verwandelt sich also die Normalcalotte in diejenige Fläche, welche schlechtweg als *Calotte* bezeichnet wird. (A.)

Definition. — *Denkt man sich eine m-blättrige Normalcalotte mittelst eines den Windungspunkt umlaufenden und nach m Umgängen in sich zurückkehrenden kreisförmigen Schnittes in zwei Theile zerlegt, so wird der eine Theil wiederum eine Normalcalotte sein. Der andere mag eine Normalzone genannt werden.* Eine solche Normalzone ist also stets von zwei *Kreislinien* begrenzt. Ob die sphärischen Centra dieser beiden Kreislinien mit einander coincidiren oder nicht, bleibt dabei völlig dahingestellt. (B.)

Dies vorangeschickt, beginnen wir zunächst mit einigen einfachen Betrachtungen über die gewöhnliche *einblättrige* Kugelfläche. Auf dieser Kugelfläche seien irgend zwei Punkte c, c' markirt, gleichzeitig mag die *Sehne* cc' oder vielmehr die durch Verlängerung dieser Sehne entstehende *Secante* mit L bezeichnet sein. Denkt man sich durch L*) irgend eine Ebene gelegt, und den Kreis, in welchem die Kugelfläche von dieser Ebene geschnitten wird, mit s bezeichnet, so entstehen, falls man jene Ebene um L in Rotation versetzt, unendlich viele solche Kreise s, die sämmtlich in c einander schneiden, ebenso in c'. Markirt man nun auf L, und zwar ausserhalb der Kugelfläche, irgend einen Punkt λ, und legt man von λ aus Tangenten t an sämmtliche Kreise s, so werden all' diese t's zusammen genommen nichts Anderes sein, als der von λ an die Kugelfläche gelegte *Tangentialkegel*. Demgemäss wird die Gesammtheit der Punkte (s, t), in denen die einzelnen s von den zugehörigen t's berührt werden, die *Contactcurve* jenes Tangentialkegels repräsentiren.

Die Punkte (s, t) sind daher als solche zu bezeichnen, die vom gemeinschaftlichen Ausgangspunkte der t's, d. i. von λ *gleich weit entfernt* sind. Hieraus folgt, dass jedwede Tangente t, mithin auch jedweder Kreis s *senkrecht* geschnitten wird von der durch die Gesammtheit der Punkte (s, t) gebildeten Contactcurve.

*) d. i. durch die Punkte c und c'.

(1.) *Sind also auf der Kugelfläche zwei feste Punkte c und c' gegeben, und denkt man sich alle auf der Kugelfläche liegenden und durch c und c' gehenden Kreise mit s bezeichnet, so werden die zu diesen Kreisen s orthogonalen Kreise σ nichts Anderes sein als die Contactcurven derjenigen Tangentialkegel, deren Spitzen in der durch c, c' gehenden geraden Linie liegen.*

Denkt man sich nun *einen* der Kreise σ gegeben, und überdies den Punkt c gegeben, so kann man die übrigen Kreise σ, ferner die Kreise s, und namentlich auch den Punkt c' leicht construiren, in folgender Weise:

Man construire zuvörderst denjenigen Tangentialkegel, der den gegebenen Kreis σ zur Contactcurve hat. Der Punkt, in welchem eine durch die Spitze λ dieses Kegels und den gegebenen Punkt c gehende gerade Linie L die Kugelfläche zum zweiten Male schneidet, ist alsdann der gesuchte Punkt c'. Nachdem in solcher Weise c' gefunden ist, ergeben sich sofort sämmtliche Kreise s. Und gleichzeitig ergeben sich die übrigen Kreise σ dadurch, dass man die Spitze jenes Tangentialkegels längs L fortschreiten lässt, und dabei von Augenblick zu Augenblick die Contactcurve des Kegels construirt. Man gelangt so z. B. zu folgendem Satz:

(2.) *Sind auf der Kugelfläche irgend ein Kreis σ und irgend ein Punkt c gegeben, so lassen sich auf der Kugelfläche unendlich viele Kreise construiren, die zu σ orthogonal sind, und sämmtlich durch c gehen. All' diese unendlich vielen Kreise schneiden sich, ausser in c, noch in einem zweiten Punkte c', der hinfort der zu c in Bezug auf σ conjugirte Punkt heissen mag.*

(3.) *Dieser conjugirte Punkt c' kann, falls c und σ gegeben sind, mit Leichtigkeit gefunden werden. Denn die gerade Linie cc' muss stets durch die Spitze desjenigen Tangentialkegels gehen, der den Kreis σ zur Contactcurve hat.*

Sind auf der Kugelfläche irgend welche Kreise gegeben, so werden dieselben, bei Ausführung einer *stereographischen Projection*, bekanntlich Kreise *bleiben*. Und sind zwei der ursprünglich gegebenen Kreise zu einander orthogonal, so werden sie, bei Ausführung dieser Projection, orthogonal *bleiben*. Demgemäss ergiebt sich aus der in (2.) gegebenen Definition sofort folgender Satz:

(4.) *Sind auf der Kugelfläche irgend ein Kreis σ und zwei in Bezug auf σ zu einander conjugirte Punkte c und c' gegeben, so wird diese gegenseitige Beziehung zwischen σ, c, c' auch dann noch fortbestehen, wenn man σ, c, c' irgend welcher stereographischen Projection unter-*

wirft; also z. B. fortbestehen, wenn man σ, c, c' [vgl. die Figur pg. 53] *von O' aus auf die Horizontalebene MN, oder von O aus auf die Antipodenebene $M'N'$ projicirt.*

Denkt man sich also in solcher Weise σ, c, c' in eine *Ebene* versetzt, so wird c' nach wie vor der zweite Durchschnittspunkt derjenigen unendlich vielen Kreise sein, welche durch c gehen und zu σ orthogonal sind. Bezeichnet man daher, hier in der *Ebene*, die Abstände irgend eines auf σ liegenden Punktes z von c und c' respective mit r, r', so wird der Quotient $\frac{r}{r'}$, nach bekannten Sätzen, (5.) *constant* bleiben, falls man jenen Punkt z längs σ fortschreiten lässt.

Denkt man sich also z. B., um die Vorstellung zu fixiren, jene Projection auf die *Horizontalebene* ausgeführt, und die den Punkten c, c', z mit Bezug auf das Coordinatensystem dieser Ebene zukommenden Symbole $a+ib$, $a'+ib'$, $x+iy$ gleichfalls mit c, c', z bezeichnet, und überdies

$$\frac{z-c}{z-c'} = \zeta \tag{6.}$$

gesetzt, wo ζ ein Punkt in einer *neuen* Ebene, in der ζ-Ebene sein soll, so wird, falls man z längs σ fortschreiten lässt, gleichzeitig dieser neue Punkt ζ in der ζ-Ebene eine *Kreisperipherie* durchwandern, deren Centrum im Anfangspunkte der ζ-Ebene liegt. Setzt man nämlich, was jene Horizontalebene, d. i. die z-Ebene betrifft:

$$z - c = re^{i\vartheta},$$

$$z - c' = r'e^{i\vartheta'},$$

und was die ζ-Ebene betrifft:

$$\zeta = \varrho e^{i\tau},$$

so geht die Formel (6.) über in:

$$\frac{r}{r'}\, e^{i(\vartheta - \vartheta')} = \varrho e^{i\tau}; \tag{7.}$$

woraus folgt:

$$\frac{r}{r'} = \varrho. \tag{8.}$$

Lässt man nun aber den Punkt z längs σ fortschreiten, so bleibt $\frac{r}{r'}$ [nach (5.)] *constant*, also [nach (8.)] auch ϱ *constant*. Q. e. d.

Aus diesen einfachen Betrachtungen ergiebt sich nun, wie leicht zu übersehen ist, folgender

Satz. — *Auf der gewöhnlichen einblättrigen Kugelfläche sei irgend eine Calotte abgegrenzt, und ihr kreisförmiger Rand mit σ bezeichnet.*

(9.) *Ferner sei innerhalb der Calotte irgend ein Punkt c gegeben, und der in Bezug auf σ zu c conjugirte* [also ausserhalb der Calotte liegende] *Punkt mit c' bezeichnet. Alsdann werden sich durch die Substitution*

$$\frac{z-c}{z-c'} = \zeta$$

sämmtliche Punkte z der Calotte in eine auf der ζ-Ebene liegende Kreisfläche verwandeln, deren Centrum im Anfangspunkte der ζ-Ebene d. i. in $\zeta = 0$ liegt.

Selbstverständlich ist dieser Satz auch dann noch anwendbar, wenn die Calotte auf einer mehrblättrigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ abgegrenzt ist; vorausgesetzt, dass diese Calotte durchweg aus *einem* Blatt besteht, also z. B. frei von Windungspunkten ist. Aber auch für *mehrblätterige* Calotten existirt unter Umständen ein analoger Satz, der aus den bereits angestellten Betrachtungen mit Leichtigkeit sich ergiebt. Derselbe lautet:

Satz. — *Es sei $\mathfrak{R}$ eine n-blättrige Riemann'sche Kugelfläche, und* (10.) *auf $\mathfrak{R}$ sei irgend eine m-blättrige Normalcalotte abgegrenzt*), deren Windungspunkt c, und deren Rand σ heissen mag* [vgl. die Definition (A.) pg. 426].

Ferner sei c' der in Bezug auf σ zu c conjugirte [also ausserhalb der Calotte liegende] *Punkt. Alsdann werden sich mittelst der Substitution*

$$\frac{z-c}{z-c'} = \zeta^m$$

sämmtliche Punkte z der m-blättrigen Calotte in eine auf der ζ-Ebene liegende einblättrige Kreisfläche verwandeln, deren Centrum im Anfangspunkte der ζ-Ebene liegt.

Bemerkung. — Bei Ableitung der Sätze (9.), (10.) ist die Projection auf die *Horizontalebene* benutzt worden. Bedient man sich, statt dieser, der Projection auf die *Antipodenebene*, so gelangt man zu analogen Sätzen, die von jenen nur dadurch abweichen, dass in den betreffenden Substitutionsformeln:

$$\frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{c}}{\frac{1}{z}-\frac{1}{c'}} \quad \text{an Stelle von} \quad \frac{z-c}{z-c'}$$

auftritt. Diese beiden Ausdrücke unterscheiden sich aber von einander nur durch einen *constanten Factor*. Demgemäss sind also die in Rede stehenden neuen Sätze mit den schon ausgesprochenen Sätzen (9.), (10.) nicht nur analog, sondern geradezu *identisch*.

*) Es ist mithin $m \leqq n$.

Bezeichnet man eine der in (9.), (10.) genannten Calotten mit $\mathfrak{S}$, und denkt man sich ferner am Rande σ der Fläche $\mathfrak{S}$ irgend welche (jedoch stetige) Werthe Σ in beliebiger Weise vorgeschrieben, so wird die diesen Werthen Σ entsprechende Fundamentalfunction U der Fläche $\mathfrak{S}$, wie leicht zu übersehen ist, ein und dieselbe bleiben, einerlei ob man die Fläche $\mathfrak{S}$ in ihrem *ursprünglichen Zustande* verharren, oder ob man sie, mittelst der angegebenen Substitutionen, in die Gestalt einer *Kreisfläche* übergehen lässt. Für diesen *letzteren* Zustand ist aber jene Function U sofort angebbar, nach dem Theorem pg. 410. Folglich ist sie es auch für den *erstern*.

In ähnlicher Weise lässt sich der *erste* die Kreisfläche betreffende Zusatz [pg. 417] auf die Calotte $\mathfrak{S}$ übertragen, und ebenso auch der *zweite* [pg. 423], so dass man also zu folgenden Resultaten gelangt:

Satz über die Normalcalotte. — *Sind am Rande σ einer Normalcalotte* [vgl. die Definition pg. 426] *irgend welche längs dieses Randes stetige Werthe Σ vorgeschrieben, so wird die diesen Σ's zugehörige Fundamentalfunction der Calotte stets construirbar sein. D. h. es wird stets eine Function construirbar sein, welche auf der Calotte eindeutig und stetig; innerhalb derselben harmonisch, und am Rande derselben identisch mit jenem Σ's ist.*

Erster Zusatz. — *Bezeichnet man diese Function mit*

$$U = U^{\sigma, \Sigma},$$

und denkt man sich völlig innerhalb der Calotte eine Curve ζ gegeben, so gelten für sämmtliche Werthe, welche $U^{\sigma, \Sigma}$ auf ζ besitzt, die Formeln:

$$\text{(N I.)} \qquad \begin{gathered} \text{Min}\, \Sigma < U_\zeta^{\sigma, \Sigma} < \text{Max}\, \Sigma, \\ D U_\zeta^{\sigma, \Sigma} < (D\Sigma)\varkappa . \end{gathered}$$

Dabei bezeichnet $\varkappa$ eine positive Constante, die stets < 1 ist, und deren Werth lediglich von den gegebenen geometrischen Verhältnissen abhängt. Man kann $\varkappa$ etwa bezeichnen als die Situationsconstante der Curve ζ in Bezug auf die gegebene Calotte.

Zweiter Zusatz. — *Sind die vorgeschriebenen Σ's nur längs einzelner Randsegmente β', β'', β''', ... von Null verschieden, längs der dazwischen befindlichen Segmente aber verschwindend, und sind überdies auf der Calotte irgend welche Curven ζ', ζ'', ζ''', ... gegeben, und zwar der Art gegeben, dass $\zeta^{(n)}$ die beiden Endpunkte von $\beta^{(n)}$ verbindet, in diesen beiden Punkten aber den Calottenrand σ nicht tangirt,*

und überhaupt ausser diesen beiden Punkten keinen weiteren Punkt mit σ *gemein hat, so wird die jenen* Σ*'s zugehörige Fundamentalfunction*

$$U = U^{\sigma,\,\Sigma} = U^{\beta,\,\Sigma}$$

der Formel entsprechen:

$$\text{(XII.)}\qquad \text{Max abs}\; U_\zeta^{\beta,\,\Sigma} < (\text{Max abs}\; \Sigma_\sigma)\,\lambda,$$

wo der Ausdruck linker Hand den absolut grössten Werth vorstellt, den die Function $U^{\beta,\,\Sigma}$ *in sämmtlichen Punkten* ζ *des Curvensystems* $\zeta', \zeta'', \zeta''', \ldots$ *besitzt.*

Dabei bezeichnet λ *eine positive Constante, die* < 1 *ist, und deren Werth lediglich abhängt von den gegebenen geometrischen Verhältnissen. Man kann* λ *etwa bezeichnen als die Situationsconstante des Curvensystems* $\zeta', \zeta'', \zeta''', \ldots$ *in Bezug auf die gegebene Calotte.*

Achtzehntes Capitel.

Beweis der Riemann'schen Existenztheoreme.

§ 1.

Aufstellung eines gewissen Convergenztheorems.

Es sei $\mathfrak{S}$ ein *beliebiger* Theil einer Riemann'schen Kugelfläche. Und es mögen unendlich viele Fundamentalfunctionen dieser Fläche $\mathfrak{S}$:

$$U^{(n)} = U^{(n)}(x, y), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \infty, \tag{1.}$$

gegeben sein, also Functionen, die auf $\mathfrak{S}$ eindeutig und stetig, und *innerhalb* $\mathfrak{S}$ harmonisch sind. Wir wollen nun den Rand von $\mathfrak{S}$ [welcher im Allgemeinen aus *mehreren* Curven bestehen wird] mit σ, die Randwerthe der Functionen $U^{(n)}$ mit $U_\sigma^{(n)}$ bezeichnen, und voraussetzen, dass diese Randwerthe der Formel entsprechen:

$$\text{abs}\, U_\sigma^{(n)} < \Gamma \mu^n, \tag{2.}$$

wo Γ, μ zwei gegebene *positive Constanten* sind, und $\mu < 1$ ist.

Aus der Voraussetzung (2.) folgt mit Rücksicht auf den Satz (17.) pg. 395, dass für alle *innerhalb* $\mathfrak{S}$ befindlichen Punkte j die analoge Formel gilt:

$$\text{abs}\, U_j^{(n)} < \Gamma \mu^n. \tag{3.}$$

Aus (2.), (3.) folgt nun aber weiter, dass die Reihe

$$V = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots \text{ in inf.} \tag{4.}$$

für *jedweden* Punkt der Fläche $\mathfrak{S}$ *convergirt*, einerlei ob derselbe innerhalb $\mathfrak{S}$ oder am Rande von $\mathfrak{S}$ liegt; so dass also dieses durch (4.) definirte V für *jedweden* Punkt der Fläche $\mathfrak{S}$ einen *bestimmten endlichen* Werth besitzt.

Für die zwischen V und dem *endlichen Polynom*:

$$V^{(n)} = U^{(1)} + U^{(2)} \ldots + U^{(n)} \tag{5.}$$

vorhandene Differenz $V - V^{(n)}$ gilt, nach (2.), (3.), die Formel:

$$\text{abs}\,(V - V^{(n)}) < \Gamma\,(\mu^{n+1} + \mu^{n+2} + \mu^{n+3} + \ldots \text{ in inf.}),$$

d. i. die Formel:

$$\text{(6.)} \qquad \text{abs}(V - V^{(n)}) < \frac{\Gamma\mu^{n+1}}{1-\mu};$$

und zwar gilt diese Formel *simultan* für *sämmtliche* Punkte der ganzen Fläche $\mathfrak{S}$.

Nach unserer Voraussetzung sind aber $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, $U^{(3)}$, ... *auf* $\mathfrak{S}$ *eindeutig* und *stetig*. Gleiches gilt daher von dem Polynom $V^{(n)}$, (5.), und folglich auch von V selber, wie solches mittelst der Formel (6.) leicht zu beweisen ist.

Erläuterung. — Zufolge (6.) kann man, falls irgend ein Kleinheitsgrad ε gegeben ist, die Zahl n so gross machen, dass *simultan* für *sämmtliche* Punkte der Fläche $\mathfrak{S}$ die Formel stattfindet:

$$(\alpha.) \qquad \text{abs}(V - V^{(n)}) < \varepsilon.$$

Solches ausgeführt gedacht markire man jetzt auf $\mathfrak{S}$ einen beliebigen Punkt x (einerlei ob innerhalb $\mathfrak{S}$ oder am Rande von $\mathfrak{S}$), und beschreibe um x, als Centrum, eine kleine Kreislinie. Diese letztere wird, je nachdem x ein gewöhnlicher Punkt oder ein Windungspunkt ist, entweder eine gewöhnliche Kreislinie oder aber eine solche sein, die erst nach mehreren Umläufen in sich zurückkehrt.

Da nun das Polynom $V^{(n)}$ auf $\mathfrak{S}$ überall eindeutig und stetig ist, so kann man sämmtliche Differenzen, welche $V^{(n)}$ auf $\mathfrak{S}$ innerhalb dieser Kreislinie besitzt, durch Verkleinerung des Kreisradius unter ε hinabdrücken. Mit andern Worten: Man kann den Radius so klein machen, dass für zwei auf $\mathfrak{S}$ innerhalb des Kreises in beliebiger Bewegung begriffene Punkte x_1 und x_2 fortdauernd die Formel stattfindet

$$(\beta.) \qquad \text{abs}(V_{x_1}^{(n)} - V_{x_2}^{(n)}) < \varepsilon.$$

Hier aber kann man, zufolge $(\alpha.)$, $V^{(n)}$ mit V vertauschen, ohne dabei einen Fehler von mehr als 2ε hineinzubringen, und erhält also:

$$(\gamma.) \qquad \text{abs}(V_{x_1} - V_{x_2}) < 3\varepsilon.$$

Demgemäss ist V im Punkte x *stetig* zu nennen, also, weil x auf $\mathfrak{S}$ *beliebig* gewählt war, stetig zu nennen in *jedwedem* Punkte der Fläche $\mathfrak{S}$. *Q. e. d.*

(7.) Die durch (4.) definirte Function V ist also *auf* $\mathfrak{S}$ *eindeutig und stetig*, mithin z. B. auch *integrirbar*; wovon weiterhin Gebrauch zu machen ist. Wir werden jetzt schliesslich noch nachweisen, dass V innerhalb $\mathfrak{S}$ harmonisch ist.

Zu diesem Zweck markiren wir *innerhalb* $\mathfrak{S}$ einen beliebigen Punkt c, bezeichnen das Bereich des Punktes c in seinem ursprünglichen und natürlichen Zustande respective mit $\mathfrak{U}(c, z)$ und $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$, und denken uns diese Bereiche in solcher Weise umgrenzt, dass $\mathfrak{A}$ eine *Kreisfläche* vorstellt, *deren Centrum in* γ *liegt*. Nach unserer Voraussetzung sind die Functionen $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, $U^{(3)}$, ... auf $\mathfrak{S}$ ein-

deutig und stetig, und innerhalb $\mathfrak{S}$ harmonisch. Folglich sind dieselben auf der innerhalb $\mathfrak{S}$ liegenden Fläche $\mathfrak{U}$, mithin auch auf $\mathfrak{A}$ ebenfalls mit diesen drei Eigenschaften behaftet. Gleiches gilt daher z. B. auch von $V^{(n)}$, (5.). Demgemäss wird der Werth von $V^{(n)}$ in jedwedem *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegendem Punkte j darstellbar sein durch die Formel (22a.) pg. 410:

$$V_j^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathfrak{A}} \left[\frac{\cos \vartheta}{E} - \frac{1}{2R} \right] V_\alpha^{(n)} \, d\alpha, \tag{8.}$$

die Integration hinerstreckt gedacht über alle Randelemente $d\alpha$ der Kreisfläche $\mathfrak{A}$. Dabei bezeichnet $V_\alpha^{(n)}$ den Werth von $V^{(n)}$ im Elemente $d\alpha$, ferner E den Abstand des Punktes j vom Element $d\alpha$, ferner ϑ den Winkel, unter welchem E gegen die auf $d\alpha$ errichtete innere Normale geneigt ist, endlich R den Radius von $\mathfrak{A}$. Die Formel (8.) gilt, wie schon gesagt, für alle Punkte j *innerhalb* $\mathfrak{A}$. Sie gilt also für alle Punkte j *in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{A}_0$, falls man unter $\mathfrak{A}_0$ eine mit $\mathfrak{A}$ concentrische Kreisfläche versteht, deren Radius $R_0 < R$ ist.

Fraglich aber ist, ob die Formel auf $\mathfrak{A}_0$ noch gültig bleibt, wenn man in ihr $V^{(n)}$ durch V ersetzt. Bezeichnet man vorläufig den durch diese Substitution entstehenden Fehler mit Δ, schreibt man also:

$$\Delta + V_j = \frac{1}{\pi} \int_{\mathfrak{A}} \left[\frac{\cos \vartheta}{E} - \frac{1}{2R} \right] V_\alpha \, d\alpha, \tag{9.}$$

so ergiebt sich aus (8.) und (9.) durch Subtraction:

$$\Delta + (V_j - V_j^{(n)}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathfrak{A}} \left[\frac{\cos \vartheta}{E} - \frac{1}{2R} \right] (V_\alpha - V_\alpha^{(n)}) \, d\alpha. \tag{10.}$$

Denkt man sich diese Formel (10.) der Reihe nach für irgend welche Zahlen $n < n' < n'' < \ldots$ hingeschrieben, so wird dabei das Δ stets *denselben* Werth behalten. Denn Δ repräsentirt die durch (9.) definirte *feste*, von n *unabhängige* Grösse. Und dieses *feste* Δ muss also, zufolge (10.), weil $V_j - V_j^{(n)}$ und $V_\alpha - V_\alpha^{(n)}$ bei wachsendem n gegen 0 convergiren, nothwendig $= 0$ sein.

Genaueres. — In den Formeln (8.), (9.), (10.) repräsentirt j irgend einen auf $\mathfrak{A}_0$ (Radius R_0) gelegenen Punkt; während die dortigen Integrationen über den Rand von $\mathfrak{A}$ selber (Radius R) fortlaufen. Demgemäss ist also das dortige $E > R - R_0$, mithin

$$\frac{1}{E} < \frac{1}{R - R_0}, \tag{α.}$$

und folglich:

$$(\beta.)\qquad \text{abs}\left[\frac{\cos\vartheta}{E} - \frac{1}{2R}\right] < \frac{1}{R - R_0} + \frac{1}{2R}.$$

Mit Rücksicht hierauf, sowie mit Rücksicht auf die in (6.) gefundene Formel:

$$(\gamma.)\qquad \text{abs}\,(V - V^{(n)}) < \frac{\Gamma\mu^{n+1}}{1-\mu}$$

folgt nun aus (10.) sofort:

$$(\delta.)\qquad \text{abs}\,\Delta < \frac{\Gamma\mu^{n+1}}{1-\mu}\left\{1 + \left(\frac{1}{R - R_0} + \frac{1}{2R}\right)2R\right\}.$$

Da nun μ ein positiver ächter Bruch, mithin die rechte Seite dieser Formel durch Vergrösserung von n unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad ε hinabdrückbar ist, so muss die *feste* (von n unabhängige) Grösse abs Δ kleiner sein als jedwedes noch so kleine ε. Folglich ist sie $= 0$. *Q. e. d.*

Da nun $\Delta = 0$ ist, so geht die Formel (9.) über in:

$$(11.)\qquad V_j = \frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{A}}\left[\frac{\cos\vartheta}{E} - \frac{1}{2R}\right]V_\alpha\,d\alpha.$$

Hieraus aber folgt, falls man die Coordinaten des auf $\mathfrak{A}_0$ liegenden Punktes j mit ξ, η bezeichnet, sofort, dass V_j auf $\mathfrak{A}_0$ den Formeln entspricht:

$$(12.)\qquad \frac{\partial V_j}{\partial\xi},\ \frac{\partial V_j}{\partial\eta}\ \text{stetig},\quad \frac{\partial^2 V_j}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial\eta^2} = 0,$$

dass also V_j auf $\mathfrak{A}_0$, mithin auch auf $\mathfrak{U}_0$ *harmonisch* zu nennen ist. Dabei bezeichnet $\mathfrak{U}_0$ den mit $\mathfrak{A}_0$ correspondirenden Theil von $\mathfrak{U}$, also ein kleines den Punkt c umgebendes Flächenstück, oder (kürzer ausgedrückt) das *Bereich* von c.

Die Function V ist also harmonisch im Bereich eines jedweden innerhalb $\mathfrak{S}$ gelegenen Punktes c. Mit andern Worten: *Sie ist innerhalb $\mathfrak{S}$ überall harmonisch.* Alles zusammengefasst, gelangt man daher zu folgendem Resultat:

Convergenztheorem. — *Es sei $\mathfrak{S}$ ein beliebiger Theil einer Riemann'schen Kugelfläche. Und es mögen unendlich viele Functionen*

$$(13.)\qquad U^{(n)} = U^{(n)}(x, y),\quad n = 1, 2, 3, \ldots \infty,$$

gegeben sein, die auf $\mathfrak{S}$ eindeutig und stetig, und innerhalb $\mathfrak{S}$ harmonisch sind. Ueberdies sei bekannt, dass die Randwerthe $U_\sigma^{(n)}$ dieser Functionen $U^{(n)}$ der Formel entsprechen:

$$(14.)\qquad \text{abs}\,U_\sigma^{(n)} \leq \Gamma\mu^n,$$

wo Γ, μ zwei gegebene positive Constanten vorstellen, von denen die letztere < 1 ist.

Setzt man alsdann

$$(15.)\qquad V = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots \text{in inf.},$$

so wird dieses V nicht nur für jedweden Punkt der Fläche $\mathfrak{S}$ convergent, d. i. von bestimmtem endlichen Werthe sein, sondern zugleich eine Function vorstellen, die auf $\mathfrak{S}$ eindeutig und stetig, und innerhalb $\mathfrak{S}$ harmonisch ist.

Setzt man ferner

(16.) $$W = \lim_{n=\infty} U^{(n)},$$

so wird dieses W für jedweden Punkt der Fläche $\mathfrak{S}$ verschwinden; [wie solches aus den Formeln (2.), (3.) unmittelbar folgt].

§ 2.

Darlegung einer disjunctiven Methode zur Bildung der Fundamentalfunctionen.

Wird irgendwo aus dem Innern einer gegebenen Fläche ein *kreisförmiges Stück* herausgenommen, so entsteht eine *neue* Fläche, deren Randcurvenanzahl um 1 grösser ist, als die der ursprünglichen Fläche. Ich werde nun zeigen, dass man in vielen (noch näher anzugebenden) Fällen die Fundamentalaufgabe (20.) pg. 396 für diese *neue* Fläche zu lösen vermag, falls man nur im Besitz irgend einer Methode ist zur Lösung derselben für die *ursprüngliche* Fläche.

Es sei gegeben ein von beliebig vielen Randcurven α_1, α_2, α_3, ... α_h begrenzter Theil der *einblättrigen* Kugelfläche, derselbe sei dementsprechend bezeichnet mit

(1.) $$\mathfrak{S}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_h} \text{ oder kürzer mit } \mathfrak{S}_\alpha.$$

Aus dem Innern dieser Fläche (1.) sei ein *kreisförmiges Stück*, d. i. eine *Calotte* herausgenommen, und das alsdann noch übrig bleibende Flächenstück mit

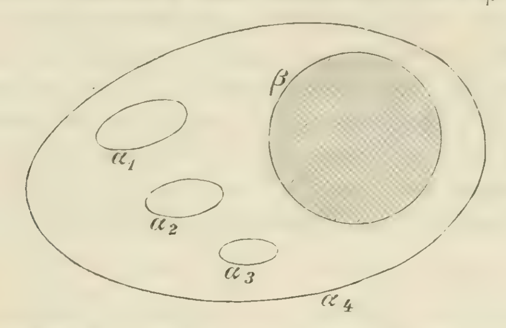
(2.) $$\mathfrak{S}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_h \beta} \text{ oder kürzer mit } \mathfrak{S}_{\alpha\beta}$$

bezeichnet. Dabei soll β den Rand jener herausgenommenen (disjungirten) Calotte vorstellen; so dass also die Fläche (2.) im Ganzen $(h+1)$ Randcurven: α_1, α_2, α_3, ... α_h, β besitzt, von denen die letzte ein *Kreis* ist. (3.) *Es sei nun, wie wir express voraussetzen, irgend eine Methode bekannt zur Lösung der Fundamentalaufgabe* (20.) pg. 396 *für die ursprünglich gegebene Fläche* $\mathfrak{S}_\alpha$ (1.). *Es soll untersucht werden, ob man alsdann diese Aufgabe vielleicht auch für die neue Fläche* $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ (2.) *zu lösen vermag. Es soll also eine Fundamentalfunction der neuen Fläche* $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ *zu construiren versucht werden, welche am Rande derselben d. i. in den Curven* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \beta$ *beliebig vorgeschriebene stetige Werthe* Σ *besitzt.*

Bemerkung. — Als *Hülfsmittel* bei dieser Untersuchung werden uns diejenigen beiden Calotten

(4.) $$\mathfrak{S}_\beta{}^0 \text{ und } \mathfrak{S}_\beta$$

dienen, in welche die ganze unversehrte Kugelfläche durch den Kreis β zerfällt. Die [in beistehender Figur*) schraffirte] Calotte $\mathfrak{S}_\beta{}^0$ soll jene *ab-*



getrennte (*disjungirte*) Calotte vorstellen; während andererseits $\mathfrak{S}_\beta$ die *supplementare* Calotte, d. h. die ganze volle Kugelfläche, mit alleiniger Ausnahme von $\mathfrak{S}_\beta{}^0$, repräsentirt.

Demgemäss steht $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ in gleichartiger Beziehung zu $\mathfrak{S}_\alpha$ wie zu $\mathfrak{S}_\beta$. Denn $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ ist offenbar ein *Theil* von $\mathfrak{S}_\alpha$, ebenso aber andererseits auch ein *Theil* von $\mathfrak{S}_\beta$.

Die Fundamentalfunctionen der Flächen $\mathfrak{S}_\alpha$ und $\mathfrak{S}_\beta$, welche respective U und V heissen mögen, sind ohne Weiteres *construirbar*, die ersteren zufolge unserer Voraussetzung (3.), die letztern zufolge des Satzes pg. 430. Von den vorgeschriebenen Σ's ausgehend, kann man daher der Reihe nach folgende Functionen $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''', \ldots$ construiren:

(5.)
$$\begin{aligned} \varphi &= U^{\alpha,\,\Sigma}, & \varphi' &= V^{\beta,\,\varphi}, \\ \varphi'' &= U^{\alpha,\,\varphi'}, & \varphi''' &= V^{\beta,\,\varphi''}, \\ \varphi^{\mathrm{IV}} &= U^{\alpha,\,\varphi'''}, & \varphi^{\mathrm{V}} &= V^{\beta,\,\varphi^{\mathrm{IV}}}, \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

gleichzeitig werde gesetzt:

(6.) $$\chi = (\varphi - \varphi') + (\varphi'' - \varphi''') \ldots + (\varphi^{(2n)} - \varphi^{(2n+1)}) + \ldots \text{ in inf.}$$

Es bezeichnet hier z. B. φ diejenige Fundamentalfunction U der Fläche $\mathfrak{S}_\alpha$, welche am Rande von $\mathfrak{S}_\alpha$ d. i. in den Curven α die vorgeschriebenen Werthe Σ besitzt. Sodann bezeichnet φ' diejenige Fundamentalfunction V der Fläche $\mathfrak{S}_\beta$, welche am Rande von $\mathfrak{S}_\beta$ d. i. auf der Kreislinie β identisch mit dem (schon construirten) φ

---

*) Die Zahl h ist in dieser Figur $= 4$ genommen.

ist. Sodann bezeichnet ferner φ'' diejenige Fundamentalfunction U der Fläche $\mathfrak{S}_\alpha$, welche in den Curven α identisch mit dem (schon construirten) φ' ist. U. s. w. U. s. w. Die geraden φ's sind also Fundamentalfunctionen von $\mathfrak{S}_\alpha$, andererseits die ungeraden φ's Fundamentalfunctionen von $\mathfrak{S}_{\beta}$. *Hieraus aber folgt, dass sämmtliche*
(7.) *φ's, die geraden wie die ungeraden, Fundamentalfunctionen der Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ vorstellen:* denn $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ ist [vgl. die vorhergehende Bemerkung] ein *Theil* von $\mathfrak{S}_\alpha$, und ebenso auch ein *Theil* von $\mathfrak{S}_{\beta}$.

Das in (6.) eingeführte χ ist vorläufig noch *bedeutungslos*; denn es ist vorläufig noch unbekannt, ob die daselbst für χ gegebene Reihe convergirt oder divergirt. Um näher hierauf einzugehen, sind zuvörderst gewisse Eigenschaften der φ's darzulegen. Aus (5.) folgt:

$$(8.)\qquad \begin{array}{ll} \varphi_\alpha = \Sigma_\alpha, & \varphi_{\beta}' = \varphi_{\beta}, \\ \varphi_\alpha'' = \varphi_\alpha', & \varphi_{\beta}''' = \varphi_{\beta}'', \\ \varphi_\alpha^{IV} = \varphi_\alpha''', & \varphi_{\beta}^{V} = \varphi_\beta^{IV}, \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Ferner folgt aus der *ersten* Zeile von (5.):

$$(p.)\qquad \varphi_{\beta} = U_{\beta}^{\alpha,\,\Sigma}, \qquad\qquad \varphi_\alpha' = V_\alpha^{\beta,\,\varphi};$$

hieraus aber folgt weiter:

$$(q.)\qquad \begin{cases} \text{Min}\,\Sigma_\alpha < \varphi_\beta < \text{Max}\,\Sigma_\alpha, \\ \quad D\varphi_{\beta} \leq D\Sigma_\alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Min}\,\varphi_\beta \leq \varphi_\alpha' < \text{Max}\,\varphi_\beta, \\ \quad D\varphi_\alpha' \leq (D\varphi_{\beta})\,\varkappa; \end{cases}$$

und zwar ergeben sich die Formeln links mittelst des Satzes (I.), (Ib.) pg. 398, die Formeln rechts mittelst des Satzes (N I.) pg. 430. Dabei bezeichnet $\varkappa$ eine positive Constante, die < 1 ist, die *Situationsconstante* des Curvensystemes α in Bezug auf die Calotte $\mathfrak{S}_{\beta}$. Aus den vier Formeln (q.) folgt nun weiter durch Elimination von φ_{β} respective $D\varphi_\beta$:

$$(r.)\qquad \begin{cases} \text{Min}\,\Sigma_\alpha < \varphi_\alpha' < \text{Max}\,\Sigma_\alpha, \\ \quad D\varphi_\alpha' < (D\,\Sigma_\alpha)\,\varkappa. \end{cases}$$

Ebenso wie diese Formeln (r.) aus der *ersten* Zeile von (5.) sich ergeben haben, ebenso werden entsprechende Formeln aus den *folgenden* Zeilen von (5.) resultiren; so dass man, Alles zusammengefasst, folgende Tabelle erhält:

$$(9.)\qquad \begin{array}{ll} \text{Min}\,\Sigma_\alpha < \varphi_\alpha' < \text{Max}\,\Sigma_\alpha, & D\varphi_\alpha' < (D\Sigma_\alpha)\,\varkappa, \\ \text{Min}\,\varphi_\alpha' < \varphi_\alpha''' < \text{Max}\,\varphi_\alpha', & D\varphi_\alpha''' < (D\varphi_\alpha')\,\varkappa < (D\Sigma_\alpha)\,\varkappa^2, \\ \text{Min}\,\varphi_\alpha''' < \varphi_\alpha^{V} < \text{Max}\,\varphi_\alpha''', & D\varphi_\alpha^{V} < (D\varphi_\alpha''')\,\varkappa < (D\Sigma_\alpha)\,\varkappa^3, \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

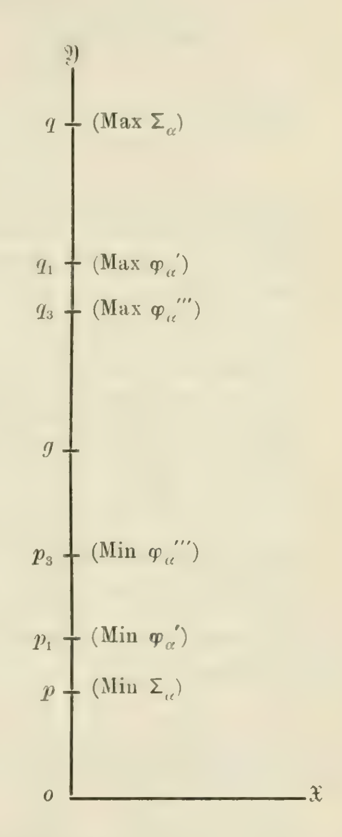
Aus diesen Formeln (9.) folgt sofort:

$$\lim_{n=\infty} \varphi_\alpha^{(2n+1)} = a, \tag{10.}$$

wo a eine *bestimmte*, und zwar der Formel

$$\text{Min}\,\Sigma_\alpha < a < \text{Max}\,\Sigma_\alpha \tag{10a.}$$

entsprechende *Constante* vorstellt.



Erläuterung. — Will man die in (9.) genannten Minimal- und Maximalwerthe auf einer gegebenen geraden Linie, etwa auf der vertikalen 𝔜-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems 𝔛, 𝔜 *als Abscissen* auftragen, so hat man zuvörderst auf dieser 𝔜-Axe zwei Punkte p und q zu markiren, der Art, dass die Abscissen (op) und (oq) respective die Werthe von Min Σ_α und Max Σ_α vorstellen. Da nun nach der *ersten* Formel (9.) *zwischen* Min Σ_α und Max Σ_α *sämmtliche* Werthe von φ_α' also z. B. auch Min φ_α' und Max φ_α' gelegen sind, so werden Min φ_α' und Max φ_α' durch zwei Punkte p_1 und q_1 dargestellt sein, die beide *zwischen* p und q liegen. In analoger Weise folgt aus der *zweiten* Formel (9.), dass Min φ_α''' und Max φ_α''' durch zwei Punkte p_3 und q_3 dargestellt sind, die beide *zwischen* p_1 und q_1 liegen. In solcher Weise ergiebt sich eine von p aus *aufsteigende* Punktreihe:

$$p,\, p_1,\, p_3,\, p_5,\, \ldots\, p_{2n+1} \ldots \tag{A.}$$

und andererseits ein von q aus *absteigende* Reihe:

$$q,\, q_1,\, q_3,\, q_5,\, \ldots\, q_{2n+1} \ldots \tag{B.}$$

Zufolge der Formeln (9.) *rechter* Hand ist aber

$$D\varphi_\alpha^{(2n+1)} \leqq (D\Sigma_\alpha)\,\varkappa^{n+1},$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\text{Max}\,\varphi_\alpha^{(2n+1)} - \text{Min}\,\varphi_\alpha^{(2n+1)} < (\text{Max}\,\Sigma_\alpha - \text{Min}\,\Sigma_\alpha)\,\varkappa^{n+1},$$

oder, in die geometrische Vorstellungsweise übersetzt:

$$(p_{2n+1}\, q_{2n+1}) \leqq (pq)\,\varkappa^{n+1}, \tag{C.}$$

wo die eingeklammerten Grössen die gegenseitigen Abstände der betreffenden Punkte vorstellen. Und diese Formel (C.), in welcher $\varkappa$ einen positiven *ächten Bruch* vorstellt, zeigt, dass jene beiden Punktreihen (A.) und (B.)

sich gegenseitig *ins Unendliche nähern.* In der That wird man, zufolge (C.), die Zahl n so gross machen können, dass der Abstand $(p_{2n+1}\ q_{2n+1})$ kleiner wird als jedwedes noch so kleine ε.

Beachtet man dies, und beachtet man ferner, dass die eine Reihe *beständig aufsteigt*, die andere *beständig absteigt*, so erkennt man sofort, dass beide Reihen von verschiedenen Seiten her gegen einen gemeinschaftlichen und *völlig bestimmten Grenzpunkt* convergiren, welcher g heissen mag.

Solches constatirt, ist also

$$\text{(D.)} \qquad \lim_{n=\infty} \operatorname{Min} \varphi_\alpha^{(2n+1)} = (og),$$

und ebenso auch:

$$\text{(E.)} \qquad \lim_{n=\infty} \operatorname{Max} \varphi_\alpha^{(2n+1)} = (og),$$

wo (og) die Abscisse jenes Grenzpunktes g vorstellt. Aus diesen beiden Formeln (D.), (E.) folgt aber sofort, dass *sämmtliche* Werthe der Function $\varphi_\alpha^{(2n+1)}$, bei wachsendem n, gegen (og) convergiren. Es ergiebt sich also die Formel:

$$\text{(F.)} \qquad \lim_{n=\infty} \varphi_\alpha^{(2n+1)} = (og).$$

Hiermit sind, falls man $(og) = a$ setzt, die Formeln (10.), (10a.) bewiesen.

Um zum Ziele zu gelangen, sind nun schliesslich an die Formeln (9.) noch einige einfache Bemerkungen anzuknüpfen. Nach der *zweiten* Zeile von (9.) ist:

$$\operatorname{Min} \varphi_\alpha' < \varphi_\alpha''' < \operatorname{Max} \varphi_\alpha'.$$

Selbstverständlich ist aber auch:

$$\operatorname{Min} \varphi_\alpha' < \varphi_\alpha' \leq \operatorname{Max} \varphi_\alpha'.$$

Aus diesen beiden Formeln zusammengenommen folgt sofort, dass die Differenz

$$\varphi_\alpha' - \varphi_\alpha'''$$

ihrem absoluten Betrage nach stets $< (\operatorname{Max} \varphi_\alpha' - \operatorname{Min} \varphi_\alpha')$ d. i. stets $\leq D\varphi_\alpha'$ ist. So ergiebt sich also die Formel:

$$\operatorname{abs} (\varphi_\alpha' - \varphi_\alpha''') < D\varphi_\alpha',$$

und in analoger Weise die allgemeinere Formel:

$$\operatorname{abs} (\varphi_\alpha^{(2n-1)} - \varphi_\alpha^{(2n+1)}) < D\varphi_\alpha^{(2n-1)},$$

oder mit Rücksicht auf (9.):

$$\operatorname{abs} (\varphi_\alpha^{(2n-1)} - \varphi_\alpha^{(2n+1)}) < (D\Sigma_\alpha)\, \varkappa^n.$$

Nach (8.) ist aber $\varphi_\alpha^{(2n-1)} = \varphi_\alpha^{(2n)}$. Somit folgt:

$$\text{(11.)} \qquad \operatorname{abs} (\varphi_\alpha^{(2n)} - \varphi_\alpha^{(2n+1)}) < (D\Sigma_\alpha)\, \varkappa^n.$$

Andererseits ist nach (8.): $\varphi_\beta^{(2n)} = \varphi_\beta^{(2n+1)}$, folglich:

$$\text{(12.)} \qquad \operatorname{abs} (\varphi_\beta^{(2n)} - \varphi_\beta^{(2n+1)}) = 0, \text{ mithin z. B.} < (D\Sigma_\alpha)\, \varkappa^n.$$

Solches constatirt ist jetzt das allgemeine *Convergenztheorem* (pg. 435) unmittelbar anwendbar auf die zu untersuchende Reihe:

$$\chi = (\varphi - \varphi') + (\varphi'' - \varphi''') \ldots + (\varphi^{(2n)} - \varphi^{(2n+1)}) + \ldots \text{ in inf.} \tag{13.}$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe

$$\varphi^{(2n)} - \varphi^{(2n+1)}$$

ist nämlich, nach (7.), eine Fundamentalfunction der Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$, also *auf* $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ eindeutig und stetig, und *innerhalb* $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ harmonisch. Ausserdem besitzt dieses allgemeine Glied *am Rande* von $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ Werthe, die, zufolge (11.), (12.), dem absoluten Betrage nach, durchweg

$$\leq (D\Sigma_\alpha)\, \varkappa^n$$

sind, wo $D\Sigma_\alpha$ und $\varkappa$ zwei gegebene positive Constanten vorstellen und $\varkappa < 1$ ist. Zufolge jenes Convergenztheorems wird daher χ nicht nur in *jedwedem* Punkte der Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ *convergent*, sondern zugleich auch eine *Fundamentalfunction der Fläche* $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$, d. h. eine Function sein, die auf $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ eindeutig und stetig, und innerhalb $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ harmonisch ist. Es bleibt noch übrig, die Werthe dieser Function χ *am Rande* von $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ zu untersuchen.

Man kann die Formel (13.), da ihre Congruenz erwiesen ist, auch so schreiben:

$$\chi = \lim_{n=\infty} [(\varphi - \varphi') + (\varphi'' - \varphi''') \ldots + (\varphi^{(2n)} - \varphi^{(2n+1)})]. \tag{14.}$$

Hieraus folgt, was den Rand α, respective den Rand β betrifft:

$$\begin{cases} \chi_\alpha = \lim_{n=\infty} [(\varphi_\alpha - \varphi_\alpha') + (\varphi_\alpha'' - \varphi_\alpha''') \ldots + (\varphi_\alpha^{(2n)} - \varphi_\alpha^{(2n+1)})], \\ \chi_\beta = \lim_{n=\infty} [(\varphi_\beta - \varphi_\beta') + (\varphi_\beta'' - \varphi_\beta''') \ldots + (\varphi_\beta^{(2n)} - \varphi_\beta^{(2n+1)})], \end{cases}$$

also mit Rücksicht auf (8.):

$$\begin{cases} \chi_\alpha = \lim_{n=\infty} [\Sigma_\alpha - \varphi_\alpha^{(2n+1)}], \\ \chi_\beta = \lim_{n=\infty} [0], \end{cases} \quad \text{also nach (10.):} \quad \begin{cases} \chi_\alpha = \Sigma_\alpha - a, \\ \chi_\beta = 0. \end{cases}$$

Die von uns construirte Function χ ist also eine Fundamentalfunction der Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$, die am Rande dieser Fläche die Werthe besitzt:

$$\chi_\alpha = \Sigma_\alpha - a, \quad und \quad \chi_\beta = 0. \tag{15.}$$

Dabei bezeichnet a die durch die Formel (10.) *definirte Constante, also eine Constante, deren Werth, nach* (10a.), *der Formel entspricht:*

$$\text{Min}\, \Sigma_\alpha < a < \text{Max}\, \Sigma_\alpha. \tag{16.}$$

Bemerkung. — Man kann die hier dargelegte Constructionsmethode der Function χ z. B. auf den *speciellen* Fall anwenden, dass die auf α vorgeschriebenen Werthe Σ_α *constant*, etwa sämmtlich $= 1$ sind. Bezeichnet man die für diesen speciellen Fall sich ergebende Function χ mit χ', so

wird dieses χ' *eine Fundamentalfunction der Fläche* $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ *sein, welche am Rande von* $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ *die Werthe hat:*

(ξ.) $$\chi_\alpha' = 1 - a', \quad \textit{und} \quad \chi_\beta' = 0.$$

Dabei bezeichnet alsdann a' eine *Constante*, die, zufolge (16.), der Formel entspricht:

(η.) $$1 < a' < 1,$$

also eine Constante, *deren Werth nothwendig* $= 1$ *ist*. Solches constatirt, gehen aber die Formeln (ξ.) über in

(ζ.) $$\chi_\alpha' = 0, \quad \text{und} \quad \chi_\beta' = 0;$$

woraus, mit Rücksicht auf den Satz (18.) pg. 395, sofort folgt, dass die Function χ' auf $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ *allenthalben* $= 0$ ist.

Will man also eine Fundamentalfunction der Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ haben, welche am Rande α einen *von* 0 *verschiedenen* constanten Werth, andererseits am Rande β den Werth 0 hat, so wird ein *anderes* Verfahren einzuschlagen sein. Und dieses soll zunächst jetzt dargelegt werden.

Markirt man auf der gegebenen Kugelfläche zwei feste Punkte c und c_1, so kann die monogene Function

$$\log \frac{z-c}{z-c_1}$$

in solcher Weise festgesetzt gedacht werden, dass sie auf der ganzen Kugelfläche eindeutig und stetig ist, mit Ausnahme der Punkte c, c_1 und einer von c nach c_1 gehenden Linie [vgl. pg. 229, 230]. Setzt man also:

$$z - c = re^{i\vartheta} \quad \text{und} \quad z - c_1 = r_1 e^{i\vartheta_1},$$

mithin $$\log \frac{z-c}{z-c_1} = \left(\log \frac{r}{r_1}\right) + i(\vartheta - \vartheta_1),$$

so wird der reelle Theil dieser Function, d. i. $\log \frac{r}{r_1}$ auf der ganzen Kugelfläche eindeutig, stetig und harmonisch sein, mit alleiniger Ausnahme der Punkte c und c_1 [Satz (7.), pg. 390].

Denkt man sich also c und c_1 *ausserhalb* $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ gelegen, und zwar c innerhalb der abgesonderten (disjungirten) Calotte $\mathfrak{S}_\beta^0$, und denkt man sich überdies um c_1 (als Centrum) eine unendlich kleine Kreisperipherie β_1 beschrieben [vgl. die folgende Figur], und den von β und β_1 begrenzten Theil der Kugelfläche mit $\mathfrak{S}_{\beta\beta_1}$ bezeichnet, so wird der in Rede stehende reelle Theil

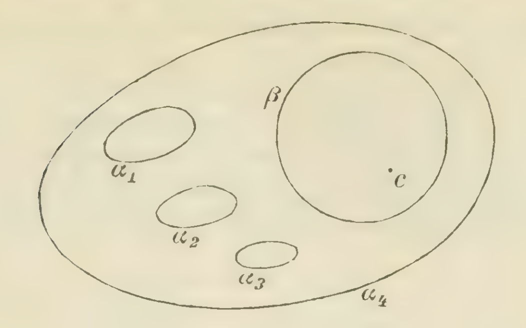
(17.) $$L = \log \frac{r}{r_1}$$

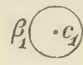
auf $\mathfrak{S}_{\beta\beta_1}$ *ausnahmslos* eindeutig, stetig und harmonisch sein. Aehnliches gilt daher für die Function:

(18.) $$F = L - V^{\beta, L}.^{*)}$$

Es wird nämlich F *auf* $\mathfrak{S}_{\beta\beta_1}$ eindeutig und stetig, und *innerhalb*

*) Dieses V soll die auf pg. 437 festgesetzte Bedeutung haben.





$\mathfrak{S}_{\beta\beta_1}$ harmonisch sein. Gleichzeitig wird diese Function F *am Rande* von $\mathfrak{S}_{\beta\beta_1}$ die Werthe besitzen:

(x.) $$F_\beta = 0, \qquad\qquad F_{\beta_1} \text{ durchweg} > 0.$$

Denn F ist (ebenso wie L) im Punkte c_1 *positiv unendlich*, folglich auf der um c_1 beschriebenen kleinen Kreisperipherie β_1 von *äusserst grossem*, und zwar *positivem* Werth.

Aus diesen Eigenschaften der Function F folgt nach bekanntem Satz [(17.) pg. 395], dass dieselbe auf dem *innerhalb* $\mathfrak{S}_{\beta\beta_1}$ befindlichem Curvensystem α (d. i. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h$) durchweg > 0 ist*); was angedeutet sein mag durch die Formel:

(y.) $$F_\alpha \text{ durchweg} > 0.$$

Die hier von uns construirte Function F ist, wie aus den angegebenen Eigenschaften folgt, eine **Fundamentalfunction** *der Fläche $\mathfrak{S}_{\beta\beta_1}$, mithin* (weil $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ ein *Theil* von $\mathfrak{S}_{\beta\beta_1}$ ist) *auch eine* **Fundamentalfunction** *der Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$. Und zwar besitzt sie am Rande von $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$* [zufolge (x.), (y.)] *Werthe, die den Formeln entsprechen:*

(19.) $$F_\alpha \textit{ durchweg} > 0, \quad \textit{und} \quad F_\beta = 0.$$

Denkt man sich jetzt, auf Grund der Randwerthe F_α, Functionen $\Phi, \Phi', \Phi'', \ldots \mathrm{X}$ genau in derselben Weise gebildet, wie früher, auf Grund der Randwerthe Σ_α, die Functionen $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \chi$ construirt wurden, so wird das so resultirende X eine neue *Fundamentalfunction* der Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ sein, mit den Randwerthen:

$$\mathrm{X}_\alpha = F_\alpha - A, \quad \text{und} \quad \mathrm{X}_\beta = 0, \qquad [\text{vgl. (15.)}],$$

*) In der Figur ist die Zahl h wieder $= 4$ gesetzt.

wo A eine der Formel

$$\text{Min}\, F_\alpha < A < \text{Max}\, F_\alpha, \quad [\text{vgl. } (16.)],$$

entsprechende *Constante* vorstellt. Aus dieser letzten Formel folgt mit Rücksicht auf (19.) sofort, dass $A > 0$ (niemals $= 0$) ist.

Subtrahiren wir nun die Function X von F, so erhalten wir *eine Fundamentalfunction $F - \mathsf{X}$ der Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ mit den Randwerthen:*

$$F_\alpha - \mathsf{X}_\alpha = A > 0, \quad \textit{und} \quad F_\beta - \mathsf{X}_\beta = 0. \tag{20.}$$

Addiren wir jetzt endlich die mit $\frac{a}{A}$ multiplicirte Function $F - \mathsf{X}$ hinzu zu der früheren Function χ (15.), so erhalten wir eine *neue Fundamentalfunction der Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$:*

$$\Psi = \chi + \frac{a}{A}(F - \mathsf{X}) \tag{21.}$$

mit den Randwerthen:

$$\Psi_\alpha = \Sigma_\alpha, \quad \textit{und} \quad \Psi_\beta = 0. \tag{22.}$$

Hiemit aber sind wir, was die Beantwortung der ursprünglich vorgelegten Frage (3.) betrifft, zu folgendem Satz gelangt:

(23.) *Sind am Rande α der Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ irgend welche (stetigen) Werthe Σ_α in beliebiger Weise vorgeschrieben, so lässt sich, falls die in (3.) genannte Voraussetzung erfüllt gedacht wird, stets eine Fundamentalfunction Ψ der Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ construiren, welche an jenem Rande α die daselbst vorgeschriebenen Werthe Σ_α besitzt, andererseits aber am Rande β durchweg $= 0$ ist.*

In ganz analoger Weise wird sich nun offenbar eine zweite Fundamentalfunction Ψ' der Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ construiren lassen, welche umgekehrt am Rande α durchweg $= 0$ ist, andererseits aber am Rande β beliebig vorgeschriebene (stetige) Werthe Σ_β besitzt. Demgemäss wird alsdann

$$\Omega = \Psi + \Psi' \tag{24.}$$

eine Fundamentalfunction der Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ sein, mit den Randwerthen:

$$\Omega_\alpha = \Sigma_\alpha, \quad \text{und} \quad \Omega_\beta = \Sigma_\beta, \tag{25.}$$

so dass man also zu folgendem Resultat gelangt:

(26.) Resultat. — *Es sei $\mathfrak{S}$ irgend ein von beliebig vielen Curven begrenzter Theil der gewöhnlichen einblättrigen Kugelfläche. Irgendwo im Innern von $\mathfrak{S}$ werde eine Calotte aus der Fläche $\mathfrak{S}$ herausgenommen, und die so entstehende neue Fläche mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet. Alsdann wird man, falls irgend welche Methode zur Lösung der Fundamentalaufgabe*

(20.) pg. 396 *für die ursprüngliche Fläche $\mathfrak{S}$ bekannt ist, diese Fundamentalaufgabe stets auch für die neue Fläche $\mathfrak{T}$ zu lösen im Stande sein.* Dabei sind $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ respective substituirt an Stelle der bisherigen umständlicheren Bezeichnungen $\mathfrak{S}_\alpha$ und $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$.

Jene Fundamentalaufgabe ist nun aber [Satz pg. 430] lösbar für jedwede *Calotte* der Kugelfläche. Durch successive Anwendung des soeben gefundenen Satzes (26.) ergiebt sich daher, dass sie auch lösbar ist für einen von 2 oder 3 u. s. w. Kreisen begrenzten Theil der Kugelfläche. Also der

(27.) **Satz.** — *Die Fundamentalaufgabe* (20.) pg. 396 *ist lösbar für einen von beliebig vielen Kreisen begrenzten Theil der einblättrigen Kugelfläche.*

Mit andern Worten: Für jeden solchen Theil sind die Fundamentalfunctionen construirbar für beliebig vorgeschriebene (stetige) Randwerthe.

Es sei jetzt eine m-blättrige *Normalzone* mit den Randcurven α und β gegeben [vgl. die Definition pg. 426]. Construirt man diejenigen beiden Tangentialkegel der Kugelfläche, deren Contactcurven respective mit α und β zusammenfallen, und bezeichnet man mit c und c' diejenigen beiden Punkte, in denen die Kugelfläche von einer durch die Spitzen der beiden Kegel gelegten geraden Linie geschnitten wird, so kann offenbar jene Normalzone mittelst der Substitution:

$$\frac{z-c}{z-c'} = \zeta^m$$

umgewandelt werden in eine in der ζ-Ebene liegende, von zwei *concentrischen* Kreisen begrenzte *einblättrige* Fläche [vgl. die Betrachtungen pg. 428, 429].

Denkt man sich nun am Rande der Normalzone d. i. längs α und β irgend welche (längs α und β stetige) Werthe Σ vorgeschrieben, so wird die diesen Σ's entsprechende Fundamentalfunction U der Zone *ein und dieselbe* sein, einerlei ob man die Zone in ihrem *ursprünglichen Zustande* verharren, oder ob man sie, mittelst der angegebenen Substitution, in jenen einfacheren *einblättrigen Zustand* übergehen lässt. Für den *letztern* Zustand ist aber die Fundamentalfunction U *wirklich construirbar* zufolge des Satzes (27.). Gleiches gilt daher auch für den *erstern*. Man gelangt somit zu folgendem Satz.

Satz über die Normalzone. — *Sind an den Rändern α und β einer Normalzone* [vgl. die Definition pg. 426] *irgend welche längs α und β stetige Werthe Σ vorgeschrieben, so wird die diesen Σ's zu-*
(28.) *gehörige Fundamentalfunction der Zone stets construirbar sein.*

Mit andern Worten: Es wird stets eine Function construirbar sein, welche auf der Zone eindeutig und stetig, innerhalb derselben harmonisch, und am Rande derselben identisch mit jenen Σ's ist.

§ 3.

Adjunctive oder combinatorische Methoden zur Bildung der Fundamentalfunctionen.

Man kann zwei gegebene Flächen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ so aufeinander legen, dass theilweise Deckung stattfindet. Man kann sodann die sich deckenden Flächentheile mit einander verschmelzen lassen, und hierdurch jene Flächen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in *eine einzige* Fläche verwandeln. Diese letztere Fläche mag die aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *combinirte* Fläche genannt, und mit $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ bezeichnet werden. Ich werde nun im Folgenden zeigen, dass in vielen (noch näher anzugebenden) Fällen die Fundamentalaufgabe (20.) pg. 396 für die *combinirte* Fläche $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ stets lösbar ist, falls man nur in Besitz irgend welcher Methode ist zur Lösung derselben für die *einzelnen* Flächen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Zwei *Kreisflächen* $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ können der Art zur theilweisen Deckung gebracht werden, dass ihre Randcurven *einander schneiden.* Alsdann repräsentirt das Deckungsgebiet einen *Abschnitt* (Segment) von $\mathfrak{A}$, und ebenso auch einen *Abschnitt* der Fläche $\mathfrak{B}$. Analoges ist zu bemerken über zwei *Calotten* $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, vorausgesetzt, dass sie von *einerlei Krümmung*, dass sie also Theile von Kugelflächen sind, die *denselben* Radius besitzen. Die aus den beiden *Kreisflächen* respective aus den beiden *Calotten* combinirte Fläche $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ wird alsdann offenbar eine einzige in sich zurücklaufende Randcurve besitzen, die zusammengesetzt ist aus einem Theil des Randes von $\mathfrak{A}$ und aus einem Theil des Randes von $\mathfrak{B}$. — Andererseits aber kann man zwei solche Calotten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, falls die Summe ihrer sphärischen Radien $> 180^0$ ist, auch der Art zur theilweisen Deckung bringen, dass ihre Randcurven einander *nicht* schneiden. Alsdann repräsentirt das Deckungsgebiet einen *Gürtel* (Zone) von $\mathfrak{A}$, und ebenso auch einen *Gürtel* der Fläche $\mathfrak{B}$. Und gleichzeitig wird alsdann die *combinirte* Fläche $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ nichts Anderes sein, als die ganze volle Kugelfläche. — Diesen Beispielen entsprechend sind also zwei Fälle zu unterscheiden:

Erster Fall: *Die Verschmelzung zweier Flächen* 𝔄 *und* 𝔅
(A.) *findet in solcher Weise statt, dass das Verschmelzungsgebiet durch irgend welche Abschnitte der Fläche* 𝔄, *und ebenso auch durch irgend welche Abschnitte*) der Fläche* 𝔅 *dargestellt ist. Alsdann mag die Verschmelzung selber eine abschnittförmige heissen.*

Bei Behandlung dieses Falles werde ich stets voraussetzen, dass
(A'.) die Randcurven von 𝔄 mit denen von 𝔅 nirgends in Berührung sind, dass vielmehr diese Curven in jedem Punkte, den sie mit einander gemein haben, einander *schneiden;* so dass also in jedem solchen Punkte die von den Curven gebildeten Winkel *von* 0 *verschieden* sind.

Zweiter Fall: *Die Verschmelzung zweier Flächen* 𝔄 *und* 𝔅 *findet in solcher Weise statt, dass das Verschmelzungsgebiet einen Gürtel*
(B.) *der Fläche* 𝔄, *und ebenso auch einen Gürtel der Fläche* 𝔅 *repräsentirt. Alsdann mag die Verschmelzung selber eine gürtelförmige genannt werden.*

§ 4.

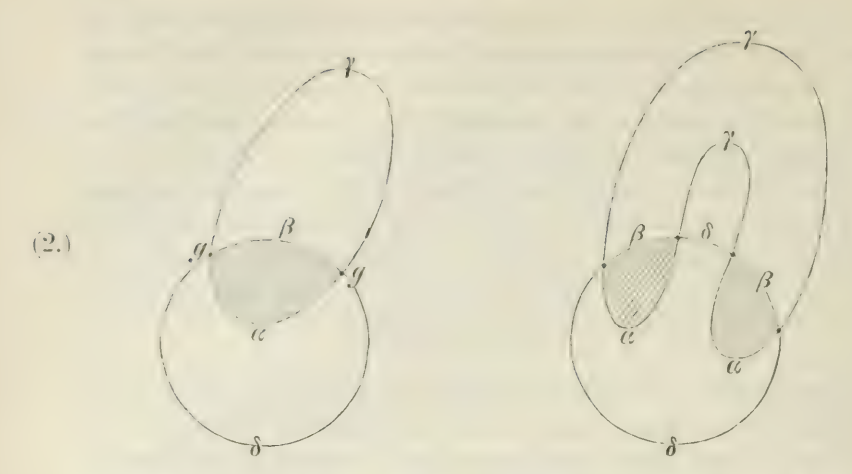
Erste combinatorische Methode, (abschnittförmige Verschmelzung).

Es sei 𝔄 irgend *ein Theil der gewöhnlichen einblättrigen Kugelfläche*, doch mag (der Einfachheit willen) diese Fläche 𝔄 nur *eine* Randcurve besitzen. Mit dieser Fläche 𝔄 mag irgend eine einblättrige *Calotte* 𝔅 abschnittförmig verschmolzen, und die so entstehende neue Fläche mit (𝔄, 𝔅) bezeichnet sein. *Es sei nun, wie wir express voraussetzen, irgend eine Methode bekannt zur Lösung der Funda-*
(1.) *mentalaufgabe* (20.) pg. 396 *für die ursprünglich gegebene Fläche* 𝔄. *Es soll untersucht werden, ob man alsdann diese Aufgabe vielleicht auch für die combinirte Fläche* (𝔄, 𝔅) *zu lösen im Stande ist. Es soll also eine Fundamentalfunction der neuen Fläche* (𝔄, 𝔅) *zu construiren versucht werden, die am Rande dieser Fläche beliebig vorgeschriebene stetige Werthe* Σ *besitzt.*

Die Theile, in welche die Randcurven von 𝔄 und 𝔅 einander gegenseitig zerschneiden, mögen α, β, γ, δ heissen, der Art, dass die Randsegmente der Fläche 𝔄 mit α, γ, die der Fläche 𝔅 mit β, δ, endlich die Randsegmente des Verschmelzungsgebietes mit α, β benannt werden; wie solches deutlicher angegeben ist in den folgenden Zeichnungen:

*) Die *Anzahl* dieser Abschnitte ist z. B. = 1 in der Figur pg. 448 *linker* Hand. Hingegen ist dieselbe = 2 in der Figur *rechter* Hand.

(2.)



Diese Figuren, in denen die Verschmelzungsgebiete durch Schraffirung hervorgehoben sind, beziehen sich auf den Fall, dass die Randcurven von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einander 2mal oder 4mal schneiden*). Analoge Figuren kann man sich leicht vorstellen für den Fall einer 6maligen, 8maligen u. s. w. Durchschneidung. Den Randsegmenten α, β, γ, δ entsprechend kann man die Flächen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ folgendermassen benennen:

$$(3.) \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{S}_{\alpha\gamma}, \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{S}_{\beta\delta}, \qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{S}_{\gamma\delta},$$

während gleichzeitig das [in der Figur schraffirte und im Allgemeinen aus mehreren Stücken bestehende] Verschmelzungsgebiet mit $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ zu bezeichnen ist.

Die *vorgeschriebenen* Σ's befinden sich am Rande der *combinirten* Fläche $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{S}_{\gamma\delta}$, d. i. in den Curven γ, δ; so dass also z. B. die Curven α, β von diesen Σ's völlig frei sind. Wir wollen nun aber diese Curven α, β ebenfalls mit solchen Werthen versehen, dieselben ganz willkürlich wählen, und ebenfalls mit Σ bezeichnen. Nur mag dabei dafür Sorge getragen werden, dass diese den Curven α, β zuertheilten *auxiliären* Σ's in stetigem Zusammenhang sind sowohl untereinander wie auch mit jenen *vorgeschriebenen* Σ's der Curven γ, δ; so dass also Σ z. B. *eindeutig* ist in jedem der Schnittpunkte g [vgl. (2.)].

Die Fundamentalfunctionen U und V der Flächen $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}_{\alpha\gamma}$ und

*) Die *beiden* Schnittpunkte sind in der Figur *linker* Hand mit g bezeichnet. Desgleichen mögen die *vier* Schnittpunkte in der Figur *rechts* ebenfalls mit g bezeichnet gedacht werden.

$\mathfrak{B} = \mathfrak{S}_{\beta\delta}$ sind ohne Weiteres *construirbar* [die einen auf Grund der Voraussetzung (1.), die andern zufolge des Satzes pg. 430]. Demgemäss kann man also der Reihe nach folgende Functionen φ, ψ, φ', ψ', φ'', ψ'', ... construiren:

$$\begin{aligned} \varphi &= U^{\alpha+\gamma,\,\Sigma}, & \psi &= V^{\beta+\delta,\,\Sigma}, \\ \varphi' &= \varphi + U^{\alpha,\,\psi-\varphi}, & \psi' &= \psi + V^{\beta,\,\varphi-\psi}, \\ \varphi'' &= \varphi' + U^{\alpha,\,\psi'-\varphi'}, & \psi'' &= \psi' + V^{\beta,\,\varphi'-\psi'}, \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned} \tag{4.}$$

Zugleich werde gesetzt:

$$\begin{aligned} \omega &= \varphi - \psi, \\ \omega' &= \varphi' - \psi', \\ \omega'' &= \varphi'' - \psi'', \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{5.}$$

Bemerkung. — Hier ist z. B. unter $U^{\alpha,\,\psi-\varphi}$ diejenige Fundamental-Function der Fläche $\mathfrak{A}$ zu verstehen, welche auf α die Werthe $\psi - \varphi$ besitzt, andererseits aber auf γ überall $= 0$ ist. Demgemäss könnte der Einwand gemacht werden, dass dies keine *eigentliche* Fundamentalfunction sei, da bei einer solchen die vorgeschriebenen Randwerthe immer *stetig* sein müssten; was hier nicht der Fall sei.

Dieser Einwand verschwindet offenbar, sobald wir zeigen können, dass $\psi - \varphi$ in den zwischen α und γ vorhandenen Grenzpunkten g *verschwindet.* — Nun ist nach der *ersten* Zeile der Formeln (4.): $\varphi_g = \Sigma_g$, ebenso $\psi_g = \Sigma_g$, mithin $\psi_g - \varphi_g = 0$. *Q. e. d.*

Aus den Formeln (4.) ergeben sich ohne Mühe folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &= \Sigma_\alpha, & \varphi_\gamma &= \Sigma_\gamma, & \psi_\beta &= \Sigma_\beta, & \psi_\delta &= \Sigma_\delta, \\ \varphi_\alpha' &= \psi_\alpha, & \varphi_\gamma' &= \varphi_\gamma = \Sigma_\gamma, & \psi_\beta' &= \varphi_\beta, & \psi_\delta' &= \psi_\delta = \Sigma_\delta, \\ \varphi_\alpha'' &= \psi_\alpha', & \varphi_\gamma'' &= \varphi_\gamma' = \Sigma_\gamma, & \psi_\beta'' &= \varphi_\beta', & \psi_\delta'' &= \psi_\delta' = \Sigma_\delta, \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} & &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned} \tag{6.}$$

Ferner ergiebt sich aus der *zweiten* Zeile von (4.):

$$\varphi_\beta' = \varphi_\beta + U_\beta^{\alpha,\,\psi-\varphi}, \qquad \psi_\alpha' = \psi_\alpha + V_\alpha^{\beta,\,\varphi-\psi},$$

also, weil nach (6.) $\varphi_\beta = \psi_\beta'$ und $\psi_\alpha = \varphi_\alpha'$ *ist,*

$$\varphi_\beta' - \psi_\beta' = U_\beta^{\alpha,\,\psi-\varphi}, \qquad \psi_\alpha' - \varphi_\alpha' = V_\alpha^{\beta,\,\varphi-\psi},$$

also, mit Rücksicht auf (5.)

$$\omega_\beta' = -\, U_\beta^{\alpha,\,\omega}, \qquad \omega_\alpha' = -\, V_\alpha^{\beta,\,\omega}. \tag{7.}$$

Hieraus aber folgt mit Rücksicht auf die Sätze (Ic.) pg. 399 und (N II.) pg. 431:

$$\text{Max abs } \omega_\beta' < \text{Max abs } \omega_\alpha, \qquad \text{Max abs } \omega_\alpha' < (\text{Max abs } \omega_\beta)\,\lambda; \tag{8.}$$

dabei bezeichnet λ eine *positive Constante*, die < 1 ist, die *Situationsconstante* des Curvensystems α in Bezug auf die Calotte $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}_{\beta\gamma\delta}$.

Ebenso wie die Relationen (8.) aus der *zweiten* Zeile (4.) entstanden sind, ebenso ergeben sich analoge Relationen aus den *folgenden* Zeilen (4.), so dass man, Alles zusammengenommen, und M zur Abkürzung für Max abs gesetzt, zu folgenden Formeln gelangt:

$$(\xi.)\qquad \begin{array}{ll} M\omega_\beta' < M\omega_\alpha\;, & M\omega_\alpha' < (M\omega_\beta\,)\,\lambda, \\ M\omega_\beta'' < M\omega_\alpha'\;, & M\omega_\alpha'' \leq (M\omega_\beta'\,)\,\lambda, \\ M\omega_\beta''' < M\omega_\alpha'', & M\omega_\alpha''' \leq (M\omega_\beta'')\,\lambda, \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Hieraus folgt, indem man die Gleichungen von Neuem hinschreibend, die grössere der beiden Constanten $M\omega_\alpha$, $M\omega_\beta$ mit M bezeichnet, und dabei jede Gleichung mit Rücksicht auf die vorhergehenden umgestaltet:

$$\begin{array}{ll} M\omega_\beta' < \mathsf{M}, & M\omega_\alpha' < \mathsf{M}\lambda, \\ M\omega_\beta'' < \mathsf{M}\lambda, & M\omega_\alpha'' < \mathsf{M}\lambda, \\ M\omega_\beta''' < \mathsf{M}\lambda, & M\omega_\alpha''' \leq \mathsf{M}\lambda^2, \\ M\omega_\beta^{\mathrm{IV}} \leq \mathsf{M}\lambda^2, & M\omega_\alpha^{\mathrm{IV}} < \mathsf{M}\lambda^2, \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

mithin allgemein:

$$\begin{array}{ll} M\omega_\beta^{(2q)} < \mathsf{M}\lambda^q, & M\omega_\alpha^{(2q)} < \mathsf{M}\lambda^q, \\ M\omega_\beta^{(2q+1)} < \mathsf{M}\lambda^q, & M\omega_\alpha^{(2q+1)} < \mathsf{M}\lambda^{q+1}. \end{array}$$

Diese vier letzten Formeln aber kann man, unter Verstärkung der darin enthaltenen Ungleichheiten, einfacher so schreiben:

$$(\eta.)\qquad M\omega_\beta^{(n)} < \mathsf{M}(\sqrt{\lambda})^{n-1}, \qquad M\omega_\alpha^{(n)} \leq \mathsf{M}(\sqrt{\lambda})^{n-1},$$

oder, ausführlicher dargestellt:

$$(9.)\qquad \text{Max abs } \omega_\beta^{(n)} \leq \mathsf{M}(\sqrt{\lambda})^{n-1}, \qquad \text{Max abs } \omega_\alpha^{(n)} < \mathsf{M}(\sqrt{\lambda})^{n-1}.$$

Solches constatirt, bilden wir jetzt die Reihe:

$$(10.)\qquad \Phi = \varphi + (\varphi' - \varphi) + (\varphi'' - \varphi') \ldots + (\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}) + \ldots \text{ in inf.},$$

eine Reihe, auf welche das allgemeine *Convergenztheorem* [pg. 435] unmittelbar anwendbar ist. Das allgemeine Glied der Reihe:

$$\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}$$

ist nämlich nach (4.) eine Fundamentalfunction der Fläche $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}_{\alpha\gamma}$, und besitzt am Rande derselben nach (6.) und (5.) die Werthe:

$$\begin{cases} \varphi_\alpha^{(n+1)} - \varphi_\alpha^{(n)} = \psi_\alpha^{(n)} - \varphi_\alpha^{(n)} = -\omega_\alpha^{(n)}, \\ \varphi_\gamma^{(n+1)} - \varphi_\gamma^{(n)} = 0; \end{cases}$$

woraus mit Rücksicht auf (9.) folgt:

$$\begin{cases} \text{Max abs } (\varphi_\alpha^{(n+1)} - \varphi_\alpha^{(n)}) < \mathsf{M}(\sqrt{\lambda})^{n-1}, \\ \text{Max abs } (\varphi_\gamma^{(n+1)} - \varphi_\gamma^{(n)}) = 0, \text{ mithin z. B.} < \mathsf{M}(\sqrt{\lambda})^{n-1}; \end{cases}$$

dabei bezeichnen M und $\sqrt{\lambda}$ zwei gegebene positive Constanten, und zwar ist $\sqrt{\lambda} < 1$.

Zufolge des genannten Theorems [pg. 435] wird daher das in (10.) angegebene Φ nicht nur für jedweden Punkt der Fläche $\mathfrak{A}$ *convergent*, sondern zugleich auch eine *Fundamentalfunction* dieser Fläche sein. Jenes Φ aber kann, nachdem seine Convergenz constatirt ist, offenbar auch so geschrieben werden:

$$\Phi = \lim_{n=\infty} \{\varphi + (\varphi' - \varphi) + (\varphi'' - \varphi') \ldots + (\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)})\},$$

d. i. $\Phi = \lim_{n=\infty} \varphi^{(n+1)}$, oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$\Phi = \lim_{n=\infty} \varphi^{(n)}. \tag{11a.}$$

Hieraus folgt, weil, nach (6.), $\varphi_\gamma = \varphi_\gamma' = \varphi_\gamma'' = \ldots = \Sigma_\gamma$ ist, sofort:

$$\Phi_\gamma = \Sigma_\gamma. \tag{11b.}$$

In analoger Weise lassen sich offenbar die Functionen $\psi, \psi', \psi'', \ldots$ behandeln; so dass man also zu folgendem Resultat gelangt: *Wird*

$$\Phi = \lim_{n=\infty} \varphi^{(n)} \quad \textit{und} \quad \Psi = \lim_{n=\infty} \psi^{(n)} \tag{12.}$$

gesetzt, so repräsentirt Φ eine Fundamentalfunction der Fläche $\mathfrak{A}$, andererseits Ψ eine Fundamentalfunction der Fläche $\mathfrak{B}$. Und zwar entsprechen diese Functionen den Formeln:

$$\Phi_\gamma = \Sigma_\gamma \quad \textit{und} \quad \Psi_\delta = \Sigma_\delta. \tag{13.}$$

Φ und Ψ sind daher z. B. auch Fundamentalfunctionen desjenigen Gebietes $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$, in welchem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einander decken. Nun ist nach (12.) und mit Rücksicht auf (5.):

$$\Phi - \Psi = \lim_{n=\infty} \omega^{(n)}. \tag{14.}$$

Die $\omega, \omega', \omega'', \ldots \omega^{(n)}, \ldots$ aber sind Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$, und entsprechen zugleich am Rande von $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ den Formeln (9.). Nach dem allgemeinen Convergenztheorem [(16.) pg. 436] wird daher $\lim_{n=\infty} \omega^{(n)}$ für jedweden Punkt der Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ *verschwinden*. Die beiden Functionen Φ, Ψ sind demgemäss, nach (14.), auf der Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ *unter einander identisch*, und repräsentiren also zusammengenommen *eine einzige* die ganze Fläche $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ oder $\mathfrak{S}_{\gamma\delta}$ bedeckende Function Ω.

Die in solcher Weise

$$\begin{cases} \text{auf } \mathfrak{A} \text{ durch } \Omega = \Phi, \\ \text{auf } \mathfrak{B} \text{ durch } \Omega = \Psi \end{cases} \tag{15.}$$

definirte Function Ω ist eine Fundamentalfunction der Fläche $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{S}_{\gamma\delta}$, und am Rande dieser Fläche identisch mit den daselbst vorgeschriebenen Σ's; wie solches aus dem Satze (12.), (13.) sofort folgt. *Demgemäss repräsentirt also die Function Ω die Lösung der zu Anfang dieses Paragraphs in* (1.) *gestellten Aufgabe.*

Die Voraussetzung, dass $\mathfrak{A}$ nur *eine* Randcurve besitzt, ist nur der *Bequemlichkeit* willen eingeführt. Man kann dieselbe ohne Weiteres fallen lassen. Ebenso habe ich auch, nur der *bequemeren Anschauung* willen, im gegenwärtigen Paragraph auf *einblättrige* Flächen mich beschränkt. In der That sind alle Betrachtungen und Formeln dieses Paragraphs, wie man nachträglich leicht übersieht, ohne Weiteres auch anwendbar auf *mehrblättrige* Flächen; so dass man also zu folgendem Resultat gelangt:

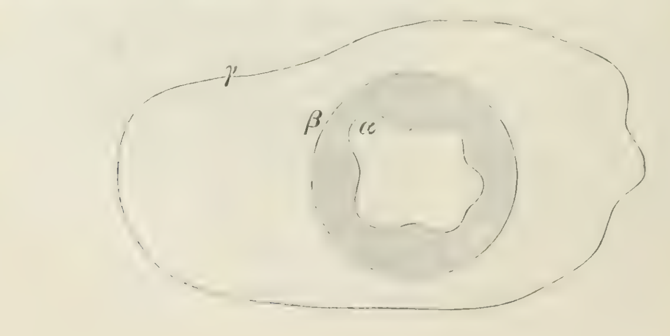
Satz. — *Es sei $\mathfrak{A}$ ein von beliebig vielen Randcurven begrenzter Theil einer ein- oder mehrblättrigen Riemann'schen Kugelfläche.*

(16.) *Denkt man sich nun diese Fläche $\mathfrak{A}$ mit irgend einer Normalcalotte $\mathfrak{B}$ abschnittförmig verschmolzen* [vgl. die Definition (A.), (A'.) pg. 447], *so wird die Fundamentalaufgabe* [pg. 396], *falls sie für die ursprüngliche Fläche $\mathfrak{A}$ lösbar ist, stets auch lösbar sein für die durch jene Verschmelzung entstehende neue Fläche* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

§ 5.

Zweite combinatorische Methode, (gürtelförmige Verschmelzung).

Wir wollen auch hier mit möglichst einfachen, anschaulichen Fällen beginnen. Es sei $\mathfrak{A}$ ein von zwei Randcurven α und γ begrenzter Theil der einblättrigen Kugelfläche, ferner $\mathfrak{B}$ eine einblättrige Calotte mit der Randcurve β. Endlich sei $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ diejenige *neue* Fläche, welche aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch *gürtelförmige* Verschmelzung [vgl. die Definition (B.) pg. 447] entsteht; wie solches näher angegeben ist in der folgenden Zeichnung:

(17.) 

Demgemäss werden die Flächen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$) nach ihren Randcurven folgendermassen zu bezeichnen sein:

(18.) $$\mathfrak{A} = \mathfrak{S}_{\alpha\gamma}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{S}_{\beta}, \quad (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{S}_{\gamma},$$

während gleichzeitig das [in der Figur schraffirte] Verschmelzungsgebiet mit $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ zu benennen ist.

(19.) *Es sei nun, wie wir voraussetzen, irgend welche Methode bekannt zur Lösung der Fundamentalaufgabe* [pg. 396] *für die ursprüngliche Fläche* $\mathfrak{A}$. *Es soll untersucht werden, ob man alsdann diese Aufgabe auch für die neue Fläche* ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$) *zu lösen im Stande ist.*

Man kann hier Schritt für Schritt dieselben Betrachtungen und Formeln wie im vorhergehenden Paragraph von (4.) bis (7.) wiederholen, wobei nur die Formeln mit dem Index δ gegenwärtig zu unterdrücken sind. Auf die Formeln (7.)

(20.) $$\omega_{\beta}' = - U_{\beta}^{\alpha,\,\omega}, \qquad \omega_{\alpha}' = - V_{\alpha}^{\beta,\,\omega}$$

ist aber gegenwärtig ein *anderes* Räsonnement anzuwenden, unter Benutzung der Sätze (II.) pg. 402 und (Ic.) pg. 399. Mittelst dieser Sätze erhält man:

(21.) $$\text{Max abs } \omega_{\beta}' < (\text{Max abs } \omega_{\alpha})\,\lambda, \qquad \text{Max abs } \omega_{\alpha}' \leq \text{Max abs } \omega_{\beta};$$

dabei repräsentirt λ eine *positive Constante*, die < 1 ist, die *Situationsconstante* der Curve β in Bezug auf die Fläche $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}_{\alpha\gamma}$. Behandelt man diese Formeln (21.) ähnlich wie vorhin die Formeln (8.), so gelangt man zu ähnlichen Resultaten wie damals, nämlich zu den mit (9.) übereinstimmenden Formeln:

(22.) $$\text{Max abs } \omega_{\beta}^{(n)} \leq \mathsf{M}\,(\sqrt{\lambda})^{n-1}, \qquad \text{Max abs } \omega_{\alpha}^{(n)} \leq \mathsf{M}\,(\sqrt{\lambda})^{n-1};$$

so dass man hierdurch von Neuem in das Geleise des vorhergehenden Paragraphs hineingelangt. Demgemäss wird auch das Endresultat dem damaligen analog, nämlich durch folgenden Satz ausgedrückt sein:

Satz. — *Es sei* $\mathfrak{A}$ *ein von beliebig vielen Randcurven begrenzter Theil einer ein- oder mehrblättrigen Riemann'schen Kugelfläche.*

(23.) *Denkt man sich nun diese Fläche* $\mathfrak{A}$ *mit irgend einer Normalcalotte* $\mathfrak{B}$ *gürtelförmig verschmolzen* [vgl. die Definition (B.) pg. 447], *so wird die Fundamentalaufgabe* [pg. 396], *falls sie für die ursprüngliche Fläche* $\mathfrak{A}$ *lösbar ist, stets auch lösbar sein für die durch jene Verschmelzung entstehende neue Fläche* ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$).

Bemerkung. — Der Uebergang von (20.) zu (21.) stützt sich auf den Satz (II.) pg. 402; für die Anwendbarkeit dieses Satzes ist aber erforderlich, dass die Fläche $\mathfrak{A}$ mindestens *zwei* Randcurven besitzt. Demgemäss

scheint also der vorstehende Satz *nur dann* richtig zu sein, wenn $\mathfrak{A}$ mindestens *zwei* Randcurven hat.

Trotzdem aber ist dieser Satz (23.), auch *ohne* eine derartige Restriction, völlig correct. Denn wenn die Fläche $\mathfrak{A}$ nur *eine* Randcurve hat, so wird offenbar die combinirte Fläche $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ eine *geschlossene* sein. Die Fundamentalfunctionen einer *geschlossenen* Fläche sind aber in der That construirbar, nämlich dargestellt durch lauter Constanten [vgl. (20 b.) pg. 396].

§ 6.

Anwendung der Resultate der beiden vorhergehenden Paragraphe.

Es sei $\mathfrak{R}$ irgend eine Riemann'sche n-blättrige Kugelfläche mit beliebig vielen Windungspunkten und Uebergangslinien. Irgend einer dieser Windungspunkte mag c heissen und m-blättrig sein (also $m < n$). Um c werden sich alsdann zwei nach m Umgängen in sich zurücklaufende Kreislinien α und β beschreiben lassen, der Art, dass der von α und β begrenzte Flächentheil eine m-blättrige Normalzone $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ repräsentirt. Dabei mag α die *äussere* und β die *innere* Randcurve dieser Zone vorstellen. Ueberdies mögen die beiden Theile, in welche $\mathfrak{R}$ selber durch β zerlegt wird, mit $\mathfrak{R}_\beta^{(c)}$ und $\mathfrak{R}_\beta$ bezeichnet werden, der Art, dass $\mathfrak{R}_\beta^{(c)}$ den Punkt c enthält. Die ganze Fläche $\mathfrak{R}_\beta$ kann alsdann angesehen werden als eine *Erweiterung der Zone* $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ *über* α *hinaus.* Und zwar kann diese Erweiterung dadurch bewerkstelligt werden, dass man $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ successive theils mit ein-, theils mit mehrblättrigen Normalcalotten verschmelzen lässt.

Für die Zone $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ ist aber die Fundamentalaufgabe lösbar [Satz pg. 446]. Lässt man also jene Verschmelzungen in solcher Weise stattfinden, dass sie durchweg theils *abschnittförmige*, theils *gürtelförmige* sind [vgl. die Definitionen (A.), (A'.), (B.) pg. 447], so werden die Sätze (16.) und (23.) von Augenblick zu Augenblick anwendbar sein; woraus folgt, dass jene Fundamentalaufgabe für die durch diese Verschmelzungen schliesslich resultirende Fläche $\mathfrak{R}_\beta$ ebenfalls lösbar ist.

Genau dieselben Betrachtungen sind natürlich auch dann anwendbar, wenn man für c einen *gewöhnlichen* Punkt nimmt (die Zahl m ist alsdann $= 1$); so dass man also zu folgendem Satz gelangt:

(24.) Satz. — *Die Fundamentalaufgabe* [pg. 396] *ist lösbar für jeden von einer Kreislinie begrenzten Theil einer Riemann'schen Kugelfläche; wobei es gleichgültig ist, ob diese Kreislinie eine gewöhnliche oder aber eine solche ist, die erst nach mehreren Umläufen in sich zurückkehrt.*

In analoger Weise ergiebt sich offenbar auch folgender

Allgemeinerer Satz. — *Jene Fundamentalaufgabe ist lösbar für einen von beliebig vielen Kreislinien begrenzten Theil einer Riemann-*
(25.) *schen Kugelfläche.*

Dies ist derselbe Satz, der speciell für die *einblättrige* Kugelfläche schon früher gefunden wurde, in (27.) pg. 445.

§ 7.

Ueber die Construirbarkeit reeller Functionen mit vorgeschriebenen Unstetigkeiten.

Auf einer Riemann'schen n-blättrigen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ sei irgend eine m-blättrige *Normalcalotte* $\mathfrak{A}$ abgegrenzt (mithin $m < n$); ferner sei auf $\mathfrak{A}$ eine monogene Function von $z = x + iy$ gegeben:

$$f^*(z) = F^* + iG^*, \tag{1.}$$

welche *innerhalb* $\mathfrak{A}$ mit irgend welchen Unstetigkeitsstellen†) behaftet, hiervon abgesehen aber auf $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig ist.

Es ist wohl zu *beachten*, dass diese Function $f^*(z)$ *lediglich auf* $\mathfrak{A}$ gegeben sein soll. Ihre sonstigen Werthe sind also als nicht vorhanden, respective als unbekannt zu betrachten. $F^* = F^*(x, y)$ soll den *reellen*, und $iG^* = iG^*(x, y)$ den *rein imaginären* Theil der Function bezeichnen.

Der Rand der Calotte $\mathfrak{A}$ wird dargestellt sein durch eine nach m Umläufen in sich zurückkehrende Kreislinie α. Da nun die Unstetigkeitsstellen von $f^*(z)$ *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegen sollen, so kann innerhalb $\mathfrak{A}$ eine zweite nach m Umgängen in sich zurückkehrende Kreislinie β construirt werden, in solcher Weise, dass die durch α und β begrenzte Normalzone $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ von jenen Unstetigkeitsstellen völlig *frei* ist.

Solches ausgeführt gedacht, *sind alsdann* f^*, F^*, G^* *auf* $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$
(2.) *eindeutig, stetig und harmonisch.* Markirt man also z. B. innerhalb $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ irgend zwei Punkte z_0 und z_1, so wird für die zugehörigen Werthe von G^* die Formel gelten:

$$G_1^* - G_0^* = \int_\sigma \left(\frac{\partial G^*}{\partial x}\, dx + \frac{\partial G^*}{\partial y}\, dy\right),$$

die Integration erstreckt über eine beliebige von z_0 nach z_1 gehende, jedoch *innerhalb* $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ bleibende Curve σ. Lässt man die Curve σ zwischen den beiden Rändern α und β weiter und weiter fortlaufen, bis sie schliesslich nach m Umgängen in sich zurückkehrt, also z_1 in z_0 hineinfällt, so erhält man:

$$0 = \int_\sigma \left(\frac{\partial G^*}{\partial x}\, dx + \frac{\partial G^*}{\partial y}\, dy\right);$$

†) Diese Unstetigkeitsstellen können theils *Punkte* theils *Linien* sein.

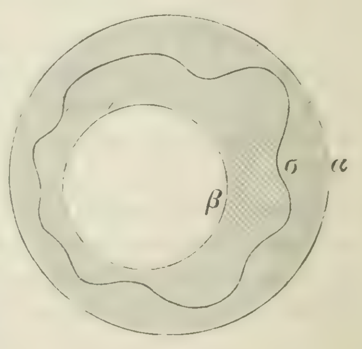
wofür man mit Rücksicht auf die bekannten zwischen F^* und G^* stattfindenden Relationen auch schreiben kann:

$$(3.)\qquad 0 = \int_\sigma \left(\frac{\partial F^*}{\partial x}\, dy - \frac{\partial F^*}{\partial y}\, dx \right).$$

Dies vorausgeschickt, stellen wir uns jetzt folgende Aufgabe:

(4.) *Es soll versucht werden, eine reelle Function $\Omega = \Omega(x, y)$ zu construiren, von solcher Beschaffenheit, dass Ω, abgesehen von jenen innerhalb $\mathfrak{A}$ liegenden Unstetigkeitsstellen der Function F^*, auf $\mathfrak{R}$ eindeutig, stetig und harmonisch ist, ferner von solcher Beschaffenheit, dass die genannten drei Eigenschaften innerhalb $\mathfrak{A}$ der Differenz $\Omega - F^*$ anhaften.*

Die Kreislinie α zerschneidet die ganze Fläche $\mathfrak{R}$ in zwei Theile. Von diesen beiden Theilen ist derjenige, welcher die Zone $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ enthält, mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Andererseits aber zerfällt die unversehrte Fläche $\mathfrak{R}$ durch die Kreislinie β ebenfalls in zwei Theile, und von diesen mag der die Zone $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ enthaltende mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet sein. Die beiden Flächen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ besitzen dann im Gebiete $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ eine *gürtelförmige* Deckung und liefern bei ihrer Verschmelzung die ganze Fläche $\mathfrak{R}$; wie solches einigermassen angedeutet ist durch die beistehende Figur.



Allerdings kann diese Figur eine deutliche Vorstellung der wirklichen Verhältnisse nur für den *speciellen Fall*: $m = 1$ liefern. Denn es ist im Auge zu behalten, dass die Curven α, σ, β *im Allgemeinen* mehrere, nämlich m Umgänge machen, bevor sie in sich zurückkehren.

Die Fundamentalfunctionen U und V der Flächen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind [zufolge der Sätze pg. 454, 455] ohne Weiteres construirbar, für beliebig vorgeschriebene Randwerthe. Hiervon Gebrauch machend, wollen wir nun, was die Lösung unserer Aufgabe (4.) betrifft, folgende Functionen construiren:

$$(5.)\qquad \varphi = F^* - U^{\alpha, F^*}, \qquad\qquad \psi = 0,$$

ferner folgende:

$$(6.)\qquad \begin{aligned} \varphi' &= \varphi + U^{\alpha, \psi - \varphi}, & \psi' &= \psi + V^{\beta, \varphi - \psi}, \\ \varphi'' &= \varphi' + U^{\alpha, \psi' - \varphi'}, & \psi'' &= \psi' + V^{\beta, \varphi' - \psi'}, \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

und überdies setzen:

$$(7.)\qquad \begin{aligned} \omega &= \varphi - \psi, \\ \omega' &= \varphi' - \psi' \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Aus (5.), (6.) ergiebt sich sofort:

$$(8.)\qquad \begin{array}{ll} \varphi_\alpha = 0, & \psi_\beta = 0, \\ \varphi_\alpha' = \psi_\alpha, & \psi_\beta' = \varphi_\beta, \\ \varphi_\alpha'' = \psi_\alpha', & \psi_\beta'' = \varphi_\beta', \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Ferner ergiebt sich ebenso wie früher aus der *ersten* Zeile (6.):

$$\varphi_\beta' = \varphi_\beta + U_\beta^{\alpha,\psi-\varphi}, \qquad \psi_\alpha' = \psi_\alpha + V_\alpha^{\beta,\varphi-\psi},$$

also, weil nach (8.) $\varphi_\beta = \psi_\beta'$ und $\psi_\alpha = \varphi_\alpha'$ ist:

$$\varphi_\beta' = \psi_\beta' + U_\beta^{\alpha,\psi-\varphi}, \qquad \psi_\alpha' = \varphi_\alpha' + V_\alpha^{\beta,\varphi-\psi},$$

also mit Rücksicht auf (7.):

$$(9.)\qquad \omega_\beta' = -U_\beta^{\alpha,\omega}, \qquad \omega_\alpha' = -V_\alpha^{\beta,\omega}.$$

Soweit ist das eingeschlagene Verfahren ziemlich ähnlich dem früheren auf pg. 449. *Von hier ab tritt nun aber im Vergleich mit damals eine wesentliche Abweichung ein, die ihren Grund hat in den hier vorliegenden schwierigern Verhältnissen.* Zuvörderst ergeben sich aus (9.) die Formeln:

$$(10.)\qquad D\omega_\beta' < (D\omega_\alpha)\varkappa, \qquad D\omega_\alpha' < D\omega_\beta;$$

und zwar ergiebt sich die Formel links mittelst des Satzes (N I.) pg. 430, die Formel rechts mittelst des Satzes (I b.) pg. 399. Dabei bezeichnet $\varkappa$ eine *positive Constante*, die < 1 ist, *die Situationsconstante* der Curve β in Bezug auf die Normalcalotte $\mathfrak{A}$.

Ebenso wie diese Formeln (10.) aus der *ersten* Zeile (6.) abgeleitet sind, ebenso ergeben sich analoge Formeln aus den *folgenden* Zeilen (6.); so dass man im Ganzen folgende Relationen erhält:

$$(11.)\qquad \begin{array}{ll} D\omega_\beta' < (D\omega_\alpha)\varkappa, & D\omega_\alpha' < D\omega_\beta, \\ D\omega_\beta'' < (D\omega_\alpha')\varkappa, & D\omega_\alpha'' < D\omega_\beta', \\ D\omega_\beta''' < (D\omega_\alpha'')\varkappa, & D\omega_\alpha''' < D\omega_\beta'', \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Diese Formeln nun können genau ebenso behandelt werden, wie die Formeln (ξ.) pg. 450. Man erhält alsdann die mit (η.) pg. 450 analogen Formeln:

$$(12.)\qquad D\omega_\beta^{(n)} < \Delta(\sqrt{\varkappa})^{n-1}, \qquad D\omega_\alpha^{(n)} \leq \Delta(\sqrt{\varkappa})^{n-1};$$

dabei ist unter Δ die *grössere* der beiden *Constanten* $D\omega_\alpha$ und $D\omega_\beta$ zu verstehen.

Es lässt sich jetzt, wie sogleich erläutert werden soll, *nachweisen*, dass unter den Werthen, die $\omega^{(n)}$ längs der Kreislinie α besitzt, mindestens *einer* vorhanden sein wird, der $= 0$ ist. Wenn (13a.) aber eine Function innerhalb eines gegebenen Spielraums irgendwo $= 0$ ist, so wird offenbar ihr *absolut grösster Werth* innerhalb dieses Spielraums stets *kleiner* sein als ihre *Schwankung* innerhalb des genannten Spielraums, höchstens *ebenso gross*. Somit folgt also:

$$\text{Max abs } \omega_\alpha^{(n)} < D\omega_\alpha^{(n)}.$$

Ferner lässt sich, wie ebenfalls sogleich erläutert werden soll, *nach-* (13b.) *weisen*, dass unter den Werthen, die $\omega^{(n)}$ längs β besitzt, mindestens *einer* $= 0$ ist; woraus alsdann wiederum folgt:

$$\text{Max abs } \omega_\beta^{(n)} < D\omega_\beta^{(n)}.$$

Aus diesen beiden Formeln folgt aber mit Rücksicht auf (12.):

$$(14.)\qquad \text{Max abs } \omega_\beta^{(n)} \leq \Delta\left(\sqrt{\varkappa}\right)^{n-1}, \qquad \text{Max abs } \omega_\alpha^{(n)} \leq \Delta\left(\sqrt{\varkappa}\right)^{n-1}.$$

Erläuterung zu (13a.) und (13b.). — Die Functionen $\varphi - F^*$, $\varphi' - \varphi$, $\varphi'' - \varphi'$, ... sind nach (5.), (6.) lauter U's, d. i. lauter Fundamentalfunctionen der Fläche $\mathfrak{A}$. Desgleichen sind nach (5.), (6.) die Functionen ψ, $\psi' - \psi$, $\psi'' - \psi'$, ... lauter V's, d. i. lauter Fundamentalfunctionen der Fläche $\mathfrak{B}$. Die einen sind also innerhalb $\mathfrak{A}$, die andern innerhalb $\mathfrak{B}$ eindeutig, stetig und harmonisch. Und hieraus ergeben sich sofort [vgl. (8.) pg. 391] die Formeln:

$$(\text{A.})\qquad \begin{aligned} &\int_\sigma \left(\frac{\partial(\varphi - F^*)}{\partial x} dy - \frac{\partial(\varphi - F^*)}{\partial y} dx\right) = 0, && \int_\sigma \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} dy - \frac{\partial\psi}{\partial y} dx\right) = 0, \\ &\int_\sigma \left(\frac{\partial(\varphi' - \varphi)}{\partial x} dy - \frac{\partial(\varphi' - \varphi)}{\partial y} dx\right) = 0, && \int_\sigma \left(\frac{\partial(\psi' - \psi)}{\partial x} dy - \frac{\partial(\psi' - \psi)}{\partial y} dx\right) = 0, \\ &\text{etc.} && \text{etc.} \end{aligned}$$

wo σ die schon früher besprochene, z. B. in der Formel (3.):

$$(\text{B.})\qquad \int_\sigma \left(\frac{\partial F^*}{\partial x} dy - \frac{\partial F^*}{\partial y} dx\right) = 0$$

auftretende Curve†) vorstellt. Aus den Formeln (A.) erhält man nun durch successives Addiren, und mit Rücksicht auf (B.):

$$(\text{C.})\qquad \begin{aligned} &\int_\sigma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y} dx\right) = 0, && \int_\sigma \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} dy - \frac{\partial\psi}{\partial y} dx\right) = 0, \\ &\int_\sigma \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x} dy - \frac{\partial\varphi'}{\partial y} dx\right) = 0, && \int_\sigma \left(\frac{\partial\psi'}{\partial x} dy - \frac{\partial\psi'}{\partial y} dx\right) = 0, \\ &\text{etc.} && \text{etc.} \end{aligned}$$

†) Auch in der Figur pg. 456 ist diese Curve σ angedeutet.

Dies vorangeschickt, wollen wir jetzt die die Curve σ enthaltende m-blättrige Normalzone $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ mittelst der Substitution

$$\frac{z-c}{z-c'} = \zeta^m$$

in eine auf der ζ-Ebene liegende, von zwei *concentrischen* Kreisen begrenzte, *einblättrige* Fläche übergehen lassen. Zu diesem Zweck sind die Punkte c und c' respective auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Art zu wählen, dass sie in gerader Linie liegen mit den Spitzen derjenigen beiden Tangentialkegel, deren Contactcurven durch α und β dargestellt sind.

Gleichzeitig wollen wir die arithmetischen Mittel derjenigen Werthe, welche $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ und $\psi, \psi', \psi'', \ldots$ auf dieser neuen *einblättrigen* Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ längs α und β besitzen, durch ein vorgesetztes $\mathfrak{M}$ bezeichnen, so dass also z. B., zufolge (7.), die Gleichungen stattfinden:

$$\text{(D.)}\qquad \begin{array}{ll} \mathfrak{M}\omega_\alpha = \mathfrak{M}\varphi_\alpha - \mathfrak{M}\psi_\alpha, & \mathfrak{M}\omega_\beta = \mathfrak{M}\varphi_\beta - \mathfrak{M}\psi_\beta, \\ \mathfrak{M}\omega_\alpha' = \mathfrak{M}\varphi_\alpha' - \mathfrak{M}\psi_\alpha', & \mathfrak{M}\omega_\beta' = \mathfrak{M}\varphi_\beta' - \mathfrak{M}\psi_\beta', \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

ferner zufolge (8.) auch folgende Gleichungen stattfinden:

$$\text{(E.)}\qquad \begin{array}{ll} \text{(I.)}\ \underline{\mathfrak{M}\varphi_\alpha = 0}, & \mathfrak{M}\psi_\beta = 0, \\ \mathfrak{M}\varphi_\alpha' = \mathfrak{M}\psi_\alpha, & \text{(II.)}\ \underline{\mathfrak{M}\psi_\beta' = \mathfrak{M}\varphi_\beta}, \\ \text{(III.)}\ \underline{\mathfrak{M}\varphi_\alpha'' = \mathfrak{M}\psi_\alpha'}, & \mathfrak{M}\psi_\beta'' = \mathfrak{M}\varphi_\beta', \\ \mathfrak{M}\varphi_\alpha''' = \mathfrak{M}\psi_\alpha'', & \text{(IV.)}\ \underline{\mathfrak{M}\psi_\beta''' = \mathfrak{M}\varphi_\beta''}, \\ \text{etc.} & \text{etc.;} \end{array}$$

wobei die *unterstrichenen* Formeln mit (I.), (II.), (III.), (IV.), etc. bezeichnet sind.

Auf diese arithmetischen Mittel $\mathfrak{M}$ findet nun der früher bewiesene Hülfssatz (5.) pg. 424, weil $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ und $\psi, \psi', \psi'', \ldots$ auf $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ eindeutig und stetig, und innerhalb $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ harmonisch sind, unmittelbare Anwendung; wobei die Fläche $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ beständig in ihrer neuen *einblättrigen* Gestalt zu denken ist. Bezeichnet man nämlich die Formeln (C.) respective mit (Φ.), (Ψ.), (Φ'.), (Ψ'.), etc., so kann man folgendermassen räsonniren:

Nach (I.) ist $\mathfrak{M}\varphi_\alpha = 0$. Hieraus aber und aus der Formel (Φ.) folgt nach jenem Hülfssatz, dass $\mathfrak{M}\varphi_\beta$ ebenfalls $= 0$ ist. Demgemäss ist nach (II.) auch $\mathfrak{M}\psi_\beta' = 0$. Hieraus aber und aus ($\Psi'$.) folgt nach jenem Hülfssatz, dass $\mathfrak{M}\psi_\alpha'$ ebenfalls $= 0$ ist. Demgemäss ist nach (III.) auch $\mathfrak{M}\varphi_\alpha'' = 0$. Hieraus aber und aus ($\Phi''$.) folgt, dass $\mathfrak{M}\varphi_\beta''$ ebenfalls $= 0$ ist. Demgemäss ist nach (IV.) auch $\mathfrak{M}\psi_\beta''' = 0$. U. s. w. U. s. w.

In solcher Weise findet man, dass in den *unterstrichenen* Formeln (E.) die $\mathfrak{M}$'s durchweg $= 0$ sind. Und in ähnlicher Weise ergiebt sich, dass Gleiches auch gilt für die $\mathfrak{M}$'s der *nicht* unterstrichenen Formeln. Man findet also allgemein:

$$\text{(F.)}\qquad \begin{array}{ll} \mathfrak{M}\varphi_\alpha^{(n)} = 0, & \mathfrak{M}\varphi_\beta^{(n)} = 0, \\ \mathfrak{M}\psi_\alpha^{(n)} = 0, & \mathfrak{M}\psi_\beta^{(n)} = 0, \end{array}$$

also nach (D.) auch:

$$(6.)\qquad \mathfrak{M}\,\omega_\alpha^{(n)} = 0, \qquad \mathfrak{M}\,\omega_\beta^{(n)} = 0.$$

Das arithmetische Mittel der längs α vorhandenen Werthe von $\omega^{(n)}$ verschwindet also; und hieraus folgt sofort, dass mindestens *einer* von diesen Werthen $= 0$ ist. U. s. w. *Q. e. d.*

Nach Constatirung der Formeln (14.) betrachten wir jetzt die (vielleicht divergirende) Reihe:

$$(15.)\qquad \Phi = (\varphi' - \varphi) + (\varphi'' - \varphi') \ldots + (\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}) + \ldots \text{ in inf.}$$

Die einzelnen Glieder $(\varphi' - \varphi)$, $(\varphi'' - \varphi')$, ... sind nach (6.) lauter U's, also lauter Fundamentalfunctionen der Fläche $\mathfrak{A}$, mithin auf $\mathfrak{A}$ eindeutig, stetig und innerhalb $\mathfrak{A}$ harmonisch. Was ferner die Werthe des allgemeinen Gliedes $\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}$ am Rande α der Fläche $\mathfrak{A}$ betrifft, so ergiebt sich nach (8.) und (7.):

$$\varphi_\alpha^{(n+1)} - \varphi_\alpha^{(n)} = \psi_\alpha^{(n)} - \varphi_\alpha^{(n)} = -\,\omega_\alpha^{(n)},$$

also nach (14.):

$$\text{Max abs}\,(\varphi_\alpha^{(n+1)} - \varphi_\alpha^{(n)}) \leq \Delta\,(\sqrt{\varkappa})^{n-1},$$

wo Δ und $\varkappa$ Constanten sind, und $\varkappa < 1$ ist. Zufolge des allgemeinen Convergenztheorems [pg. 435] ist daher die Reihe Φ *convergent*, und Φ selber *eine Fundamentalfunction der Fläche* $\mathfrak{A}$. Jenes Φ lässt sich aber, nachdem seine Convergenz constatirt ist, offenbar auch so schreiben:

$$\Phi = \lim_{n=\infty} [(\varphi' - \varphi) + (\varphi'' - \varphi') \ldots + (\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)})],$$

d. i. $\Phi = \lim_{n=\infty} [-\varphi + \varphi^{(n+1)}]$, oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$(16.)\qquad \Phi = -\varphi + \lim_{n=\infty} \varphi^{(n)}.$$

Analoge Betrachtungen sind, wie leicht zu übersehen, anstellbar hinsichtlich der Functionen ψ, ψ', ψ'', ...; so dass man also zu folgendem Resultat gelangt: *Wird*

$$(17.)\qquad \Phi = -\varphi + \lim_{n=\infty} \varphi^{(n)} \quad \textit{und} \quad \Psi = -\psi + \lim_{n=\infty} \psi^{(n)}$$

gesetzt, so repräsentirt Φ eine Fundamentalfunction der Fläche $\mathfrak{A}$, andererseits Ψ eine Fundamentalfunction der Fläche $\mathfrak{B}$.

Setzt man jetzt

$$(18.)\qquad \begin{cases} \text{für alle Punkte der Fläche } \mathfrak{A}\text{:} & \Omega = \Phi + \varphi, \\ \text{andererseits für alle Punkte von } \mathfrak{B}\text{:} & \Omega = \Psi + \psi, \end{cases}$$

so sind die so definirten *beiden* Functionen Ω auf dem Deckungsgebiet $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ unter einander identisch, wie sich leicht zeigen lässt.

Mit Rücksicht auf (17.) ist nämlich

$$\begin{cases} \text{auf } \mathfrak{A}: \quad \Omega = \lim_{n=\infty} \varphi^{(n)} . \\ \text{andererseits auf } \mathfrak{B}: \quad \Omega = \lim_{n=\infty} \psi^{(n)} . \end{cases}$$

Auf dem Gebiet $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ ist daher die Differenz der beiden Functionen Ω

$$= \lim_{n=\infty} (\varphi^{(n)} - \psi^{(n)}), \text{ d. i. } = \lim_{n=\infty} \omega^{(n)},$$

also $= 0$, wie sich, auf Grund der Formeln (14.), durch Benutzung des Convergenz-Theorems [(16.) pg. 436] sofort ergiebt. *Q. e. d.*

Solches constatirt, ist also jetzt auf der ganzen Fläche $\mathfrak{R}$ nur *eine einzige* Function Ω ausgebreitet; und diese ist definirt durch die Formeln (18.), die mit Rücksicht auf (5.) auch so darstellbar sind:

$$(19.) \qquad \begin{cases} \text{auf } \mathfrak{A}: \ \Omega = \Phi + F^* - U^{\alpha, F^*}, \\ \text{auf } \mathfrak{B}: \ \Omega = \Psi. \end{cases}$$

Nun ist Φ, nach (17.), eine *Fundamentalfunction der Fläche* $\mathfrak{A}$. Gleiches gilt aber auch von U^{α, F^*}, und, abgesehen von den Unstetigkeitsstellen der Function F^*, auch von F^* selber. Andererseits ist, nach (17.), Ψ eine *Fundamentalfunction der Fläche* $\mathfrak{B}$. Und mit Rücksicht auf diese Eigenschaften von Φ, U^{α, F^*}, F^* und Ψ, folgt aus (19.) sofort, dass die Function Ω, abgesehen von den Unstetigkeitsstellen von F^*, auf $\mathfrak{R}$ *eindeutig*, *stetig* und *harmonisch* ist, und dass ferner innerhalb $\mathfrak{A}$ die genannten drei Eigenschaften der Differenz $\Omega - F^*$ anhaften. *Demgemäss repräsentirt also Ω die Lösung der gestellten Aufgabe* (4.). — Man gelangt also zu folgendem

Satz. — *Auf einer Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ sei irgend eine Normalcalotte $\mathfrak{A}$ abgegrenzt. Ferner repräsentire $f^*(z)$ eine nur auf $\mathfrak{A}$ gegebene monogene Function, die innerhalb $\mathfrak{A}$ irgend welche Unstetigkeitsstellen besitzt, hiervon abgesehen aber auf $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig ist. Endlich sei der reelle Theil von $f^*(z)$ mit F^* bezeichnet:*

$$(20.) \qquad F^* = \text{Rth } f^*(z).$$

Alsdann wird man stets eine reelle Function $\Omega = \Omega(x, y)$ zu construiren im Stande sein, von solcher Beschaffenheit, dass Ω, abgesehen von jenen Unstetigkeitsstellen der Function F^*, auf $\mathfrak{R}$ eindeutig, stetig und harmonisch ist, ferner von solcher Beschaffenheit, dass die genannten drei Eigenschaften innerhalb $\mathfrak{A}$ der Differenz $\Omega - F^*$ anhaften.

§ 8.

Ueber die Construirbarkeit monogener Functionen mit vorgeschriebenen Unstetigkeiten.

Nimmt man insbesondere für $f^*(z)$ eine Function, deren Unstetigkeit innerhalb $\mathfrak{A}$ auf irgend ein *Linienelement* l sich beschränkt, und vertauscht man zugleich die Buchstaben $\mathfrak{A}$, F^*, Ω respective mit $\mathfrak{T}$, U^*, U, so gewinnt der vorhergehende Satz folgende Gestalt:

Satz. — *Auf einer Riemann'schen Kugelfläche* $\mathfrak{R}$ *sei irgend eine Normalcalotte* $\mathfrak{T}$ *abgegrenzt. Ferner repräsentire*

$$(A.)\qquad f^*(z) = U^* + iV^*$$

eine nur auf $\mathfrak{T}$ *gegebene Function, die in irgend einem innerhalb* $\mathfrak{T}$ *liegenden Linienelement* l *unstetig, sonst aber auf* $\mathfrak{T}$ *eindeutig und stetig ist.*

Alsdann wird stets eine reelle Function

$$U = U(x, y)$$

construirbar sein, von solcher Beschaffenheit, dass U, *abgesehen von* l, *auf* $\mathfrak{R}$ *eindeutig, stetig und harmonisch ist, ferner von solcher Beschaffenheit, dass diese drei Eigenschaften innerhalb* $\mathfrak{T}$ *der Differenz* $U - U^*$ *anhaften.*

NB. *Das gegebene Linienelement* l *kann beliebig kurz, also z. B. auch ein Punkt sein.*

Wir wollen jetzt die Function U als *wirklich* construirt betrachten, und eine neue Function V zu bilden suchen, der Art, dass $U + iV$ eine *monogene* Function von z ist. Dabei wird Gebrauch zu machen sein theils von den Flächen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_{abc}$, $\mathfrak{R}_{abcl}$, $\mathfrak{R}_{abclm}$, theils von den Flächen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_l$.

Wie gewöhnlich [vgl. die Bemerkung pg. 185] soll $\mathfrak{R}_{abc}$ diejenige *einfach zusammenhängende* Fläche sein, in welche $\mathfrak{R}$ durch die bekannten Riemann'schen Schnitte $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$ übergeht. Dabei sollen aber diese Schnitte der Art construirt gedacht werden, dass die gegebene Calotte $\mathfrak{T}$ von ihnen völlig verschont bleibt. Ferner soll $\mathfrak{R}_{abclm}$ diejenige, ebenfalls *einfach zusammenhängende* Fläche sein, in welche $\mathfrak{R}_{abc}$ durch zwei Schnitte l, m übergeht, von denen der *erstere* längs der gegebenen Linie l fortläuft, während der *letztere* eine Fortsetzung des erstern bis zum Rande von $\mathfrak{R}_{abc}$ vorstellt, [ebenso wie früher, pg. 221].

Endlich sollen $\mathfrak{R}_{abcl}$ und $\mathfrak{T}_l$ diejenigen Flächen sein, in welche $\mathfrak{R}_{abc}$ und $\mathfrak{T}$ durch einen einzigen längs l ausgeführten Schnitt sich verwandeln.

Bei den folgenden, etwas complicirten Betrachtungen sind nun, was die Eigenschaften der gegebenen Function $f^*(z) = U^* + iV^*$

und der construirten Function U betrifft, namentlich *drei Punkte* im Auge zu behalten.

(1.) **Erstens**: *Die monogene Function* $f^*(z) = U^* + iV^*$ *ist, mit Ausnahme von* l, *auf* $\mathfrak{T}$ *eindeutig und stetig.*

(2.) **Zweitens**: *Die reelle Function* U *ist, mit Ausnahme von* l, *auf der ganzen Fläche* $\mathfrak{R}$, *mithin z. B. auch auf* $\mathfrak{R}_{abclm}$ *eindeutig, stetig und harmonisch.*

(3.) **Drittens**: *Die Differenz* $U - U^*$ *ist innerhalb* $\mathfrak{T}$ *ausnahmslos eindeutig, stetig und harmonisch.*

Markirt man jetzt innerhalb $\mathfrak{T}_l$ irgend zwei Punkte z_0 und z, so ist die Differenz der zugehörigen Werthe V^*, nach (1.) darstellbar durch die Formel:

$$V^* - V_0^* = \int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial V^*}{\partial x} dx + \frac{\partial V^*}{\partial y} dy\right), \quad [\mathfrak{T}_l],$$

d. i. durch die Formel:

$$(4.)\qquad V^* - V_0^* = \int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial U^*}{\partial x} dy - \frac{\partial U^*}{\partial y} dx\right), \quad [\mathfrak{T}_l],$$

die Integration von z_0 und z jedesmal hinerstreckt gedacht über eine innerhalb $\mathfrak{T}_l$ liegende Curve, wie solches angedeutet ist durch das beigesetzte $[\mathfrak{T}_l]$. Nimmt man also z. B. für die Integrationscurve irgend eine innerhalb $\mathfrak{T}$ um l herum und in sich zurücklaufende Curve τ, so erhält man:

$$0 = \int_{\tau} \left(\frac{\partial U^*}{\partial x} dy - \frac{\partial U^*}{\partial y} dx\right), \quad [\mathfrak{T}_l].$$

Andererseits aber folgt aus (3.), unter Anwendung eines früheren Satzes [(8.) pg. 391], sofort:

$$0 = \int_{\tau} \left(\frac{\partial (U - U^*)}{\partial x} dy - \frac{\partial (U - U^*)}{\partial y} dx\right), \quad [\mathfrak{T}_l];$$

also, falls man diese Formel zur vorhergehenden addirt:

$$(5.)\qquad 0 = \int_{\tau} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx\right), \quad [\mathfrak{T}_l].$$

Der soeben citirte Satz [pg. 391] ist aber auch auf U selber anwendbar. Die Fläche $\mathfrak{R}_{abclm}$ ist nämlich einfach zusammenhängend, und zerfällt also durch jedweden Rückkehrschnitt σ in zwei getrennte Stücke, von denen *eines* blos von σ selber begrenzt ist. Die Anwendung jenes Satzes auf dieses Stück liefert daher, falls man die in (2.) angegebenen Eigenschaften von U beachtet, die Formel:

$$(6.) \qquad 0 = \int_\sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx \right), \quad [\mathfrak{R}_{abclm}].$$

Diese Formel ist also gültig für jedwede innerhalb $\mathfrak{R}_{abclm}$ liegende geschlossene Curve σ; wie solches angedeutet sein soll durch das beigesetzte $[\mathfrak{R}_{abclm}]$.

Jetzt führen wir eine *neue* Function V ein, indem wir setzen:

$$(7.) \qquad V = \int_c^z \left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx \right), \quad [\mathfrak{R}_{abclm}],$$

wo c irgend ein *fester* Punkt sein soll. Alsdann ist offenbar $\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$ und $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x}$, mithin $U + iV$ eine *monogene* Function von $z = x + iy$. Ferner ergiebt sich aus (2.) und (6.), dass V innerhalb $\mathfrak{R}_{abclm}$ *eindeutig und stetig*, und in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$, m mit constanten Differenzen behaftet ist. Diese Differenzen sind übrigens in den Curven $c_\varkappa$ durchweg $= 0$, wie man leicht übersieht [vgl. die Betrachtungen auf pg. 216]. Und die Differenz in der Curve m ist ebenfalls $= 0$, zufolge (5.). Demgemäss besitzt also V die Eigenschaften der Eindeutigkeit und Stetigkeit nicht nur innerhalb $\mathfrak{R}_{abclm}$, sondern auch innerhalb $\mathfrak{R}_{abl}$. *Und das Binom $U + iV$ repräsentirt daher eine monogene Function von z, die innerhalb $\mathfrak{R}_{abl}$ eindeutig und stetig, überdies aber in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ mit constanten rein imaginären Differenzen behaftet ist.* (8.) Es bleibt noch übrig, das Verhalten dieser Function in der Linie l, oder allgemeiner auf der Calotte $\mathfrak{T}$ zu untersuchen; wobei zunächst bemerkt sein mag, dass in der Formel (7.) statt $[\mathfrak{R}_{abclm}]$ auch $[\mathfrak{R}_{abl}]$ geschrieben werden darf, weil V in den Curven $c_\varkappa$ und m keine Differenzen also keine Stetigkeitsunterbrechungen darbietet. Jene Formel (7.) ist mithin ersetzbar durch die etwas einfachere:

$$(9.) \qquad V = \int_c^z \left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx \right), \quad [\mathfrak{R}_{abl}].$$

Nach (3.) ist nun $U - U^*$ innerhalb $\mathfrak{T}$ eindeutig, stetig und harmonisch. Gleiches aber gilt daselbst auch von $V - V^*$. Markirt man nämlich innerhalb $\mathfrak{T}_l$ zwei Punkte z_0 und z, so ist die Differenz der zugehörigen Werthe V^* darstellbar durch die Formel (4.):

$$V^* - V_0^* = \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial U^*}{\partial x} dy - \frac{\partial U^*}{\partial y} dx \right), \quad [\mathfrak{T}_l],$$

andererseits aber die Differenz der zugehörigen Werthe V, zufolge (9.), darstellbar durch die analoge Formel:

$$V - V_0 = \int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx \right), \quad [\mathfrak{T}_l],$$

die Integration jedesmal hinerstreckt über eine von z_0 nach z gehende und innerhalb $\mathfrak{T}_l$ bleibende Curve. Durch Subtraction der beiden letzten Formeln folgt:

$$(10.) \quad V - V^* = V_0 - V_0^* + \int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial (U - U^*)}{\partial x} dy - \frac{\partial (U - U^*)}{\partial y} dx \right), \quad [\mathfrak{T}_l].$$

Nach (3.) ist aber $U - U^*$ innerhalb $\mathfrak{T}$ ausnahmslos eindeutig, stetig und harmonisch. Somit folgt aus (10.), dass $V - V^*$ innerhalb $\mathfrak{T}$ ausnahmslos eindeutig und stetig ist. *Und demgemäss wird also innerhalb $\mathfrak{T}$ auch*

$$(11.) \qquad (U + iV) - (U^* + iV^*)$$

ausnahmslos eindeutig und stetig sein. Dies Ergebniss mit dem früheren Resultat (8.) zusammengefasst, gelangt man zu folgendem

Theorem. — *Auf einer Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ sei ein Liniensegment l gegeben, welches beliebig kurz, also z. B. auch ein Punkt sein kann. Jedenfalls aber sei l von solcher Lage und Grösse, dass auf $\mathfrak{R}$ eine Normalcalotte $\mathfrak{T}$ angebbar ist, innerhalb deren l sich befindet. Ferner bezeichne $f^*(z)$ eine blos auf $\mathfrak{T}$ gegebene monogene Function, die in l unstetig, sonst aber auf $\mathfrak{T}$ eindeutig und stetig ist. — Alsdann wird stets eine monogene Function $f(z)$ von folgenden Eigenschaften construirbar sein:* (B.)

I. *$f(z)$ ist, mit Ausnahme von l, $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \cdots p$), auf $\mathfrak{R}$ eindeutig und stetig.*

II. *$f(z)$ ist im Bereich von l durch die Formel*

$$f(z) = f^*(z) + [\text{eindeut. stet. Funct.}]$$

darstellbar, überdies aber in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ mit constanten rein imaginären Differenzen behaftet.

Etwas einfacher gestaltet sich der Satz, wenn l ein *Punkt* ist. Denkt man sich z. B. auf $\mathfrak{R}$ irgend einen Punkt c markirt, das Bereich desselben mit $\mathfrak{U}(c, z)$, respective $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$ bezeichnet, und

$$f^*(z) = \frac{1}{(\zeta - \gamma)^N}$$

gesetzt, wo N irgend eine positive ganze Zahl sein soll, so ist offenbar *stets* eine Normalcalotte angebbar, *innerhalb* deren c sich befindet. Denn man erhält eine derartige Calotte einfach dadurch, dass man den Rand des Bereiches $\mathfrak{U}(c, z)$ in geeigneter Weise determinirt.

Man darf somit im vorhergehenden Theorem für l den Punkt c, und für $f^*(z)$ die soeben genannte Function nehmen, und gelangt so zu folgendem

Satz. — *Markirt man auf einer Riemann'schen Kugelfläche* $\mathfrak{R}$ *irgend einen Punkt* c, *bezeichnet man ferner das Bereich dieses Punktes mit* $\mathfrak{U}(c, z)$, *respective* $\mathfrak{A}(\gamma, \zeta)$, *und versteht man ausserdem unter* N *eine beliebig gegebene Zahl aus der Reihe* $1, 2, 3, \ldots$, *so wird stets eine monogene Function* $f(z)$ *von folgenden Eigenschaften construirbar sein:* (C.)

I. *Sie ist, mit Ausnahme des Punktes* c *und der Linien* $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, *auf* $\mathfrak{R}$ ***eindeutig und stetig.***

II. *Sie ist im Bereich des Punktes c durch die Formel*

$$f(z) = \frac{1}{(\zeta - \gamma)^N} + [\text{eind. stet. Funct.}]$$

darstellbar, daselbst also mit einem Pol N^{ter} *Ordnung behaftet; und sie besitzt überdies in den Linien* $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ***constante rein imaginäre*** *Differenzen.*

§ 9.

Beweis der Riemann'schen Existenztheoreme.

Bezeichnet $\mathfrak{R}$ eine Riemann'sche Kugelfläche, und c irgend einen auf $\mathfrak{R}$ markirten Punkt, so wird sofort eine Function $r(z)$ angebbar sein, *die im Bereich von c* ***eindeutig und stetig*** *ist, und die überdies in diesem Bereich keinen Nullpunkt hat, ausser einem in c selber befindlichen Nullpunkt* ***erster*** *Ordnung.* (1.) Auch übersieht man sofort, dass die Function $r(z)$ durch diese Anforderungen noch keineswegs bestimmt ist, dass also unendlich viele derartige Functionen $r(z)$ existiren. Sind $r(z)$ und $r'(z)$ irgend zwei derselben, so wird der Quotient

$$\frac{r(z)}{r'(z)} \tag{2.}$$

eine Function sein, die im Bereich von c ausnahmslos *eindeutig, stetig und nichtverschwindend* ist.

Ich habe hier die Bezeichnung r oder $r(z)$ genau in demselben Sinne gebraucht, wie es von *Riemann* geschehen ist [vgl. die Bemerkung pg. 200].

Dies vorangeschickt, mag nun, ebenso wie in (B.) pg. 465, auf $\mathfrak{R}$ irgend ein *Liniensegment* l von solcher Lage und Grösse gegeben sein, dass eine Normalcalotte $\mathfrak{T}$ angebbar ist, *innerhalb* deren l sich befindet. Diese Calotte $\mathfrak{T}$ kann mittelst der Substitution

$$\frac{z - c}{z - c'} = \zeta^n \tag{3.}$$

in eine in der ζ-Ebene liegende *einblättrige Kreisfläche* verwandelt werden. Dabei bezeichnet m die Blätteranzahl von $\mathfrak{T}$, ferner c den Windungspunkt von $\mathfrak{T}$ (oder, falls $m = 1$, einen beliebigen Punkt innerhalb $\mathfrak{T}$), endlich c' den in Bezug auf die Randcurve der Calotte zu c conjugirten Punkt. Bei dieser Umwandlung wird das *innerhalb der Calotte* $\mathfrak{T}$ befindliche Liniensegment l, dessen Endpunkte c_1, c_2 sein mögen, in ein *innerhalb der Kreisfläche* liegendes Liniensegment λ übergehen, dessen Endpunkte γ_1, γ_2 heissen mögen.

Die Function

$$\varphi(\zeta) = \frac{\zeta - \gamma_2}{\zeta - \gamma_1} \tag{4.}$$

ist alsdann auf jener Kreisfläche, mithin auch auf $\mathfrak{T}$ selber *regulär*, und daselbst nur mit *einem* Pol und ebenso nur mit *einem* Nullpunkt behaftet. Ersterer liegt in γ_1 respective c_1, letzterer in γ_2 oder c_2, und beide sind *erster* Ordnung. Definirt man also jetzt eine *neue* Function $f^*(z)$ mittelst der Formel

$$f^*(z) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\varphi(\zeta)}{\varphi(\zeta)}, \tag{5.}$$

so wird dieselbe, bei geeigneter Einschränkung der Integrationscurve, auf $\mathfrak{T}$, abgesehen von l, eindeutig und stetig, in l *mit der* (6.) *constanten Differenz* $2\pi i$ *behaftet*, und in den Bereichen der Punkte c_1 und c_2 respective durch die Formeln

$$\begin{aligned} f^*(z) &= -\log(\zeta - \gamma_1) + [\text{eind. stet. Funct.}], \\ f^*(z) &= +\log(\zeta - \gamma_2) + [\text{eind. stet. Funct.}] \end{aligned} \tag{7.}$$

darstellbar sein, [wie solches aus dem Satz (F.) pg. 231 sofort folgt].

Absichtlich soll auch weiterhin irgend eine specielle Voraussetzung über die Lage der Linie l innerhalb $\mathfrak{T}$ vermieden werden. Ob also irgend ein Punkt der Linie l, z. B. einer ihrer Endpunkte c_1, c_2 mit dem Windungspunkt c der Calotte $\mathfrak{T}$ zusammenfällt, soll völlig *in suspenso* bleiben. Wie dem auch sei, jedenfalls wird die Function $\zeta - \gamma_1$ (zufolge ihrer Definition) im Bereich des Punktes c_1 eindeutig und stetig sein, und daselbst keinen Nullpunkt haben, abgesehen von einem in c_1 selber liegenden Nullpunkt erster Ordnung. Genau dieselben Eigenschaften besitzt aber nach (1.) auch $r_1(z)$, falls man nämlich unter $r_1(z)$ irgend eine beliebige unter den dem Punkte c_1 zugehörigen Functionen $r(z)$ versteht. Demgemäss ist also

$$\frac{\zeta - \gamma_1}{r_1(z)} = E_1(z),$$

wo $E_1(z)$ eine Function vorstellt, die im Bereich von c_1 *eindeutig,*

stetig und *nichtverschwindend* ist. Setzt man also dieser Formel entsprechend

$$\log(\zeta - \gamma_1) = \log r_1(z) + \log E_1(z),$$

so werden sich dabei die Logarithmen in solcher Weise festsetzen lassen, dass $\log(\zeta - \gamma_1)$ mit dem in (7.) vorhandenen Logarithmus *identisch*, und dass gleichzeitig $\log E_1(z)$ im Bereich von c_1 *eindeutig und stetig* ist. Solches ausgeführt gedacht, ist also:

$$\log(\zeta - \gamma_1) = \log r_1(z) + [\text{eind. stet. Funct.}].$$

In analoger Weise erhält man offenbar:

$$\log(\zeta - \gamma_2) = \log r_2(z) + [\text{eind. stet. Funct.}];$$

und demgemäss kann man also die in (6.), (7.) gegebene Charakteristik der Function $f^*(z)$ gegenwärtig auch so aussprechen:

Die Function $f^*(z)$ ist, abgesehen von der Linie l, auf der Calotte $\mathfrak{T}$ eindeutig und stetig. Sie ist längs der von c_1 nach c_2 laufenden Linie l mit der constanten Differenz $2\pi i$ behaftet:

$$\text{(8.)} \qquad \text{längs } l: \quad f^*(\lambda) - f^*(\varrho) = 2\pi i.$$

Und sie ist endlich in den Bereichen der Punkte c_1 und c_2 respective durch die Formeln darstellbar:

$$\text{(9.)} \qquad \begin{aligned} f^*(z) &= -\log r_1(z) + [\text{eind. stet. Funct.}], \\ f^*(z) &= +\log r_2(z) + [\text{eind. stet. Funct.}]. \end{aligned}$$

Auf diese Function $f^*(z)$ ist somit das Theorem (B.) pg. 465 ohne Weiteres anwendbar, ebenso auch auf die Function $Cf^*(z)$, falls nämlich C irgend welche Constante vorstellt. Man gelangt daher zu folgendem Resultat:

(D.) Satz. — *Auf einer Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ sei ein Liniensegment l mit den Endpunkten c_1, c_2 gegeben von solcher Lage und Grösse, dass auf $\mathfrak{R}$ irgend eine Normalcalotte angebbar ist, innerhalb deren l sich befindet. Ueberdies sei gegeben eine beliebige Constante C. Alsdann wird stets eine monogene Function $f(z)$ von folgenden Eigenschaften construirbar sein:*

I. *Sie ist, mit Ausnahme der Linien l und $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, auf $\mathfrak{R}$ eindeutig und stetig.*

II. *Sie ist in den Bereichen der Punkte c_1 und c_2 respective durch die Formeln*

$$f(z) = -C\log r_1(z) + [\text{eind. stet. Funct.}],$$

$$f(z) = +C\log r_2(z) + [\text{eind. stet. Funct.}]$$

darstellbar, und gleichzeitig in der von c_1 nach c_2 laufenden Linie l

mit der constanten Differenz $C \,.\, 2\pi i$ *behaftet. Ueberdies besitzt sie in den Curven* $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ *constante rein imaginäre Differenzen.*

Dabei bezeichnen $r_1(z)$ *und* $r_2(z)$ *die den Punkten* c_1 *und* c_2 *zugehörigen Riemann'schen Functionen* $r(z)$; [vgl. (1.) pg. 466].

Stillschweigend haben wir bis jetzt stets vorausgesetzt, das Linienelement l solle die Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ weder schneiden noch berühren. Man übersieht aber leicht, dass die gefundenen Sätze fast genau in gleicher Weise auch dann noch ableitbar sind, wenn l seiner ganzen Länge nach in eine jener Curven hineinfällt. Man erhält alsdann z. B. an Stelle des letzten Satzes, indem man gleichzeitig für C die Constante $\frac{1}{2\pi i}$ eintreten lässt, folgenden Satz:

(E.) Satz. — *Irgend eine der* $2p$ *Curven* $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ *möge mit* s *bezeichnet, und diese Curve* s *durch zwei Punkte* c_1 *und* c_2 *in zwei Theile* l *und* $(s - l)$ *zerlegt sein, und zwar in solcher Weise, dass auf* $\mathfrak{R}$ *irgend eine Normalcalotte angebbar ist, innerhalb deren* l *sich befindet. Gleichzeitig mögen jene Theilpunkte in solcher Auswahl mit* c_1, c_2 *bezeichnet sein, dass die Richtung* $c_1 c_2$ *des Segmentes* l *zusammenfällt mit der Richtung von* s *selber. Alsdann wird stets eine monogene Function* $f(z)$ *von folgenden Eigenschaften construirbar sein:*

I. *Sie ist, mit Ausnahme der* $2p$ *Curven* $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, *auf* $\mathfrak{R}$ *eindeutig und stetig.*

II. *Sie ist in den Bereichen der Punkte* c_1 *und* c_2 *respective durch die Formeln:*

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\log r_1(z) + [\text{eind. stet. Funct.}],$$

$$f(z) = +\frac{1}{2\pi i}\log r_2(z) + [\text{eind. stet. Funct.}].$$

darstellbar. Sie besitzt ferner in sämmtlichen Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, *jedoch in* s *nur längs des Theiles* $(s - l)$ *constante rein imaginäre Differenzen, längs* l *hingegen eine Differenz, die um* 1 *grösser ist als die längs* $(s - l)$.

Bezeichnet man also die Differenz längs $(s - l)$ etwa mit iA, wo A eine *reelle* Constante vorstellt, so wird die Differenz längs l den Werth $1 + iA$ haben.

Aus den beiden letzten Sätzen sind jetzt weitere Consequenzen zu ziehen, zunächst aus dem Satze (D.). Sind auf $\mathfrak{R}$ zwei *ganz beliebige* Punkte c_1, c_2 markirt, und denkt man sich die $2p$ Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ der Art eingerichtet, dass keiner der beiden Punkte hart an einer dieser Curven liegt, so wird man stets auf $\mathfrak{R}$ von c_1 nach c_2 eine die Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ vermeidende Linie L ziehen können. Hierauf aber wird man L in einzelne Segmente l zerlegen können, deren

jedes der in (D.) gestellten Anforderung entspricht. Denkt man sich nun für *jedes* solches Segment l die im Satze (D.) angegebene Function $f(z)$ construirt, und die *Summe* all' dieser Functionen $f(z)$ mit $F(z)$ bezeichnet, so gelangt man [die in (D.) auftretende Constante $C = 1$ gesetzt] zu folgendem Resultat:

(F.) Satz. — *Sind auf $\mathfrak{R}$ irgend zwei Punkte c_1, c_2 markirt, ferner die Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ so eingerichtet, dass jene Punkte von diesen Curven durch irgend welche Zwischenräume getrennt sind, und ist endlich von c_1 nach c_2 auf $\mathfrak{R}$ irgend eine die Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ vermeidende Linie L gezogen, so wird stets eine monogene Function $F(z)$ von folgenden Eigenschaften construirbar sein:*

I. *Sie ist, abgesehen von den Linien l, $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, auf $\mathfrak{R}$ überall eindeutig und stetig.*

II. *Sie ist in den Bereichen der Punkte c_1, c_2 respective durch die Formeln*

$$F(z) = -\log r_1(z) + [\text{eind. stet. Funct.}],$$
$$F(z) = +\log r_2(z) + [\text{eind. stet. Funct.}]$$

darstellbar, und gleichzeitig in der von c_1 nach c_2 gehenden Linie L mit der constanten Differenz $2\pi i$ behaftet. Ueberdies besitzt sie in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ constante rein imaginäre Differenzen.

In ganz analoger Weise führt endlich der Satz (E.), falls man die dortige Curve s ebenfalls in einzelne hinreichend kleine Segmente l zerlegt, für *jedes* solches Segment l die zugehörige Function $f(z)$ construirt, und die *Summe* all' dieser Functionen $f(z)$ mit $F(z)$ bezeichnet, zu folgendem Resultat:

(G.) Satz. — *Bezeichnet man irgend eine der Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ mit s, so wird stets eine monogene Function $F(z)$ von folgenden Eigenschaften construirbar sein:*

I. *Sie ist, mit Ausnahme der Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, auf $\mathfrak{R}$ überall eindeutig und stetig.*

II. *Sie ist in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ mit constanten Differenzen behaftet, und zwar ist der reelle Theil der längs s vorhandenen Differenz $= 1$; während die reellen Theile der Differenzen für die übrigen Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ durchweg $= 0$ sind.*

Durch Superposition *mehrerer* derartiger Functionen $F(z)$ gelangt man alsdann sofort zu folgendem allgemeinern Satz:

(H.) Satz. — *Es wird stets eine monogene Function $\Phi(z)$ von folgenden Eigenschaften construirbar sein:*

I. *Sie ist, mit Ausnahme der $2p$ Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, auf $\mathfrak{R}$ überall eindeutig und stetig.*

II. *Sie ist in den Curven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ mit constanten Differenzen behaftet, deren reelle Theile beliebig vorgeschriebene Werthe besitzen.*

Dieser Satz (H.) ist aber nichts Anderes als das *erste Existenztheorem* pg. 238. Ferner ergiebt sich, durch Combination dieses Satzes (H.) mit dem früheren Satz (C.) pg. 466, die Richtigkeit des *zweiten Existenztheorems* pg. 239. Combinirt man endlich den Satz (H.) mit (F.), und beachtet man dabei die hinsichtlich der Functionen $r(z)$ auf pg. 466 gemachten Bemerkungen, so erhält man den Beweis für die Richtigkeit des *dritten Existenztheorems* pg. 239, wenigstens innerhalb desjenigen Spielraumes, in welchem dieses Theorem bei den Untersuchungen des vorliegenden Werkes in Anwendung gebracht ist.

Den genannten *Existenztheoremen* stehen gewisse *Unitätstheoreme* zur Seite. Ich habe mich im gegenwärtigen Capitel auf den Beweis der *erstern* beschränken können. Denn die *letztern* sind bereits früher absolvirt worden, durch die Sätze (1.), (2.), (3.) pg. 236.

Die in diesem Werk benutzten Bezeichnungen und Abbreviaturen.

Da es mir aus Erfahrung bekannt ist, wie schwer es oft wird, sich in dem Sprachgebrauch eines Autors zurechtzufinden, so benutze ich diese letzte Seite, um den Leser über die von mir benutzten Bezeichnungen und Abbreviaturen zu orientiren.

I. **Punkte.** — Windungspunkte, pg. 67—74.
Das Bereich eines Punktes, pg. 37.
Das Bereich eines Punktes im ursprünglichen und natürlichen Zustand, pg. 94—97.
Pole oder polare Unstetigkeitspunkte, pg. 38.
Niveaupunkte einer regulären Function, pg. 116, 117.
Simultane Bahnen dieser Niveaupunkte, pg. 292 (dritte Zeile).
Conjugirte Punkte, pg. 427.

II. **Linien und Schnitte.** — Uebergangslinien, pg. 68, 69, 84.
Querschnitte und Rückkehrschnitte, pg. 148, 149.
Sigmaförmiger Querschnitt, pg. 148.
Ströme, pg. 173.
Die Riemann'schen Schnitte oder Ströme a, b, c, pg. 175—185.
Simultane Bahnen der Niveaupunkte, pg. 292 (dritte Zeile).

III. **Flächen.** — Positive Umlaufung einer Fläche, pg. 3 und pg. 55.
Horizontalebene und Antipodenebene, pg. 52, 53, etc.
Windungsfläche, pg. 67—74.
Ordnung der Windungsfläche, pg. 69.
Elementarfläche, pg. 146.
Einfach zusammenhängende Fläche, pg. 146.
Mehrfach zusammenhängende Fläche, pg. 159 (zweite Bemerkung).
Punktirte Fläche, pg. 150.
Grundzahl einer Fläche oder eines Flächensystems, pg. 152, 168 und 185.
Normalcalotte und Normalzone, pg. 426.
Abschnittförmige und gürtelförmige Verschmelzung zweier Flächen, pg. 447.

IV. **Functionen.** — Functionen vom Charakter E, pg. 37.
Die Ordnungszahlen einer Function, pg. 40 und 102.
Reguläre Functionen, pg. 117.
Reguläre Functionen q^{ter} Ordnung, pg. 117.
Harmonisch, pg. 390.
Fundamentalfunctionen, pg. 396.
Unterscheidung von *auf* und *innerhalb*, pg. 393 (Bemerkung).

V. Zeichen. — Das Congruenzzeichen $\equiv$ und das neue Zeichen $\mid\!\!\!\!\equiv$ haben die auf pg. 330 und pg. 337 (Note) angegebenen Bedeutungen.

DAS

DIRICHLET'SCHE PRINCIP

IN SEINER ANWENDUNG AUF DIE

RIEMANN'SCHEN FLÄCHEN.

VON

CARL NEUMANN,

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU TÜBINGEN, CORRESPONDENT DER GÖTTINGER SOCIETÄT DER WISSENSCHAFTEN.



LEIPZIG,

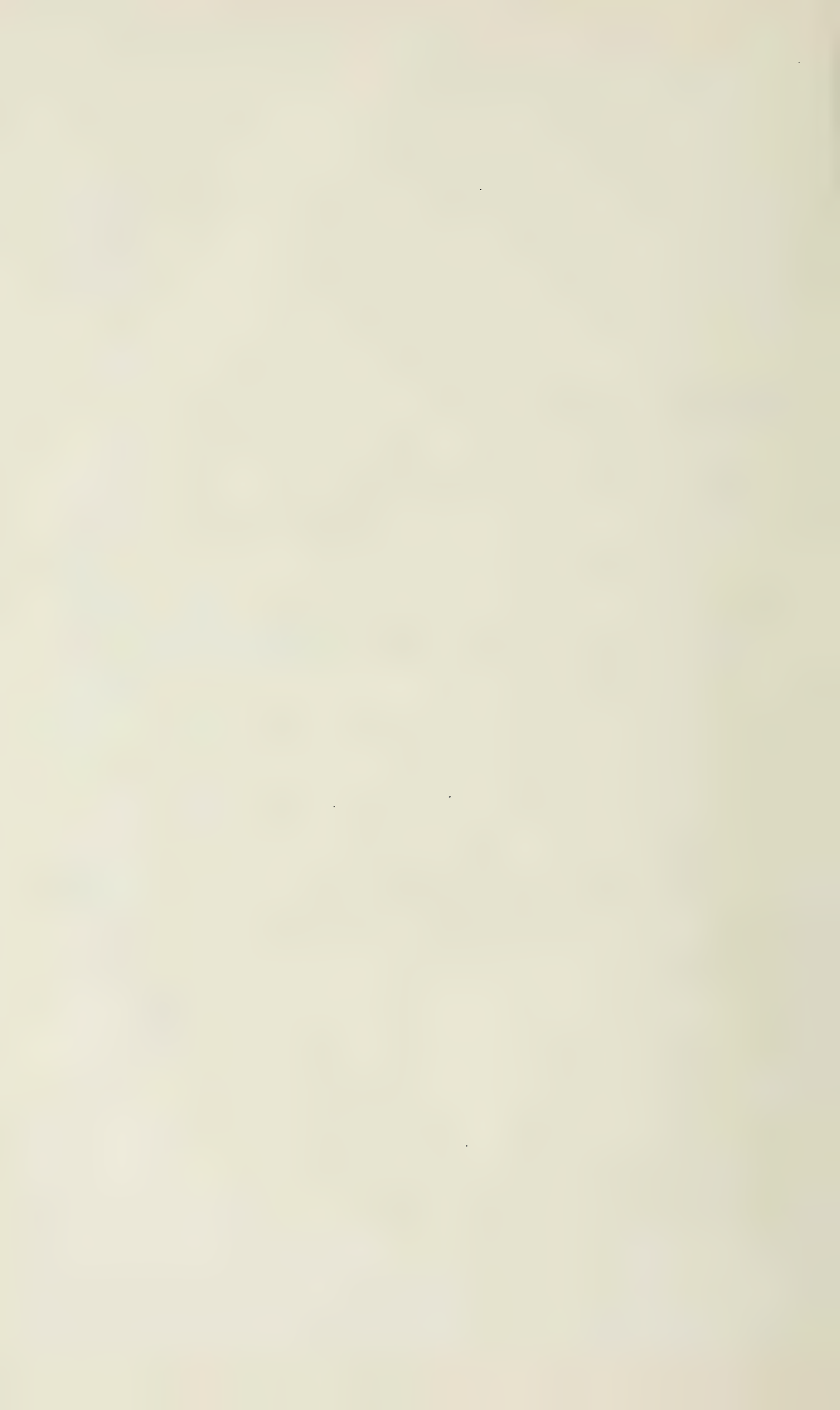
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1865.

Verfasser und Verleger dieses Werkes behalten sich das Recht der Uebersetzung in fremde Sprachen vor, und werden ebensowohl den Nachdruck als die unbefugte Uebersetzung mit allen gesetzlichen Mitteln verfolgen.



Inhalt.



Allgemeine Bemerkungen.

Will man eine Function von mehreren Argumenten innerhalb eines festgesetzten Gebietes durch gewisse Eigenschaften oder durch gewisse ihr auferlegte Bedingungen bestimmen, so wird auf Zweierlei zu achten sein. Erstens darauf, dass jene Bedingungen nicht zu viel verlangen; denn sonst würde eine denselben entsprechende Function nicht existiren. Zweitens darauf, dass jene Bedingungen nicht zu wenig verlangen; denn sonst wird die Function durch dieselben nicht vollständig bestimmt sein.

Die Bedingungen, denen man die Function zu unterwerfen gedenkt, sind also, bevor man solches thut, einmal zu controlliren in Bezug auf ihre Verträglichkeit, und zweitens in Bezug auf ihre Vollständigkeit. Im Allgemeinen scheint das Letztere leichter als das Erstere zu sein. In denjenigen Fällen wenigstens, die bisher behandelt sind, kann die Frage nach der Vollständigkeit mit Hülfe einer Methode erledigt werden, welche schon von Green und Gauss vielfach benutzt wurde; während die Frage nach der Verträglichkeit zu ihrer Entscheidung einer Methode bedarf, die erst später gefunden ist, einer Methode, deren Princip von Dirichlet, und deren weitere Entwickelung von Riemann herrührt.

Wir werden im Folgenden diese Methoden auseinandersetzen, und zwar für Functionen, die entweder von zwei reellen Argumenten, oder von einem complexen Argument abhängig sind, also für Functionen, die zu ihrer räumlichen Ausbreitung eines Gebietes von zwei Dimensionen, d. i. einer Fläche bedürfen. Zu Anfang werden wir uns mit Functionen beschäftigen, bei denen diese Fläche durch eine Elementarfläche repräsentirt wird; sodann später mit Functionen, die ihre Ausbreitung auf einer Riemann'schen Fläche finden.

Unter einer Elementarfläche ist eine ebene einblättrige Fläche zu verstehen, welche mit all ihren Puncten in der Endlichkeit liegt, und nur eine einzige Randcurve besitzt. Riemann'sche Flächen hingegen sollen diejenigen genannt werden, welche zur Ausbreitung beliebig gegebener algebraischer Functionen erforderlich sind; diese von Riemann eingeführten Flächen sind im Allgemeinen mehrblättrig, und je nach Umständen bald eben, bald kugelförmig zu denken. [Vorl. *) S. 53 und 162.]

Es wird zweckmässig sein, unserer Untersuchung einige allgemeine Bemerkungen vorangehen zu lassen.

Beschränkt man die Grössen x und y auf reelle Werthe, so werden durch Angabe des Werthes von $x + iy$ auch die Werthe von x und y bestimmt sein.**) Hält man also an der eben genannten Beschränkung fest, und versteht man unter $F(x, y)$ eine beliebig gegebene Function, so wird durch Angabe des Werthes von $x + iy$ auch der Werth von $F(x, y)$ bestimmt sein. Mit andern Worten: Die Function $F(x, y)$ ist, sobald man die Werthe von x und y in der angegebenen Weise beschränkt, nur von dem einen Argument $x + iy$ abhängig.

Ganz anders gestaltet sich die Sache, wenn wir jene Beschränkung fallen lassen, wenn wir nämlich x und y als Grössen betrachten, die nach Belieben alle überhaupt denkbaren reelle und imaginäre Werthe annehmen dürfen. Thun wir dies, so wird die Angabe des Werthes von $x + iy$ zur Bestimmung der Werthe von x und y durchaus unzureichend sein, also im Allgemeinen auch unzureichend sein zur Bestimmung des Werthes von $F(x, y)$. Zu beachten sind hierbei indessen gewisse Ausnahme-Fälle. Auf diese wollen wir näher eingehen, und uns folgende Frage vorlegen:

Welche Beschaffenheit muss die Function $F(x, y)$ besitzen, wenn sie, trotz der hier angenommenen völlig unbeschränkten Veränderlichkeit der Grössen x, y, nur von dem einen Argument $x + iy$ abhängen soll?

---

*) Ich berufe mich hier, wie es hinfort noch öfters geschehen soll, auf meine kürzlich veröffentlichten „Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale." Leipzig, 1865.

**) Unter i ist, wie gewöhnlich, die imaginäre Grösse $\sqrt{-1}$ zu verstehen.

Offenbar wird solches der Fall sein, wenn diejenigen Aenderungen von x, y, welche den Werth von $x + iy$ ungeändert lassen, auf den Werth von $F(x, y)$ ebenfalls ohne Wirkung sind; also der Fall sein, wenn die Function $F(x, y)$ bei einer Vertauschung von x, y mit $x + \alpha$, $y + i\alpha$ in ihrem Werthe nicht geändert wird. Unter α ist dabei jede beliebige reelle oder imaginäre Grösse zu verstehen.

Genügt also die Function $F(x, y)$ der Bedingung:

$$F(x + \alpha, y + i\alpha) = F(x, y), \tag{1}$$

so wird sie nur von dem einen Argument $x + iy$ abhängen.

Die gestellte Frage ist hiermit eigentlich bereits erledigt. Die gefundene Bedingung (1) lässt sich aber noch in etwas anderer Form darstellen. Da α eine beliebig veränderliche Grösse ist, so können wir nach α differenziren; alsdann folgt aus (1):

$$\frac{dF(x + \alpha, y + i\alpha)}{d\alpha} = 0. \tag{2}$$

Umgekehrt lässt sich aber auch (1) als Folge von (2) auffassen. Die Gleichung (2) verlangt nämlich, dass $F(x + \alpha, y + i\alpha)$ unabhängig von α ist. Soll das aber der Fall sein, so muss $F(x + \alpha, y + i\alpha)$ ungeändert bleiben, wenn man für α ganz beliebige Werthe einsetzt, mithin auch dann ungeändert bleiben, wenn man für α den Werth 0 setzt. Mit andern Worten: Die Gleichung (2) verlangt, dass $F(x + \alpha, y + i\alpha)$ gleich gross ist mit $F(x, y)$; verlangt also dasselbe, was durch die Gleichung (1) gefordert wird.

Von den Gleichungen (1) und (2) kann demnach, wie es uns beliebt, entweder die zweite als Folge der ersten, oder auch die erste als eine Folge der zweiten aufgefasst werden. Die beiden Gleichungen sind mithin äquivalent.

Wir ersetzen die Gleichung (1) durch die Gleichung (2). Diese letztere lässt sich ihrerseits auch so darstellen:

$$\frac{\partial F(x + \alpha, y + i\alpha)}{\partial (x + \alpha)} + i \frac{\partial F(x + \alpha, y + i\alpha)}{\partial (y + i\alpha)} = 0, \tag{3}$$

oder, falls man $x + \alpha = X$, $y + i\alpha = Y$ setzt, auch so:

$$\frac{\partial F(X, Y)}{\partial X} + i \frac{\partial F(X, Y)}{\partial Y} = 0. \tag{4}$$

Die Grössen x, y, α sind in ihren Werthen völlig unbeschränkt; Gleiches gilt mithin auch von den Grössen X, Y. Demnach kön-

nen wir, ohne in der Bedeutung dieser Grössen irgend welche Aenderung eintreten zu lassen, X, Y mit x, y vertauschen, die Gleichung (4) also auch so schreiben:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0. \tag{5}$$

Die ursprünglich gefundene Bedingung (1) kann, wie wir sehen, ersetzt werden durch irgend eine der Gleichungen (2), (3), (4), (5). Wählt man hierzu die Gleichung (5), so ergiebt sich folgendes Resultat:

Eine Function $F(x, y)$, welche der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0$$

Genüge leistet, wird jederzeit — gleichgültig, ob man die Grössen x, y auf reelle Werthe beschränkt, oder ob man ihnen eine völlig unbeschränkte Veränderlichkeit einräumt — nur von dem einen Argument $x + iy$ abhängig sein.

Demgemäss soll eine dieser Differentialgleichung genügende Function in Zukunft kurzweg eine von $x + iy$ abhängende Function genannt werden.

Denkt man sich gegenwärtig die Grössen x, y wiederum auf reelle Werthe beschränkt, und bezeichnet man ausserdem die Function $F(x, y)$, wie sie bei Sonderung des Reellen und Imaginären sich gestaltet, mit $U(x, y) + iV(x, y)$, oder kürzer mit $U + iV$, so verwandelt sich die eben genannte Differentialgleichung in

$$\frac{\partial (U + iV)}{\partial x} + i \frac{\partial (U + iV)}{\partial y} = 0,$$

d. i. in folgende beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Demgemäss soll jeder Ausdruck $U(x, y) + iV(x, y)$ oder $U + iV$, welcher die Bedingungen

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

erfüllt, in Zukunft kurzweg eine von $x + iy$ abhängende Function genannt werden.

Bekanntlich gilt auch das Umgekehrte. Ist nämlich $f(t)$ eine beliebig gegebene Function, welche nur von dem einen Argument t abhängt, und versteht man unter $f(x+iy)$ denjenigen Ausdruck, welchen diese Function annimmt, sobald man in ihr an Stelle der Variablen t das Binom $x+iy$ substituirt, so wird offenbar $f(x+iy)$ eine Function zu nennen sein, die nur von dem **einen** Argument $x+iy$ abhängt. Bezeichnet man aber diesen Ausdruck $f(x+iy)$, wie er bei Sonderung des Reellen und Imaginären sich gestaltet, mit $U+iV$, so werden U und V jederzeit den so eben aufgestellten Bedingungen Genüge leisten. (Vorl. S. 78.)

Erster Abschnitt. Functionen von $x+iy$, welche auf einer Elementarfläche stetig sind, und deren reelle Theile am Rande dieser Fläche vorgeschriebene Werthe besitzen sollen.

Wir beginnen mit der Betrachtung einer Kreisfläche. Ihr Radius mag R heissen. Ferner mögen x, y die rechtwinkligen, und r, t die Polarcoordinaten irgend eines Punctes sein in Bezug auf ein Achsensystem, dessen Anfangspunct im Mittelpunct der Kreisfläche liegt. Zwischen x, y und r, t finden dann folgende Relationen statt:

$$\begin{aligned} x &= r\cos t, \\ y &= r\sin t, \\ x+iy &= r(\cos t + i\sin t) = re^{it}. \end{aligned} \tag{1}$$

Die ins Unendliche fortlaufende Reihe

$$1 + \frac{re^{it}}{R} + \left(\frac{re^{it}}{R}\right)^2 + \left(\frac{re^{it}}{R}\right)^3 + \dots \tag{2}$$

ist bekanntlich immer convergent, so lange $r < R$ ist; wir bezeichnen sie zur Abkürzung mit

$$\sum_0^\infty \left(\frac{re^{it}}{R}\right)^n \quad \text{oder} \quad \sum_0^\infty \left(\frac{x+iy}{R}\right)^n. \tag{3}$$

Es mögen nun $A_0, A_1, A_2, \dots$ und $B_0, B_1, B_2, \dots$ zwei Reihen von Constanten sein, die nach irgend welchem Gesetz ins Unendliche hinlaufen, deren Werthe aber durchweg endlich

bleiben; gleichzeitig mag unter $\varphi(x + iy)$ folgende Reihe verstanden werden:

$$(4) \qquad \varphi(x + iy) = \sum_0^\infty (A_n + iB_n) \left(\frac{x + iy}{R}\right)^n.$$

Von dieser Reihe gilt bekanntlich dasselbe, wie von der Reihe (2) oder (3). Sie ist convergent, so lange $r < R$ bleibt; oder mit andern Worten: sie ist convergent, so lange der Punct x, y innerhalb der gegebenen Kreisfläche bleibt.

Der Werth von $\varphi(x + iy)$ wird demnach, wenn wir dem Punct x, y im Innern der Kreisfläche eine beliebige Bewegung zuertheilen, niemals unbestimmt oder unendlich werden, und auch niemals unstetige Aenderungen erfahren. Mit andern Worten: Der Ausdruck $\varphi(x + iy)$ ist eine von $x + iy$ abhängende Function, welche innerhalb der Kreisfläche überall eindeutig und stetig bleibt. Gleiches gilt daher nach bekanntem Satz (Vorl. S. 91) auch von sämmtlichen Ableitungen dieser Function, d. i. von den Ausdrücken $\varphi'(x + iy)$, $\varphi''(x + iy)$, $\varphi'''(x + iy)$, ... Und Gleiches gilt demnach, wenn man den Werth von $\varphi(x + iy)$, wie er bei Sonderung des Reellen und Imaginären sich herausstellt, mit $u + iv$ bezeichnet, auch von den Functionen u, v, sowie von ihren sämmtlichen Ableitungen.*) Ausserdem werden diese Functionen, wie aus ihrer Bedeutung hervorgeht, den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Genüge leisten. (Vorl. S. 78.)

Die Werthe von u und v lassen sich leicht hinstellen. Nach (4) ist:

$$\varphi(x + iy) = \sum_0^\infty (A_n + iB_n) \left(\frac{x + iy}{R}\right)^n,$$

---

*) Sind p, q irgend welche ganze Zahlen, so sind unter sämmtlichen Ableitungen von u, v alle Ausdrücke zu verstehen, welche die Formen

$$\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \, \partial y^q}, \qquad \frac{\partial^{p+q} v}{\partial x^p \, \partial y^q}$$

haben.

also mit Rückblick auf (1):

$$\varphi(x + iy) = \sum_0^\infty (A_n + iB_n) \frac{r^n \cos nt + ir^n \sin nt}{R^n}.$$

Hieraus aber folgt, wenn man das Reelle und Imaginäre sondert, unmittelbar:

$$u = \sum_0^\infty \frac{r^n (A_n \cos nt - B_n \sin nt)}{R^n},$$

(5)

$$v = \sum_0^\infty \frac{r^n (B_n \cos nt + A_n \sin nt)}{R^n}.$$

Diese Ausdrücke u und v sind zusammengesetzt aus den Polarcoordinaten r, t, und können daher entweder als Functionen von r, t oder auch als Functionen von x, y angesehen werden. Wir wählen die letztere Auffassung, und stellen dasjenige zusammen, was sich in Bezug auf u ergeben hat; v soll fortan ganz ausser Spiel bleiben.

Sind A_0, A_1, A_2, ... und B_0, B_1, B_2, ... zwei Reihen reeller Constanten, die nach irgend welchem Gesetz ins Unendliche fortlaufen, dabei aber durchweg endlich bleiben, so ist der Ausdruck

(6)
$$u = A_0 + A_1 \frac{r \cos t}{R} + A_2 \frac{r^2 \cos 2t}{R^2} + \dots$$
$$- B_1 \frac{r \sin t}{R} - B_2 \frac{r^2 \sin 2t}{R^2} - \dots$$

eine von x, y abhängende Function, welche sammt all ihren Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots$$

innerhalb der gegebenen Kreisfläche stetig bleibt, und welche ausserdem der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Genüge leistet.

Die noch unbestimmten Constanten A, B können nun der Art gewählt werden, dass die Function u am Rande der Kreisfläche gegebene Werthe annimmt. Ist nämlich $f(t)$ eine beliebig gegebene reelle Function von t, welche von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ stetig auf einander folgende Werthe besitzt, und welche für $t = 0$

ebenso gross ist, wie für $t = 2\pi$, so lassen sich die ebengenannten Werthe durch eine Fourier'sche Reihe von folgender Form darstellen:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \ldots \\ - b_1 \sin t - b_2 \sin 2t - \ldots \tag{7}$$

Die Constanten a, b werden sich nämlich jederzeit so bestimmen lassen, dass diese Reihe für alle Argumente t, welche zwischen 0 und 2π liegen, von gleichem Werth ist mit der gegebenen Function $f(t)$.*) Die Constanten a, b werden je nach Beschaffenheit der gegebenen Function $f(t)$ sehr verschieden ausfallen. Immer aber werden diese Constanten durchweg endlich sein; denn sonst würde die Reihe nicht mehr convergent, mit der gegebenen Function also auch nicht mehr von gleichem Werth sein können.

Wir denken uns die Werthe, welche $f(t)$ von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ besitzt, am Rande der gegebenen Kreisfläche aufgepflanzt. Soll nun die vorhin aufgestellte Function u (6) am Rande der Kreisfläche die ebengenannten Werthe besitzen, soll also die Function u für $r = R$ identisch werden mit $f(t)$, so muss man die in u enthaltenen noch unbestimmten Constanten A, B gleich gross nehmen mit denjenigen Constanten a, b, welche in der Entwickelung von $f(t)$ auftreten. Und solches ist erlaubt. Denn die in u enthaltenen Constanten A, B waren nur der einen Bedingung unterworfen, durchweg endlich zu bleiben; diese Bedingung wird aber von den Constanten a, b, wie wir bereits gesehen haben, erfüllt. Wir gelangen somit zu folgendem Satz:

Sind x, y die Puncte einer Kreisfläche $\mathfrak{K}$, so existirt jederzeit eine reelle Function von x, y, welche am Rande von $\mathfrak{K}$ beliebig gegebene Werthe besitzt, und welche gleichzeitig im Innern von $\mathfrak{K}$ folgende Eigenschaften hat:

I. *Die Function und all ihre Ableitungen sind stetig.*

II. *Die Function genügt der Gleichung* $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$.

Denkt man sich die gegebenen Randwerthe, sie mögen f genannt werden, nach der Fourier'schen Reihe entwickelt:

---

*) Dass die hier ausgesprochene Behauptung richtig ist, hat bekanntlich Dirichlet mit voller Strenge nachgewiesen.

$$f = a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \ldots$$
$$- b_1 \sin t - b_2 \sin 2t - \ldots,$$

so ist die in Rede stehende Function, sie mag u heissen, folgende:

$$u = a_0 + a_1 \frac{r \cos t}{R} + a_2 \frac{r^2 \cos 2t}{R^2} + \ldots$$
$$- b_1 \frac{r \sin t}{R} - b_2 \frac{r^2 \sin 2t}{R^2} - \ldots$$

Hier stellt R den Radius der Kreisfläche vor; ferner sind hier unter r, t die Polarcoordinaten des Punctes x, y in Bezug auf den Mittelpunct der Kreisfläche zu verstehen.

Dass eine den gestellten Bedingungen genügende Function existirt, ist also hier auf die bündigste Weise dargethan, nämlich dargethan durch die wirkliche Aufstellung der Function.

Möglicherweise könnte ausser der hier aufgestellten Function u noch eine andere u_1 vorhanden sein, welche gleichfalls die gegebenen Randwerthe f und die Eigenschaften I, II besitzt. Alsdann wird die Differenz

$$u - u_1 = \omega$$

eine Function sein, deren Randwerthe $= 0$ sind, und welche wiederum die Eigenschaften I, II besitzt. Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich leicht folgende Formel (vergl. Vorl. S. 62):

$$\iint\limits_{\mathfrak{K}} \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy = - \int\limits_{\mathfrak{K}} \omega \frac{d\omega}{dn} ds.$$

Hier erstreckt sich die Integration links über die Fläche von $\mathfrak{K}$, die rechts über den Rand von $\mathfrak{K}$; ds ist ein Element dieses Randes, und n die auf ds errichtete innere Normale.

Da nun die Randwerthe von ω durchgängig $= 0$ sind, so geht die vorstehende Formel über in

$$\iint\limits_{\mathfrak{K}} \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy = 0.$$

Und hieraus folgt, dass die Grössen $\frac{\partial \omega}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ innerhalb $\mathfrak{K}$ allenthalben $= 0$ sind, dass mithin ω selber im Innern von $\mathfrak{K}$ überall constant ist. Die Function ω hat aber am Rande von $\mathfrak{K}$ den Werth 0; ihr constanter Werth im Innern von $\mathfrak{K}$ kann demnach kein anderer als der Werth 0 sein.

Somit zeigt sich, dass die Differenz

$$u - u_1 = \omega$$

nothwendiger Weise gleich Null ist, dass also neben u keine andere Function vorhanden sein kann, welche den gestellten Anforderungen Genüge leistet. Wir können demnach zu dem vorhergehenden Satz noch Folgendes fügen:

Es existirt nur eine einzige Function, welche am Rande der Kreisfläche gegebene Werthe, und im Innern derselben die Eigenschaften I, II *besitzt.*

Wir fahren in unserer Untersuchung weiter fort. Nach wie vor mag u diejenige Function sein, welche am Rande von $\mathfrak{K}$ die Werthe f, und im Innern von $\mathfrak{K}$ die Eigenschaften I, II besitzt. Neben u wollen wir gegenwärtig noch irgend welche andere Function U betrachten, die am Rande von $\mathfrak{K}$ ebenfalls die Werthe f besitzen soll, von welcher wir aber, was ihr Verhalten im Innern von $\mathfrak{K}$ anbelangt, nur voraussetzen, dass sie daselbst überall stetig ist.*)

Wir bilden das über die Kreisfläche $\mathfrak{K}$ hinerstreckte Integral

$$(1) \qquad \iint\limits_{\mathfrak{K}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy,$$

und bezeichnen dasselbe zur Abkürzung mit

$$(1\text{ a.}) \qquad \underset{\mathfrak{K}}{\Pi}(U)$$

Setzen wir für den Augenblick $U = u + \delta$, so ergiebt sich, wenn wir in diesem Integrale $u + \delta$ statt U substituiren, folgende identische Gleichung:

$$\underset{\mathfrak{K}}{\Pi}(u + \delta) = \underset{\mathfrak{K}}{\Pi}(u) + \underset{\mathfrak{K}}{\Pi}(\delta) + $$
$$+ 2 \iint\limits_{\mathfrak{K}} \left\{ \frac{\partial \delta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} dx\, dy;$$

oder, wenn wir für δ seine eigentliche Bedeutung $U - u$ restituiren:

---

*) Wir nehmen also, wie auch in Zukunft bei ähnlichen Fällen wohl zu beachten ist, nur an, dass die Function U selber stetig ist, machen aber keinerlei Voraussetzung über die Stetigkeit oder Unstetigkeit ihrer Ableitungen.

$$(2) \qquad \underset{\mathfrak{K}}{H}(U) = \underset{\mathfrak{K}}{H}(u) + \underset{\mathfrak{K}}{H}(U-u) + 2\underset{\mathfrak{K}}{T},$$

wo $\underset{\mathfrak{K}}{T}$ folgendes Integral bezeichnet:

$$(3) \qquad \underset{\mathfrak{K}}{T} = \iint\limits_{\mathfrak{K}} \left\{ \frac{\partial (U-u)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (U-u)}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} dx\, dy.$$

Nun ist identisch:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial (U-u)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[(U-u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - (U-u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial (U-u)}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[(U-u)\frac{\partial u}{\partial y}\right] - (U-u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Da u die Eigenschaften I, II besitzt, so ist der Ausdruck

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

innerhalb $\mathfrak{K}$ überall $= 0$. Substituirt man also die Werthe (4) in das Integral (3), und setzt man dabei zur Abkürzung

$$(5) \qquad \begin{aligned} (U-u)\frac{\partial u}{\partial x} &= \alpha, \\ (U-u)\frac{\partial u}{\partial y} &= \beta, \end{aligned}$$

so ergiebt sich:

$$(6) \qquad \underset{\mathfrak{K}}{T} = \iint\limits_{\mathfrak{K}} \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \right\} dx\, dy.$$

Die Function u besitzt innerhalb $\mathfrak{K}$ die Eigenschaften I, II. Demnach sind u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ innerhalb $\mathfrak{K}$ überall stetig. Gleiches gilt, der über U gemachten Voraussetzung zufolge, auch von U. Und Gleiches gilt mithin auch von den in (5) hingestellten Ausdrücken α und β. Zufolge eines bekannten Satzes (Vorl. S. 59) lässt sich daher das Integral (6) in folgendes Rand-Integral verwandeln:

$$(7) \qquad \underset{\mathfrak{K}}{T} = -\int\limits_{\mathfrak{K}} \left(\alpha \frac{dx}{dn} + \beta \frac{dy}{dn} \right) ds.$$

Hier ist ds ein Element des Randes von $\mathfrak{K}$, und n die auf ds errichtete innere Normale. Substituirt man schliesslich für α und β ihre eigentlichen Bedeutungen (5), so erhält man:

$$(8) \qquad T_{\mathfrak{K}} = -\int_{\mathfrak{K}} (U - u) \frac{du}{dn}\, ds.$$

Der Voraussetzung zufolge besitzt aber U am Rande von $\mathfrak{K}$ dieselben Werthe wie u; demnach ist $U - u$ am Rande von $\mathfrak{K}$ überall $= 0$. Folglich:

$$(9) \qquad T_{\mathfrak{K}} = 0.$$

Somit reducirt sich die vorhin in (2) gefundene Formel auf:

$$(10) \qquad \Pi_{\mathfrak{K}}(U) = \Pi_{\mathfrak{K}}(u) + \Pi_{\mathfrak{K}}(U - u).$$

Hier repräsentirt U irgend eine Function, die am Rande von $\mathfrak{K}$ gleichwerthig mit u, und im Innern von $\mathfrak{K}$ stetig ist. Solcher Functionen U giebt es offenbar unendlich viele. Eine unter diesen unendlich vielen ist die Function u selber.

Beachtet man, dass die mit $\Pi_{\mathfrak{K}}$ bezeichneten Integrale ihrer Bedeutung zufolge jederzeit positiv sind, so ergiebt sich aus der vorstehenden Formel (10) unmittelbar, dass $\Pi_{\mathfrak{K}}(U)$ grösser als $\Pi_{\mathfrak{K}}(u)$ ist. Eine Ausnahme hiervon wird nur dann eintreten, wenn zufälliger Weise $\Pi_{\mathfrak{K}}(U - u)$ gleich 0 ist; letzteres kann aber, wie leicht zu übersehen ist, nur dann der Fall sein, wenn $U - u$ gleich 0 ist, also nur dann, wenn U identisch mit u ist.

Es wird daher $\Pi_{\mathfrak{K}}(U)$ jederzeit entweder grösser als $\Pi_{\mathfrak{K}}(u)$, oder gleich $\Pi_{\mathfrak{K}}(u)$ sein. Ersteres wird stattfinden, so lange U verschieden von u, letzteres, falls U identisch mit u ist. Sucht man also unter den unendlich vielen Functionen U diejenige auf, für welche das Integral $\Pi_{\mathfrak{K}}$ am kleinsten ist, so wird die so erhaltene Function identisch mit u sein. Wir gelangen somit zu folgendem Satz:

Sind x, y die Puncte einer Kreisfläche $\mathfrak{K}$, so wird unter den von x, y auf reelle Weise abhängenden Functionen U, welche am Rande von $\mathfrak{K}$ gegebene Werthe besitzen, und im Innern von $\mathfrak{K}$ stetig sind, eine vorhanden sein, für welche das Integral

$$\iint_{\mathfrak{K}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

oder

$$\Pi_{\mathfrak{K}}(U)$$

am kleinsten ist. Diese specielle Function U, sie mag u heissen, ist ausgezeichnet durch folgende Eigenschaften:

I. *u und all ihre Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, ... sind innerhalb $\mathfrak{K}$ stetig.*

II. *$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ist innerhalb $\mathfrak{K}$ überall $= 0$.*

Wir gehen über zur Betrachtung einer beliebig gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$. Es sei, ähnlich wie vorhin, U eine Function von x, y, welche am Rande von $\mathfrak{E}$ gegebene Werthe besitzt, und innerhalb $\mathfrak{E}$ stetig ist, welche sonst aber hinsichtlich ihrer Gestalt oder Beschaffenheit keinerlei Beschränkung unterworfen sein soll. Das über die Fläche $\mathfrak{E}$ ausgedehnte Integral

$$\iint_{\mathfrak{E}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

oder

$$\Pi_{\mathfrak{E}}(U)$$

kann niemals negativ werden. Unter den unendlich vielen Gestalten, deren die Function U fähig ist, muss demnach eine existiren, für welche das Integral am kleinsten ist. Wir wollen uns denken, diese specielle Gestalt der Function U sei auf irgend welchem Wege ermittelt worden; sie mag bezeichnet werden mit u.

Die Function U ist von veränderlicher Gestalt, nur gebunden durch die ihr auferlegten Randwerthe, und durch den stetigen Zusammenhang ihrer Binnenwerthe. Die Function u hingegen ist von unveränderlicher Gestalt; sie repräsentirt die-

jenige bestimmte Gestalt der Function U, für welche das Integral $\mathit{\Pi}_{\mathfrak{C}}$ am kleinsten ist.

Wir betrachten u als die primitive Gestalt von U; wir denken uns nämlich die Function U zu Anfang in die Gestalt u versetzt, und lassen sie sodann von hier aus irgend welche andere Gestalten durchlaufen, die innerhalb des ihr angewiesenen Spielraumes liegen. Diese nachfolgenden Gestalten entstehen aus der primitiven Gestalt u durch Schwankungen, die entweder total oder partiell sind, d. h. durch Schwankungen, die sich entweder über die ganze Fläche $\mathfrak{C}$, oder nur über ein Stück derselben erstrecken.

Für unsere Zwecke ist es angemessen, eine gewisse Art partieller Schwankungen eintreten zu lassen. Um die Vorstellung zu fixiren, mag auf der Fläche $\mathfrak{C}$ eine in sich zurücklaufende Curve λ construirt werden. Durch diese wird die Fläche in zwei Stücke $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ zerlegt, von welchen das eine $\mathfrak{A}$ ausserhalb, das andere $\mathfrak{J}$ innerhalb der Curve liegt. Gleichzeitig wird dadurch die Function U ebenfalls in zwei Theile zerlegt, nämlich in denjenigen Theil, welcher auf $\mathfrak{A}$, und in den, welcher auf $\mathfrak{J}$ ausgebreitet ist. Der erstgenannte Theil mag nun in seiner primitiven Gestalt erstarrt gedacht werden; der letztere hingegen, nämlich der auf $\mathfrak{J}$ ausgebreitete, mag beweglich geblieben sein.

Die Schwankungen des einen Theiles sind dann Null, die Schwankungen des andern hingegen willkührlich, wenigstens willkührlich innerhalb eines gewissen Spielraumes. Beide Theile sollen nämlich (zufolge der über U gemachten Voraussetzung) zusammengenommen jederzeit ein stetiges Ganzes bilden. Der beweglich gebliebene, zu $\mathfrak{J}$ gehörige Theil von U wird demnach in seinen Schwankungen einerseits gebunden sein durch die ihm am Rande von $\mathfrak{J}$ auferlegten Werthe; diese müssen jederzeit identisch bleiben mit den Werthen des angrenzenden erstarrten Theiles, also identisch bleiben mit denjenigen Werthen, welche die Function U während ihrer primitiven Gestalt u auf jenem Rande besitzt. Andererseits wird der beweglich gebliebene Theil von U in seinen Schwankungen auch noch gebunden sein durch den stetigen Zusammenhang, welcher zwischen seinen Werthen im Innern von $\mathfrak{J}$ jederzeit stattfinden muss.

Das Integral $\Pi_{\mathfrak{F}}(U)$ ist am kleinsten, so lange sich die Function U in ihrer primitiven Gestalt u befindet; es wird dasselbe also wachsen, sobald sich die Function U in Folge der eben besprochenen partiellen Schwankungen von ihrer primitiven Gestalt entfernt. Das Integral besteht aber aus zwei Gliedern:

$$\Pi_{\mathfrak{F}}(U) = \Pi_{\mathfrak{A}}(U) + \Pi_{\mathfrak{J}}(U),$$

von welchen das erstere bei Eintritt jener Schwankungen constant bleibt. Also:

$$\Pi_{\mathfrak{F}}(U) = \text{Const.} + \Pi_{\mathfrak{J}}(U).$$

Das Wachsen des Integrales muss demnach seinen Grund haben in einem Wachsen des zweiten Gliedes. Wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

Das Integral $\Pi_{\mathfrak{J}}(U)$, durch welches das eben genannte zweite Glied repräsentirt wird, ist am kleinsten, so lange die Function U in ihrer primitiven Gestalt u bleibt, und wächst, sobald sie sich aus jener Gestalt, in Folge der besprochenen partiellen Schwankungen, entfernt. Mit andern Worten:

Das Integral $\Pi_{\mathfrak{J}}$ ist für die Function u kleiner als für jede andere Function, die am Rande von $\mathfrak{J}$ gleichwerthig mit u, und im Innern von $\mathfrak{J}$ stetig ist.

Es sei p ein beliebiger Punct auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{F}$; ferner sei $\mathfrak{K}$ eine um p herum abgegrenzte Kreisfläche, welche vollständig innerhalb $\mathfrak{F}$ liegt. An Stelle von $\mathfrak{J}$ mag diese Kreisfläche $\mathfrak{K}$ genommen werden. Unter allen überhaupt denkbaren Functionen, welche am Rande von $\mathfrak{K}$ gleichwerthig mit u, und im Innern von $\mathfrak{K}$ stetig sind, wird dann u selber diejenige sein, für welche das Integral $\Pi_{\mathfrak{K}}$ am kleinsten ist. Zufolge des vorhin gefundenen Satzes (S. 13) ist daher u eine Function, welche innerhalb $\mathfrak{K}$ die dort angegebenen Eigenschaften I, II besitzt. $\mathfrak{K}$ repräsentirt aber das Bereich eines auf der Fläche $\mathfrak{F}$ ganz beliebig gewählten Punctes p. Was daher für $\mathfrak{K}$, d. h. für das

Bereich des Punctes p gilt, wird auch gelten für das Bereich eines jeden andern zur Fläche $\mathfrak{E}$ gehörigen Punctes, also gelten für die ganze Fläche $\mathfrak{E}$. Somit erhalten wir folgenden Satz:

Versteht man unter x, y die Puncte einer Elementarfläche $\mathfrak{E}$, so wird unter allen auf reelle Weise von x, y abhängenden Functionen U, welche am Rande von $\mathfrak{E}$ gegebene Werthe besitzen, und im Innern von $\mathfrak{E}$ stetig sind, eine existiren, für welche das Integral

$$\iint\limits_{\mathfrak{E}} \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy$$

oder

$$\underset{\mathfrak{E}}{\Pi}(U)$$

am kleinsten ist. Diese specielle Function U, sie mag u heissen, ist ausgezeichnet durch folgende Eigenschaften:

I. *u und all ihre Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, ... sind innerhalb $\mathfrak{E}$ stetig.*

II. *$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ist innerhalb $\mathfrak{E}$ überall $= 0$.**)

Wir gehen weiter vorwärts in der begonnenen Untersuchung. $\mathfrak{E}$ und u mögen dieselben Bedeutungen behalten, wie in dem eben angegebenen Satz. Auf $\mathfrak{E}$ denken wir uns irgend zwei Puncte s und p, von welchen der erstere fest, der letztere beweglich sein soll. Zugleich verstehen wir unter K eine beliebig gewählte reelle Constante; und bilden nun folgendes Integral:

---

*) Wollte man den hier angegebenen Satz über die Elementarfläche auf ganz directem Wege nachzuweisen versuchen, nämlich zu beweisen versuchen, ohne zuvor den analogen Satz über die Kreisfläche festzustellen, so würde man allerdings leicht zeigen können, dass die der Bedingung

$$\underset{\mathfrak{E}}{\Pi}(u) = \text{Min.}$$

Genüge leistende Function u die Eigenschaft II besitzt. Dass dieselbe aber gleichzeitig auch die Eigenschaft I besitzt, würde dabei entweder zweifelhaft bleiben, oder doch nur dargethan werden können mit Hülfe von beschwerlichen Nebenuntersuchungen.

Der von mir hier eingeschlagene indirecte Weg ist jedenfalls durchaus strenge, und wird, wie ich glaube, auch was seine Uebersichtlichkeit anbelangt, Nichts zu wünschen übrig lassen.

(1) $$v = K + \int_s^p \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx\right).$$

Die Bahn $s \ldots p$ dieses Integrales soll auf die Fläche $\mathfrak{E}$ beschränkt sein, den Rand dieser Fläche also nirgends überschreiten dürfen; sonst aber soll sie, abgesehen von ihrem festen Anfangspunct s, sich nach Willkühr bewegen dürfen.

Die Grössen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ sind zufolge der Eigenschaften I, II auf der Fläche $\mathfrak{E}$ überall stetig. Lassen wir also den beweglichen Endpunct der Bahn $s \ldots p$ weiter vorrücken, so wird sich der Werth des Integrales Schritt für Schritt auf stetige Weise ändern.

Wir denken uns zwei Bahnen σ' und σ'', welche von dem angenommenen festen Punct s auf verschiedenen Wegen fortlaufen, welche schliesslich aber in ein und demselben Punct p endigen, und bezeichnen die Werthe, mit welchen das Integral v, je nach Durchlaufung der einen oder andern Bahn, im Puncte p anlangt, mit v' und mit v''. Die beiden Bahnen σ' und σ'' bilden zusammengenommen eine in sich zurücklaufende Curve. Ist nun $\mathfrak{J}$ dasjenige Stück der Fläche $\mathfrak{E}$, welches innerhalb dieser Curve liegt, so wird die Differenz

(2) $$v' - v''$$

nichts anderes sein, als das um den Rand von $\mathfrak{J}$ herumerstreckte Integral

(3) $$\int_{\mathfrak{J}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx\right).$$

Da $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ auf der Fläche $\mathfrak{E}$ überall $= 0$ ist, so stellt

$$\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

ein Differential vor, welches auf $\mathfrak{E}$, mithin auch auf $\mathfrak{J}$ überall vollständig ist. Zugleich sind die in diesem Differential vorhandenen Grössen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ auf $\mathfrak{J}$ überall stetig. Daraus folgt (vergl. Vorl. S. 70), dass das Integral (3) gleich 0, dass mithin die Differenz (2) ebenfalls gleich 0 ist. Also:

$$v' = v''.$$

Der Werth, mit welchem das Integral in irgend einem Puncte p eintrifft, ist demnach unabhängig von der durchlaufenen Bahn;

er wird also nur abhängen von der Lage des Punctes p; oder er wird, wenn die Coordinaten des Punctes p mit x, y bezeichnet werden, nur abhängen von x, y. Somit ergiebt sich Folgendes:

Das von dem angenommenen Punct s ausgehende und in seiner Bewegung auf die Fläche $\mathfrak{E}$ beschränkte Integral

$$(4) \qquad v = K + \int_s^p \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right)$$

repräsentirt, falls man die Coordinaten für den Punct p, d. i. für den beweglichen Endpunct seiner Bahn mit x, y bezeichnet, eine von x, y abhängende Function, welche für jede Lage dieses Punctes immer nur *einen* Werth besitzt, und welche sich bei weiterem Vorrücken des Punctes Schritt für Schritt auf *stetige* Weise ändert. Mit andern Worten: Jenes Integral v ist eine von x, y abhängende Function, die auf der Fläche $\mathfrak{E}$ überall *eindeutig* und *stetig* ist.

Aus (4) folgt:

$$dv = \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx,$$

mithin:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Daraus folgt, dass $u + iv$ eine Function vorstellt, die nur von dem *einen* Argument $x + iy$ abhängig ist (vgl. S. 4). Es mag noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass v eine willkührliche Constante K enthält. Durch geeignete Wahl von K wird man also bewirken können, dass v in irgend einem Puncte der Fläche $\mathfrak{E}$ einen vorgeschriebenen Werth annimmt. Beachten wir dieses, so gelangen wir schliesslich zu folgendem Theorem.

Erstes Theorem.

Versteht man unter x, y die Puncte einer Elementarfläche $\mathfrak{E}$, so lässt sich auf dieser Fläche immer eine von $x + iy$ abhängende Function $u + iv$ ausbreiten, welche folgende Bedingungen erfüllt:

1. ***$u + iv$ ist auf $\mathfrak{E}$ überall stetig.***
2. ***u hat am Rande von $\mathfrak{E}$ beliebig gegebene Werthe.***

3. *v hat in irgend einem einzelnen Punct von $\mathfrak{C}$ einen vorgeschriebenen Werth.*

Zusatz. Es existirt immer nur eine einzige Function $u + iv$, welche diesen Bedingungen Genüge leistet.

Um den eben ausgesprochenen Zusatz zu beweisen, wollen wir annehmen, es existirten zwei Functionen $u + iv$ und $u_1 + iv_1$, welche jenen Bedingungen Genüge leisten. Die Differenz

$$(u + iv) - (u_1 + iv_1) = \omega + i\vartheta$$

wird dann folgende Eigenschaften besitzen:

1. $\omega + i\vartheta$ ist eine von $x + iy$ abhängende Function, welche innerhalb $\mathfrak{C}$ überall eindeutig und stetig ist.

2. ω ist im Rande von $\mathfrak{C}$ überall gleich 0.

3. ϑ ist in einem einzelnen Punct der Fläche $\mathfrak{C}$ gleich 0.

Da ω am Rande von $\mathfrak{C}$ überall $= 0$ ist, so wird das in positiver Richtung über den Rand von $\mathfrak{C}$ hinerstreckte Integral

$$\int_{\mathfrak{C}} \omega \, d\vartheta$$

ebenfalls $= 0$ sein. Hieraus folgt nach bekanntem Satze (Vorl. S. 129), dass die Differenz $\omega + i\vartheta$ auf der Fläche $\mathfrak{C}$ einen überall constanten Werth hat. Dieser constante Werth kann aber, weil ω am Rande, und ϑ in einem einzelnen Punct gleich 0 ist, kein anderer als der Werth 0 sein. Somit ergiebt sich, dass die Differenz $\omega + i\vartheta$ überall $= 0$ ist; mit andern Worten, dass nur eine einzige Function $u + iv$ vorhanden sein kann, welche den im Theorem angegebenen Bedingungen Genüge leistet.

Die eben durchgeführte Untersuchung hat ihren Schwerpunct in dem reellen Theil von $u + iv$, nämlich in der Function u. Ist die Existenz dieser Function einmal dargethan, so ergiebt sich alles Uebrige von selber. Um die Existenz von u nachzuweisen, haben wir uns des Integrales:

$$\iint_{\mathfrak{C}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

bedient. Dieses Integral musste, falls man die Function U auf ein gewisses Gebiet von Gestalten beschränkt, für irgend eine

dieser Gestalten am kleinsten sein; und hieraus ergab sich dann die Existenz der in Rede stehenden Function u.

Das Princip unserer Untersuchung besteht also darin, dass die Existenz einer mit vorgeschriebenen Eigenschaften behafteten Function aus einem gewissen Integral gefolgert wird, welches nothwendigerweise einen Minimalwerth besitzen muss. Dieses Princip ist von Dirichlet in seinen Vorlesungen über die dem umgekehrten Quadrat der Entfernung proportinal wirkenden Kräfte mitgetheilt worden*); und wird demgemäss von Riemann das Dirichlet'sche Princip genannt.

Dasselbe Princip wird nun auch bei den folgenden Untersuchungen fortwährend zur Anwendung kommen. Nur wird das dabei benutzte Integral den Umständen gemäss zuweilen durch ein anderes von Riemann angegebenes Integral ersetzt werden müssen, durch ein Integral, dessen Entdeckung von grosser Wichtigkeit war, welches aber in Riemann's grossartigem Werk nur ein unbedeutender Stein ist im staunenswerthen Gefüge des Ganzen.

Zweiter Abschnitt. Ueber die Reduction einer Riemann'schen Kugelfläche auf ein System von Elementarflächen, und über die bei dieser Reduction auftretenden Invarianten.

Eine Riemann'sche Kugelfläche kann jederzeit reducirt werden auf ein System von Elementarflächen. Denken wir uns nämlich auf der gegebenen Riemann'schen Kugelfläche irgend einen Punct $a + ib$, und grenzen wir um diesen Punct herum ein kleines Flächenstück ab, welches, je nachdem der Punct $a + ib$ ein gewöhnlicher oder ein Windungspunct ist, entweder keinen oder nur diesen einen Windungspunct enthält, so wird sich das Flächenstück durch stetige Umformung verwandeln lassen in eine Elementarfläche. Ist $a + ib$ verschieden von ∞, so lässt sich diese Umformung der Art bewerkstelligen, dass jeder zum Flächenstück gehörige Punct $x + iy$ in denjenigen Punct $\xi + i\eta$ der Elementarfläche übergeht, welcher mit ihm durch die Relation

*) Vergl. Riemanns Abhandlung (Borchardts Journal Bd. 54. S. 111.).

$$(1) \qquad \xi + i\eta = \sqrt[m]{(x + iy) - (a + ib)}$$

verbunden ist, wo m eine gewisse positive ganze Zahl vorstellt, deren Bedeutung sogleich angegeben werden soll. Ist andererseits $a + ib$ verschieden von 0, so lässt sich die in Rede stehende Umformung der Art bewerkstelligen, dass die genannten Puncte $x + iy$ und $\xi + i\eta$ mit einander verbunden sind durch die Relation:

$$(2) \qquad \xi + i\eta = \sqrt[m]{\frac{1}{x + iy} - \frac{1}{a + ib}}.$$

Die Zahl m stellt die Anzahl von Blättern vor, welche bei dem betrachteten Flächenstück im Punct $a + ib$ mit einander zusammenhängen; sie wird also $= 1$ sein, falls $a + ib$ ein gewöhnlicher Punct ist, hingegen $= 2, 3, 4, \ldots$ sein, falls $a + ib$ ein Windungspunct erster, zweiter, dritter, u. s. w. Ordnung ist (Vorl. Seite 236).

Die correspondirenden Puncte des betrachteten Flächenstücks und der daraus durch stetige Umformung entstehenden Elementarfläche sind, wie wir sehen, je nach den Umständen entweder durch die Relation (1) oder durch die Relation (2) mit einander verbunden; immer sind sie also mit einander verbunden durch eine Relation von der Form

$$(3) \qquad \xi + i\eta = \varphi(x + iy);$$

d. h. $\xi + i\eta$ ist niemals an x und y, sondern immer nur an das eine Argument $x + iy$ gebunden.

Das betrachtete Flächenstück und die daraus durch Umformung entstehende Elementarfläche sind unter einander identisch, nämlich als zwei verschiedene Zustände ein und derselben Fläche zu betrachten. Zur Unterscheidung nenne ich den ersteren Zustand den ursprünglichen, den letzteren den natürlichen. Für ein und denselben Punct werden mithin x, y die ursprünglichen, und ξ, η die natürlichen Coordinaten zu nennen sein.

Wir wollen uns das Flächenstück zur Zeit seines ursprünglichen Zustandes mit irgend welchen Functionswerthen belastet denken; ob dieselben von x und y abhängen, oder ob sie nur von dem einen Argument $x + iy$ abhängig sind, ist gleichgültig. Diese Werthe mögen mit den Puncten des Flächenstückes unlöslich verbunden sein; so dass der in jedem einzelnen Punct vorhandene Werth — gleichgültig ob das Flächenstück in seinem

ursprünglichen Zustande verharrt, oder ob es in seinen natürlichen Zustand übergeht — immer ein und derselbe bleibt. Mit Rücksicht auf diese beiden Zustände ergeben sich für die betrachteten Functionswerthe zwei verschiedene Arten von Ableitungen, nämlich einerseits die Ableitungen nach den ursprünglichen Coordinaten x, y, und andererseits diejenigen, welche nach den natürlichen Coordinaten ξ, η gebildet sind. Die einen werden wir erhalten, wenn wir uns das Flächenstück im ursprünglichen Zustande denken, die andern, wenn wir uns dasselbe in den natürlichen Zustand versetzt denken. Der Kürze willen sollen die ersteren die ursprünglichen Ableitungen, die letzteren die natürlichen Ableitungen genannt werden.

Bekannt ist folgender Satz (Vorl. S. 91):

Sind x, y die Puncte einer gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$, und ist $f(x + iy)$ eine von $x + iy$ abhängende Function, welche auf $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig ist, so gilt Gleiches auch von den Ableitungen dieser Functionen, d. i. von $f'(x + iy)$, $f''(x + iy)$, $f'''(x + iy)$, u. s. w.

Dieser Satz lässt sich auf die Riemann'schen Flächen allerdings nicht unmittelbar übertragen, wohl aber, wenn man gewisse Modificationen eintreten lässt, in folgender Weise:

Es sei $\mathfrak{S}$ irgend ein Theil einer Riemann'schen Kugelfläche, und f eine von $x + iy$ abhängende Function, welche auf $\mathfrak{S}$ überall eindeutig und stetig ist. Wir betrachten auf dem gegebenen Flächentheil $\mathfrak{S}$ einen beliebigen Punct, und grenzen um diesen Punct herum ein Flächenstück $\mathfrak{J}$ ab, welches nicht mehr als höchstens einen Windungspunct enthält; gleichzeitig bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}$ diejenige Elementarfläche, durch welche der natürliche Zustand dieses Flächenstücks dargestellt wird. Demgemäss mögen die beiden Bilder, welche das Flächenstück sammt den darauf ausgebreiteten Werthen von f in seinem ursprünglichen und in seinem natürlichen Zustande darbietet, angedeutet werden durch

$$(\mathfrak{J},\quad x + iy,\quad f),$$

und durch

$$(\mathfrak{E},\quad \xi + i\eta,\quad f).$$

Nach der gemachten Voraussetzung ist f eine Function von $x + iy$, das Binom $x + iy$ ist aber seinerseits [zufolge (3)] abhängig von $\xi + i\eta$; demnach wird f auch angesehen werden können als eine

Function von $\xi + i\eta$. Diese von $\xi + i\eta$ abhängende Function f ist, weil sie der Voraussetzung nach auf $\mathfrak{J}$ überall eindeutig und stetig sein sollte, auf der Elementarfläche $\mathfrak{E}$ ebenfalls überall eindeutig und stetig. Gleiches gilt daher, zufolge des eben angeführten Satzes, auch von den Ableitungen $f'(\xi + i\eta)$, $f''(\xi + i\eta)$, $f'''(\xi + i\eta)$ u. s. w., d. i. von den natürlichen Ableitungen. Das Resultat, zu welchem wir hiemit gelangt sind, bezieht sich auf das Flächenstück $\mathfrak{J}$, d. i. auf das Bereich eines Punctes, welcher auf dem gegebenen Flächentheile $\mathfrak{S}$ beliebig gewählt war; demnach wird jenes Resultat gültig sein für den ganzen gegebenen Flächentheil. Wir haben mithin folgenden Satz:

Versteht man unter $\mathfrak{S}$ irgend einen Theil einer Riemann'schen Kugelfläche, ferner unter x, y die zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Puncte, und ist f eine von $x + iy$ abhängende Function, welche auf $\mathfrak{S}$ überall eindeutig und stetig bleibt, so wird Gleiches auch gelten von den natürlichen Ableitungen dieser Function.

Die Modification, welche bei der Uebertragung des vorhin angeführten Satzes von einer Elementarfläche auf eine Riemannsche Fläche erforderlich ist, besteht also, wie wir sehen, darin, dass an Stelle der ursprünglichen Ableitungen die natürlichen Ableitungen zu setzen sind.

Es sei, ebenso wie bisher, $\mathfrak{J}$ irgend ein Stück einer Riemann'schen Kugelfläche; ferner mögen

$$(\mathfrak{J},\ x,\ y)$$

und

$$(\mathfrak{E},\ \xi,\ \eta)$$

die beiden Bilder sein, welche dieses Flächenstück zur Zeit seines ursprünglichen und zur Zeit seines natürlichen Zustandes darbietet. Zwischen je zwei correspondirenden Puncten x, y und ξ, η findet dann eine Relation von der in (3) angegebenen Form statt:

$$\xi + i\eta = \varphi(x + iy) \tag{4}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

Zufolge der Relation (4) kann man aber auch umgekehrt $x + iy$ als eine Function von $\xi + i\eta$ betrachten. Alsdann ergiebt sich:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0. \tag{6}$$

Wir bezeichnen die Functionaldeterminante von x, y nach ξ, η mit R:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} = R; \tag{7}$$

alsdann ergiebt sich aus (6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \eta} &= R, \\ \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta} &= R, \\ \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta} &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Ferner folgt aus (6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Es mögen x, y und $x + dx$, $y + dy$ zwei benachbarte Puncte auf $\mathfrak{J}$ sein, ferner mögen ξ, η und $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$ die correspondirenden Puncte auf $\mathfrak{E}$ sein. Die Entfernung der beiden ersten Puncte mag dr, die der beiden letztern $d\varrho$ genannt werden; also

$$\begin{aligned} dr^2 &= dx^2 + dy^2, \\ d\varrho^2 &= d\xi^2 + d\eta^2. \end{aligned}$$

Die Differentiale dx, dy können durch die Differentiale $d\xi$, $d\eta$ in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta, \end{aligned}$$

Hieraus aber folgt mit Rücksicht auf (8) augenblicklich:

$$dx^2 + dy^2 = R(d\xi^2 + d\eta^2)$$

d. i.

$$dr = \sqrt{R} \,.\, d\varrho. \tag{10}$$

Wir wollen uns nun auf $\mathfrak{J}$ ein unendlich kleines Dreieck construirt denken; seine drei Seiten seien dr, dr', dr''. Ferner mögen $d\varrho$, $d\varrho'$, $d\varrho''$ die Seiten des correspondirenden Dreiecks auf $\mathfrak{E}$ sein. Zufolge (10) ist dann:

$$\begin{aligned} dr &= \sqrt{R} \,.\, d\varrho, \\ dr' &= \sqrt{R} \,.\, d\varrho', \\ dr'' &= \sqrt{R} \,.\, d\varrho''. \end{aligned}$$

Die beiden Dreiecke sind mithin einander ähnlich. Wir haben daher folgenden Satz:

Die beiden Bilder, welche irgend ein Stück einer Riemann'schen Kugelfläche zur Zeit seines ursprünglichen und zur Zeit seines natürlichen Zustandes darbietet, sind in ihren kleinsten Theilen einander ähnlich.

Es seien U, V, W irgend welche Functionen von x, y, die bei ihrer Ausbreitung auf der betrachteten Riemann'schen Kugelfläche innerhalb des Flächenstückes $\mathfrak{J}$ überall eindeutig sind. Die beiden Bilder, welche dieses Flächenstück sammt den genannten Functionswerthen zur Zeit des ursprünglichen und zur Zeit des natürlichen Zustandes darbietet, mögen bezeichnet werden mit

$$(\mathfrak{J},\ x,\ y,\ U,\ V,\ W)$$

und mit

$$(\mathfrak{E},\ \xi,\ \eta,\ U,\ V,\ W).$$

Die Werthe von U, V, W werden dann in jedem Punct ξ, η dieselben sein, wie in dem correspondirenden Punct x, y.

Wir betrachten auf $\mathfrak{J}$ irgend drei einander unendlich nahe Puncte a, b, c, und bezeichnen die correspondirenden Puncte auf $\mathfrak{E}$ mit α, β, γ. Sind U_a, U_b, U_c und U_α, U_β, U_γ die Werthe, welche die Function U in diesen Puncten besitzt, so wird

$$U_a = U_\alpha, \quad U_b = U_\beta, \quad U_c = U_\gamma,$$

mithin

$$(11) \qquad U_b - U_a = U_\beta - U_\alpha$$

sein. Zufolge des letzterhaltenen Satzes (über die Aehnlichkeit der kleinsten Theile) werden die Linienelemente ab, ac proportional sein mit den correspondirenden Linienelementen $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$; also:

$$(12) \qquad \frac{ac}{ab} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta}.$$

Aus (11) und (12) folgt nun unmittelbar:

$$(13) \qquad \frac{U_b - U_a}{ab} \cdot ac = \frac{U_\beta - U_\alpha}{\alpha\beta} \cdot \alpha\gamma.$$

Der Quotient $\frac{U_b - U_a}{ab}$ ist nichts Anderes, als der Differential-Quotient von U nach der Richtung ab, und kann daher, wenn man das Linienelement ab gleich dr setzt, bezeichnet werden mit $\frac{dU}{dr}$. Desgleichen wird der Quotient $\frac{U_\beta - U_\alpha}{\alpha\beta}$, falls man

das Linienelement $\alpha\beta$ gleich $d\varrho$ setzt, zu bezeichnen sein mit $\frac{dU}{d\varrho}$. Thut man dies, und setzt man ausserdem ac gleich dr', und $\alpha\gamma$ gleich $d\varrho'$, so gewinnt die Formel (13) folgendes Aussehen:

$$(14)\qquad \frac{dU}{dr} \cdot dr' = \frac{dU}{d\varrho} \cdot d\varrho'$$

Der dem ursprünglichen Zustande zugehörige Ausdruck $\frac{dU}{dr}\,dr'$ ist also ebenso gross, wie der correspondirende Ausdruck für den natürlichen Zustand; es kann demnach dieser Ausdruck eine **Invariante** genannt werden.

Hiebei sind zahlreiche Specialfälle zu erwähnen. Wir können z. B. für dr ein mit der x Achse paralleles Linienelement dx, und gleichzeitig für dr' ein mit der y Achse paralleles dy nehmen; für $d\varrho$, $d\varrho'$ werden dann die mit dx, dy correspondirenden Linienelemente $d\xi$, $d\eta$ zu setzen sein. Die Formel (14) verwandelt sich daher in diesem Fall in $\frac{\partial U}{\partial x}\,dy = \frac{\partial U}{\partial \xi}\,d\eta$. In ähnlicher Weise ergeben sich sämmtliche Formeln des nachfolgenden Systemes:

$$(15)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial x}\,dx = \frac{\partial U}{\partial \xi}\,d\xi, &\qquad &\frac{\partial U}{\partial x}\,dy = \frac{\partial U}{\partial \xi}\,d\eta,\\ &\frac{\partial U}{\partial y}\,dy = \frac{\partial U}{\partial \eta}\,d\eta, &\qquad &\frac{\partial U}{\partial y}\,dx = \frac{\partial U}{\partial \eta}\,d\xi,\\ &\frac{dU}{ds}\,ds = \frac{dU}{d\sigma}\,d\sigma, &\qquad &\frac{dU}{dn}\,ds = \frac{dU}{d\nu}\,d\sigma. \end{aligned}$$

In den beiden letzten sollen unter ds und $d\sigma$ zwei correspondirende Elemente der Randcurven von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{E}$ verstanden werden; gleichzeitig sollen dn und $d\nu$ die auf ds und $d\sigma$ errichteten innern Normalen vorstellen.

Aus (15) ergeben sich nun weitere Formeln durch Integration, so z. B. folgende:

$$(16)\qquad \int\limits_{\mathfrak{J}} \frac{dU}{ds}\,ds = \int\limits_{\mathfrak{E}} \frac{dU}{d\sigma}\,d\sigma,$$

$$(17)\qquad \int\limits_{\mathfrak{J}} \frac{dU}{dn}\,ds = \int\limits_{\mathfrak{E}} \frac{dU}{d\nu}\,d\sigma,$$

wo die Integration links um den Rand von $\mathfrak{J}$, die rechts um den von $\mathfrak{E}$ einmal herumläuft.

Die Ausdrücke (15) und die Integrale (16), (17) sind also ebenfalls **Invarianten.**

Wir werden sogleich noch andere Invarianten kennen lernen. Da U eine Function von x, y ist, und x, y ihrerseits abhängig sind von ξ, η, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi},$$
$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta},$$

oder mit Rücksicht auf (6):

$$(18)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi} &= \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial \eta},\\ \frac{\partial U}{\partial \eta} &= \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Ebenso erhält man für die Function V die Gleichungen:

$$(18\text{a.})\qquad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \xi} &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial \eta},\\ \frac{\partial V}{\partial \eta} &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Erhebt man die Gleichungen (18) zum Quadrat, und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf (8):

$$(19)\qquad \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2 = R \cdot \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\}.$$

Ferner ergiebt sich, wenn man die Gleichungen (18) und (18a.) mit einander multiplicirt, und dabei wiederum Rücksicht nimmt auf (8):

$$(20)\qquad \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \eta} = R \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right),$$

$$(21)\qquad \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \xi} = R \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right).$$

Endlich ergiebt sich, wenn man zu den zweiten Differentialquotienten übergeht, und die Formeln (6), (7), (8), (9) benutzt, mit leichter Mühe:

$$(22)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = R \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right).$$

Nun ist zufolge (10): $R = \frac{dr^2}{d\varrho^2}$. Substituirt man diesen Werth in die Formeln (19), (20), (21), (22), so gewinnen dieselben folgendes Aussehen:

$$(23)\quad \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\} dr^2 = \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2\right\} d\varrho^2,$$

$$(24)\quad \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right) dr^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}\right) d\varrho^2,$$

$$(25)\quad \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right) dr^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \xi}\right) d\varrho^2,$$

$$(26)\quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) dr^2 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right) d\varrho^2.$$

Die in diesen vier Formeln enthaltenen Ausdrücke sind also ebenfalls **Invarianten.**

Da W eine Function von x, y vorstellen soll, und x, y ihrerseits abhängig sind von ξ, η, so ist bekanntlich

$$(27)\quad \iint W\,dx\,dy = \iint W R\,d\xi\,d\eta,$$

vorausgesetzt, dass man unter R nach wie vor die Functionaldeterminante von x, y nach ξ, η versteht. Die Grenzen der Integration sind hier beliebig; nur muss das Integrationsgebiet des einen Integrales correspondiren mit dem des andern. Wir werden demnach das eine Integral über $\mathfrak{J}$, das andere über $\mathfrak{E}$ hinerstrecken können; also:

$$(28)\quad \iint_{\mathfrak{J}} W\,dx\,dy = \iint_{\mathfrak{E}} W R\,d\xi\,d\eta.$$

Nehmen wir nun an Stelle der beliebigen Function W successive die Ausdrücke:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2,$$
$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y},$$
$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

so erhalten wir, mit Rücksicht auf (19), (20), (21), (22), folgende Formeln:

$$(29)\quad \iint_{\mathfrak{J}} \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy = \iint_{\mathfrak{E}} \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2\right\} d\xi\,d\eta,$$

$$(30)\quad \iint_{\mathfrak{J}} \left\{\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right\} dx\,dy = \iint_{\mathfrak{E}} \left\{\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}\right\} d\xi\,d\eta,$$

$$(31)\quad \iint\limits_{\mathfrak{J}}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right\}dx\,dy=\iint\limits_{\mathfrak{E}}\left\{\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \eta}-\frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \xi}\right\}d\xi\,d\eta,$$

$$(32)\quad \iint\limits_{\mathfrak{J}}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right\}dx\,dy=\iint\limits_{\mathfrak{E}}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right\}d\xi\,d\eta.$$

Die in diesen vier Formeln aufgeführten Integrale sind demnach wiederum **Invarianten.**

Dritter Abschnitt. Functionen von $x + iy$, welche auf irgend einem Stück einer Riemann'schen Kugelfläche stetig sind, und deren reelle Theile am Rande dieses Flächenstücks vorgeschriebene Werthe besitzen sollen.

Es sei, ebenso wie bisher, $\mathfrak{J}$ irgend ein Theil einer Riemann'schen Kugelfläche, welcher sich durch stetige Umformung in seinen natürlichen Zustand versetzen lässt. Ferner sei U irgend eine reelle Function von x, y, welche auf $\mathfrak{J}$ ausgebreitet, und daselbst überall eindeutig ist. Diese Function U mag von veränderlicher Gestalt, und nur dadurch gebunden sein, dass sie am Rande von $\mathfrak{J}$ gegebene Werthe, und im Innern von $\mathfrak{J}$ stetig sein soll. Das über $\mathfrak{J}$ ausgedehnte Integral

$$(1)\quad \iint\limits_{\mathfrak{J}}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy$$

kann, weil U reell sein soll, niemals negativ werden. Unter den verschiedenen Gestalten, welche U annehmen kann, muss demnach eine existiren, für welche das Integral am kleinsten ist. Diese specielle Gestalt von U mag u heissen; u wird dann eine gewisse Fuuction von x, y sein, welche unveränderlich ist.

Das Integral (1) ist, wie wir vorhin gefunden haben(S. 28), eine Invariante. Bezeichnen wir also die beiden Bilder, welche das Flächenstück $\mathfrak{J}$ sammt den darauf ausgebreiteten Functionswerthen U zur Zeit des ursprünglichen und zur Zeit des natürlichen Zustandes darbietet, mit

$$(\mathfrak{J},\ x,\ y,\ U)$$

und mit

$$(\mathfrak{E},\ \xi,\ \eta,\ U)$$

so wird dss Integral (1) von gleichem Werth sein mit folgendem.

$$(2)\qquad \iint\limits_{\mathfrak{E}} \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2\right\} d\xi\, d\eta.$$

Dieses über die Elementarfläche $\mathfrak{E}$ hinerstreckte Integral (2) wird demnach, ebenso wie das Integral (1), für die Function u kleiner sein, als für jede andere Function U, welche am Rande von $\mathfrak{E}$ mit u gleichwerthig und im Innern von $\mathfrak{E}$ stetig ist. Aus einem früheren Satz (S. 16) ergiebt sich daher

I. dass die Function u sammt all' ihren Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$, . . auf $\mathfrak{E}$ stetig ist,

II. dass $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ auf $\mathfrak{E}$ überall $= 0$ ist.

Diese Eigenschaften der Function u beziehen sich zunächst nur auf das natürliche Bild

$$(\mathfrak{E},\ \xi,\ \eta,\ u).$$

Will man dieselben übertragen auf das ursprüngliche Bild

$$(\mathfrak{J},\ x,\ y,\ u),$$

so ist zunächst zu bemerken, dass der Ausdruck

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) d\varrho^2$$

eine Invariante ist (S. 28). Dieser Ausdruck ist zufolge der II. Eigenschaft innerhalb $\mathfrak{E}$ überall $=0$. Demnach wird der Ausdruck

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dr^2$$

überall 0 sein auf $\mathfrak{J}$. Die II. Eigenschaft kann also unmittelbar übertragen werden auf das ursprüngliche Bild.

Nicht so die I. Eigenschaft. Betrachtet man z. B. die Formeln

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

so zeigt sich, dass die Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ für sich allein die Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ noch keineswegs nach sich zieht, dass nämlich $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ nur dann stetig sein werden, wenn ausser den Grössen $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ gleichzeitig auch $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \xi}{\partial y}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ stetig sind.

Letzteres ist aber, wie leicht zu übersehen, **im Allgemeinen keineswegs der Fall.**

Bei Aussprache der I. Eigenschaft werden wir also in Gedanken immer zurückgehen müssen auf das natürliche Bild. Der Kürze willen bedienen wir uns dabei des bereits früher (S. 22) eingeführten Namens, und nennen

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \ldots$$

die natürlichen Ableitungen, zur Unterscheidung von den ursprünglichen Ableitungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ldots$$

Wir gelangen alsdann zu folgendem Resultat:

Versteht man unter $\mathfrak{J}$ irgend ein Stück einer Riemann'schen Kugelfläche, welches ohne Zerschneidung, nämlich allein durch stetige Umformung, in seinen natürlichen Zustand versetzt werden kann, und sind x, y die zu diesem Flächenstück gehörigen Puncte, so wird unter allen auf reelle Weise von x, y abhängenden Functionen U, welche am Rande von $\mathfrak{J}$ gegebene Werthe besitzen, und im Innern von $\mathfrak{J}$ stetig sind, eine existiren, für welche das Integral

$$\iint_{\mathfrak{J}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

oder

$$\Pi_{\mathfrak{J}}(U)$$

am kleinsten ist. Diese specielle Function U, sie mag u heissen, ist ausgezeichnet durch folgende Eigenschaften:

I. *Die Function u und all ihre natürlichen Ableitungen sind innerhalb $\mathfrak{J}$ stetig.*

II. *Der Ausdruck $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ist innerhalb $\mathfrak{J}$ überall $= 0$.*

Es wird sich leicht zeigen lassen, dass dieser Satz ausdehnbar ist auf jeden beliebigen Theil einer Riemann'schen Kugelfläche.

Wir wollen uns einen solchen Flächentheil gegeben denken, und denselben mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen. Aus wie vielen Blättern $\mathfrak{S}$ besteht, wie viele Windungspuncte $\mathfrak{S}$ enthält, wie viele Randcurven $\mathfrak{S}$ besitzt, soll ganz gleichgültig sein.

Die zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Puncte mögen mit x, y bezeichnet werden. Ferner sei U eine von x, y abhängende reelle Function von veränderlicher Gestalt; dieselbe mag nur dadurch gebunden sein, dass sie am Rande von $\mathfrak{S}$ gegebene Werthe besitzen, und im Innern von $\mathfrak{S}$ stetig sein soll. Das über $\mathfrak{S}$ ausgedehnte Integral

$$\iint_{\mathfrak{S}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

oder

$$\Pi_{\mathfrak{S}}(U)$$

kann niemals negativ werden. Unter den verschiedenen Gestalten, deren U fähig ist, muss demnach eine existiren, für welche das Integral am kleinsten ist. Diese specielle Gestalt von U mag u heissen.

Betrachten wir u als die primitive Gestalt der Function U, so wird also das Integral $\Pi_{\mathfrak{S}}(U)$ jederzeit wachsen, sobald sich die Function U durch irgend welche Schwankungen von ihrer primitiven Gestalt entfernt, gleichgültig ob diese Schwankungen totale oder partielle sind.

Es sei p ein beliebiger Punct auf $\mathfrak{S}$, ferner sei $\mathfrak{J}$ ein um diesen Punct herum abgegrenztes Flächenstück von solcher Beschaffenheit, dass es ohne Zerschneidung, nämlich allein durch stetige Umformung, in seinen natürlichen Zustand versetzt werden kann. Das nach Absonderung von $\mathfrak{J}$ noch übrig bleibende Stück von $\mathfrak{S}$ mag $\mathfrak{A}$ heissen.

Wir beschränken die Beweglichkeit der veränderlichen Function U auf das Flächenstück $\mathfrak{J}$. Der auf $\mathfrak{A}$ ausgebreitete Theil von U soll also verharren in seiner primitiven durch u ausgedrückten Gestalt. Der auf $\mathfrak{J}$ ausgebreitete bewegliche Theil von U wird alsdann am Rande von $\mathfrak{J}$ beständig seine primitiven Werthe beizubehalten gezwungen sein; im Innern von $\mathfrak{J}$ wird er alle möglichen Werthe annehmen dürfen, die mit jenen Randwerthen und unter einander stetig zusammenhängen.

Das Integral $\Pi_{\mathfrak{S}}(U)$ wächst jederzeit, sobald sich die Function von ihrer primitiven Gestalt entfernt. Es besteht aber dieses

Integral, wenn wir die Beweglichkeit der Function in der angegebenen Weise beschränken, aus zwei Gliedern:

$$\Pi_{\mathfrak{T}}(U) = \Pi_{\mathfrak{A}}(U) + \Pi_{\mathfrak{J}}(U),$$

von welchen das erste constant bleibt. Es muss demnach in diesem Fall das Wachsen des Integrales seinen Grund haben in einem Wachsen des zweiten Gliedes. Dieses zweite Glied wird also am kleinsten sein, so lange sich die Function in ihrer primitiven Gestalt befindet. Mit andern Worten:

Das Integral $\Pi_{\mathfrak{J}}$ ist für die Function u kleiner als für jede andere Function U, welche am Rande von $\mathfrak{J}$ gleichwerthig mit u, und im Innern von $\mathfrak{J}$ stetig ist. Zufolge des vorhergehenden Satzes (S. 31) ist daher u eine Function, welche innerhalb $\mathfrak{J}$ die dort angegebenen Eigenschaften I, II besitzt. $\mathfrak{J}$ repräsentirt aber das Bereich eines auf dem gegebenen Flächentheil $\mathfrak{T}$ beliebig gewählten Punctes p. Demnach werden jene Eigenschaften I, II, da sie für das Bereich von p gelten, auch gelten für das Bereich eines jeden andern Punctes, also gelten für den ganzen Flächentheil $\mathfrak{S}$. Folglich:

Ist $\mathfrak{T}$ ein ganz beliebiger Theil einer Riemann'schen Kugelfläche, und sind x, y die zu diesem Flächentheil gehörigen Puncte, so wird unter allen von x, y auf reelle Weise abhängenden Functionen U, welche am Rande von $\mathfrak{T}$ gegebene Werthe besitzen und im Innern von $\mathfrak{S}$ stetig sind, eine existiren, für welche das Integral

$$\int\int_{\mathfrak{T}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

oder

$$\Pi_{\mathfrak{T}}(U)$$

am kleinsten ist. Diese specielle Function U, sie mag u heissen, ist ausgezeichnet durch folgende Eigenschaften:

I. *Die Function u und all' ihre natürlichen Ableitungen sind innerhalb $\mathfrak{S}$ stetig;*

II. *Der Ausdruck $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ist innerhalb $\mathfrak{T}$ überall $= 0$.*

Wir gehen in der hier begonnenen Untersuchung weiter vorwärts. $\mathfrak{T}$ und u sollen demnach dieselben Bedeutungen behalten, wie in dem soeben ausgesprochenen Satz.

Das in positiver Richtung um den Rand von $\mathfrak{T}$ herumerstreckte Integral

$$(1) \qquad T_{\mathfrak{T}} = \int_{\mathfrak{T}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right)$$

lässt sich, wenn man die Fläche $\mathfrak{T}$ durch irgend welche Schnitte in eine Anzahl einzelner Stücke $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3, \ldots$ zersplittert, folgendermassen darstellen:

$$(2) \qquad T_{\mathfrak{T}} = T_{\mathfrak{J}_1} + T_{\mathfrak{J}_2} + T_{\mathfrak{J}_3} + \ldots,$$

wo jedes der Integrale rechts um eines der Flächenstücke $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3, \ldots$ in positiver Richtung herumläuft. Wir denken uns diese Flächenstücke der Art gewählt, dass jedes derselben durch stetige Umformung in seinen natürlichen Zustand versetzt werden kann, und bezeichnen die beiden Bilder, welche das Flächenstück $\mathfrak{J}_\varkappa$ zur Zeit seines ursprünglichen und zur Zeit seines natürlichen Zustandes darbietet, mit

$$(\mathfrak{J}_\varkappa,\ x,\ y,\ u)$$

und mit

$$(\mathfrak{C}_\varkappa,\ \xi,\ \eta,\ u).$$

Das zu $\mathfrak{J}_\varkappa$ gehörige Integral lautet:

$$(3) \qquad T_{\mathfrak{J}_\varkappa} = \int_{\mathfrak{J}_\varkappa} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right).$$

Dieses Integral ist (vergl. S. 26) eine Invariante, und kann demnach auch so dargestellt werden:

$$(4) \qquad T_{\mathfrak{J}_\varkappa} = \int_{\mathfrak{C}_\varkappa} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial u}{\partial \eta} d\xi \right).$$

Die Function u besitzt die Eigenschaften I, II. Daraus folgt erstens, dass $\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}$ auf der Fläche $\mathfrak{C}_\varkappa$ überall stetig sind, und zweitens, dass $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ist, dass mithin $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ ebenfalls $= 0$ ist. Der in (4) unter dem Integralzeichen befindliche Ausdruck

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}\, d\eta - \frac{\partial u}{\partial \eta}\, d\xi$$

ist demnach ein Differential, welches auf der Elementarfläche $\mathfrak{E}_\varkappa$ überall stetig und vollständig ist. Zufolge eines bekannten Satzes (Vorl. S. 70) hat demnach jenes Integral (4) den Werth Null. Also:

$$(5) \qquad T_{\mathfrak{E}\varkappa} = 0.$$

Somit ergiebt sich aus (2):

$$(6) \qquad T_{\mathfrak{S}} = 0.$$

Offenbar würde sich ein ganz ähnliches Resultat auch dann ergeben haben, wenn wir nicht die ganze Fläche $\mathfrak{S}$, sondern irgend ein Stück derselben betrachtet hätten. Wir gelangen demnach zu folgendem Ausspruch:

(7) . . . . *Betrachtet man irgend welches Stück der Fläche $\mathfrak{S}$, so wird das in positiver Richtung um den Rand dieses Stückes herumlaufende Integral*

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx \right)$$

jederzeit gleich Null sein.

Wir wollen uns die Fläche $\mathfrak{S}$ durch Ausführung irgend welcher Schnitte L in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt denken, und diese einfach zusammenhängende Fläche mit $\mathfrak{S}'$ bezeichnen. Auf $\mathfrak{S}'$ denken wir uns irgend zwei Puncte ε und p, von welchen der erstere fest, der letztere beweglich sein soll. Endlich bezeichnen wir mit K eine beliebige reelle Constante; und bilden folgendes Integral:

$$(8) \qquad v = K + \int_{\varepsilon}^{p} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx \right).$$

Die Bahn $\varepsilon \ldots p$ dieses Integrales soll auf die Fläche $\mathfrak{S}'$ beschränkt sein, die Schnitte L also nirgends überschreiten dürfen; sonst aber soll sie, abgesehen von ihrem festen Anfangspunct ε, sich nach Willkühr bewegen können.

Es seien σ' und σ'' zwei solche Bahnen, welche von s aus nach ein und demselben Punct p hinlaufen; und gleichzeitig mögen v' und v'' die beiden Werthe sein, mit welchen das Integral v je nach Durchlaufung von σ' oder σ'' im Puncte p eintrifft. Die beiden Bahnen σ' und σ'' werden zusammengenommen eine einzige in sich zurücklaufende Curve bilden; und zwar eine Curve, welche ihrem ganzen Laufe nach innerhalb $\mathfrak{S}'$ liegt. $\mathfrak{S}'$ ist aber eine einfach zusammenhängende Fläche; und eine einfach zusammenhängende Fläche wird (Vorl. S. 295) jederzeit in zwei von einander völlig getrennte Stücke zerlegt, sobald man in ihrem Innern eine in sich zurücklaufende Curve construirt. Demnach wird die Fläche $\mathfrak{S}'$ durch die in sich zurücklaufende Curve $\sigma' + \sigma''$ in zwei getrennte Stücke zerfallen, und zwar in ein *inneres* Stück $\mathfrak{S}_i'$, welches nur von jener Curve begrenzt ist, und in ein *äusseres* Stück $\mathfrak{S}_a'$, welches theils durch die Curve, theils durch den ursprünglichen Rand von $\mathfrak{S}'$ begrenzt ist.

Die Differenz

$$v' - v''$$

ist offenbar nichts Anderes, als das um den Rand des Stückes $\mathfrak{S}_i'$ in positiver Richtung herumlaufende Integral

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx \right);$$

zufolge (7) also gleich *Null*. Somit ergiebt sich:

$$v' = v''.$$

Der Werth, mit welchem das von s auslaufende und in seiner Bewegung auf die Fläche $\mathfrak{S}'$ beschränkte Integral v in irgend einem Punct p eintrifft, ist also unabhängig von der durchlaufenen Bahn, d. h. *allein abhängig von der Lage des Punctes* p. Sind mithin x, y die Coordinaten dieses Punctes, so wird v eine Function von x, y sein, welche *innerhalb* $\mathfrak{S}'$ *überall eindeutig* ist.

Es lässt sich nun auch leicht zeigen, dass der Werth dieser Function sich *stetig* ändert, sobald der Punct p oder x, y in irgend welche Bewegung versetzt wird.

Der Punct p habe augenblicklich auf der Fläche $\mathfrak{S}'$ irgend welche beliebige Lage p_0. Wir lassen ihn von hier aus auf beliebigem Wege fortrücken, bis er in eine benachbarte Lage p_1

gelangt. Während dieser Bewegung wird das Integral v einen Zuwachs erhalten, welcher gleich

(9) $$\int_{p_0}^{p_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\right)$$

ist. Denken wir uns um die Puncte p_0, p_1 herum ein kleines Flächenstück $\mathfrak{J}$ abgegrenzt, und bezeichnen wir die beiden Bilder, welche dieses Flächenstück in seinem ursprünglichen und in seinem natürlichen Zustande darbietet, mit

$$(\mathfrak{J},\ x,\ y,\ p_0,\ p_1,\ u)$$

und mit

$$(\mathfrak{E},\ \xi,\ \eta,\ \pi_0,\ \pi_1,\ u),$$

so wird das Integral (9) von gleichem Werth sein mit folgendem Integral (vergl. S. 26):

(10) $$\int_{\pi_0}^{\pi_1}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\,d\eta - \frac{\partial u}{\partial \eta}\,d\xi\right).$$

Dieses letztere hat seine Bahn auf der Elementarfläche $\mathfrak{E}$, hat nämlich zur Bahn diejenige Linie $\pi_0 \ldots \pi_1$, welche auf $\mathfrak{E}$ mit der Linie $p_0 \ldots p_1$ correspondirt. Nun sind $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, weil u die Eigenschaften I, II besitzt, auf $\mathfrak{E}$ überall stetig, mithin auch überall endlich. Das Integral (10) wird daher, falls π_1 unendlich nahe an π_0 liegt, unendlich klein sein. Demnach wird Analoges von dem gleichwerthigen Integral (9) gelten; dasselbe wird unendlich klein sein, sobald p_1 unendlich nahe an p_0 liegt. Mit andern Worten: Das Integral v wird bei einer unendlich kleinen Verrückung des Punctes p jederzeit einen unendlich kleinen Zuwachs erhalten; während sich also der Punct p beliebig bewegt, wird sich der Werth von v Schritt für Schritt auf stetige Weise ändern.

Wir gelangen somit zu folgendem Ausspruch:

(11) . . . *Das von einem festen Punct s auslaufende und in seiner Bewegung auf die einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{S}'$ beschränkte Integral*

$$v = K + \int_{s}^{p}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\right)$$

repräsentirt, falls man unter x, y die Coordinaten des Punctes p versteht, eine von x, y abhängende Function, welche innerhalb $\mathfrak{S}'$ überall eindeutig und stetig ist.

Die Schnitte L, durch welche $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}'$ verwandelt wurde, werden zusammengenommen irgend welches Netz von Schnitten bilden. Dieses Netz wird sich zerlegen lassen in einzelne Schnittstrecken, von welchen jede für sich allein betrachtet unverzweigt ist. Es sei l irgend eine derartige Schnittstrecke; ferner mögen α_1, α_2 irgend zwei Puncte sein, die zu beiden Ufern von l einander gegenüberliegen; und endlich mag β_1, β_2 ein anderes Paar solcher Puncte vorstellen.

Wir bezeichnen die Werthe, welche die eindeutige Function v in diesen Puncten annimmt, mit $v(\alpha_1)$, $v(\alpha_2)$, $v(\beta_1)$, $v(\beta_2)$. Wenn α_1 und β_1 beide auf demselben Ufer von l sich befinden, so wird sich von dem festen Puncte ε aus eine zuerst nach α_1 und dann von hier aus längs l nach β_1 laufende Curve ziehen lassen, welche ihrem ganzen Laufe nach innerhalb $\mathfrak{S}'$ bleibt, welche nämlich das Schnittnetz nirgends überschreitet. $v(\alpha_1)$ wird alsdann derjenige Werth sein, mit welchem das von ε aus, dieser Curve entlang laufende Integral v in α_1 eintrifft; und $v(\beta_1)$ derjenige, mit welchem das Integral bei noch weiterem Fortlaufen auf der genannten Curve im Punct β_1 anlangt. Somit ergiebt sich:

$$(12) \qquad v(\beta_1) - v(\alpha_1) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx \right),$$

wo die Integration von α_1 bis β_1 längs jener Curve, d. h. längs der Schnittstrecke l fortschreitet; denn jene Curve sollte auf ihrem Wege von α_1 nach β_1 mit der Schnittstrecke l zusammenfallen. In gleicher Weise wird sich offenbar ergeben:

$$(13) \qquad v(\beta_2) - v(\alpha_2) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx \right),$$

wo die Integrationen von α_2 bis β_2 wiederum längs l, aber auf dem andern Ufer von l fortläuft.

Auf der noch unversehrten Fläche $\mathfrak{S}$ besass u die Eigenschaften I, II. Demnach wird der Werth von u in je zwei Puncten, welche zu beiden Ufern der Schnittstrecke l einander gegen-

über liegen, ein und derselbe sein. Die beiden Integrale in (12) und (13) sind daher von gleichem Werth. Folglich:

$$v(\beta_1) - v(\alpha_1) = v(\beta_2) - v(\alpha_2),$$

oder was desselbe ist:

$$(14) \qquad v(\alpha_2) - v(\alpha_1) = v(\beta_2) - v(\beta_1).$$

Hieraus folgt, dass v zu beiden Ufern der Schnittstrecke l Werthe besitzt, deren Differenz längs der Schnittstrecke hin überall gleich gross ist.

Es bleiben schliesslich in Betreff der Function v noch einige einfache Bemerkungen übrig.

Zuvörderst: die Function v enthält eine willkührliche Constante K. Diese Constante wird also der Art bestimmt werden können, dass die Function v in irgend einem Punct der Fläche $\mathfrak{S}'$ einen vorgeschriebenen Werth annimmt.

Ferner: Aus (11) folgt:

$$dv = \frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx;$$

und hieraus ergiebt sich:

$$(15) \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass das Binom $u + iv$ nicht von x, y, sondern nur von $x + iy$ abhängig ist.

An den vorhergehenden Satz (S. 33) lehnt sich demnach ein anderer Satz an, welcher, wenn wir alles seitdem Bemerkte zusammenfassen, so lautet:

Zweites Theorem.

Versteht man unter $\mathfrak{S}$ einen ganz beliebigen Theil einer Riemann'schen Kugelfläche, und sind x, y die zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Puncte, so wird sich auf $\mathfrak{S}$ jederzeit eine von $x + iy$ abhängende Function $u + iv$ ausbreiten lassen, welche daselbst, abgesehen von gewissen rein imaginären Werthdifferenzen, überall stetig ist, und deren reeller Theil u am Rande von $\mathfrak{S}$ gegebene Werthe besitzt.

Denkt man sich nämlich die Fläche $\mathfrak{S}$ durch irgend welche Schnitte L in eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{S}'$ verwandelt, so wird eine von $x + iy$ abhängende Function $u + iv$ existiren, welche folgende Bedingungen erfüllt:

1. *$u + iv$ ist auf der unversehrten Fläche $\mathfrak{S}$ überall ein-*

deutig, und mit Ausnahme der Linien L daselbst auch überall stetig, in den Linien L aber mit constanten und zwar rein imaginären Werthdifferenzen behaftet.

2. *u hat am Rande von $\mathfrak{S}$ beliebig gegebene Werthe.*

3. *v besitzt in irgend einem einzelnen Punct von $\mathfrak{S}$ einen vorgeschriebenen Werth.*

Zusatz. Es existirt nur eine einzige Function $u + iv$, welche diese Bedingungen erfüllt.

Um die Richtigkeit des angehängten Zusatzes zu erweisen, wollen wir einstweilen annehmen, es existirten zwei Functionen $u + iv$ und $u_1 + iv_1$, welche den gestellten Bedingungen Genüge leisten. Wir bilden die Differenz

$$(16) \qquad (u + iv) - (u_1 + iv_1) = \omega + i\vartheta.$$

Der Rand der einfach zusammenhängenden Fläche $\mathfrak{S}'$ wird gebildet von zwei Arten von Linien, von den Linien l, und von den Linien r. Wir verstehen nämlich unter l jede zu dem Schnittsystem L gehörige unverzweigte Schnittstrecke, andererseits unter r jede Linie, die zum Rande der noch unversehrten Fläche $\mathfrak{S}$ gehört. In Bezug auf die einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{S}'$ wird nun die Differenz $\omega + i\vartheta$ folgende Eigenschaften besitzen:

1. $\omega + i\vartheta$ ist eine von $x + iy$ abhängende Function, welche innerhalb $\mathfrak{S}'$ überall eindeutig und stetig ist.

2. ω ist in jeder Linie r gleich 0. Ferner besitzt $\omega + i\vartheta$ zu beiden Seiten einer jeden Linie l Werthe, deren Differenz der Linie entlang constant und rein imaginär ist.

3. ϑ besitzt in irgend einem einzelnen Punct von $\mathfrak{S}'$ den Werth 0.

Wir betrachten das in positiver Richtung um den Rand von $\mathfrak{S}'$ herumlaufende Integral

$$(17) \qquad \int_{\mathfrak{S}'} \omega\, d\vartheta.$$

Bei einer positiven Umlaufung der Fläche $\mathfrak{S}'$ wird jede Linie r einmal, andrerseits jede Linie l zweimal und zwar in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen. Zerlegen wir demnach das Integral (17) den Linien r und l entsprechend in einzelne Theile, so wird der zu r gehörige Theil lauten:

$$(18) \qquad \int\limits_{r} \omega\, d\vartheta,$$

der zu l gehörige Theil hingegen folgende Gestalt haben:

$$(19) \qquad \int\limits_{l} (\omega_1\, d\vartheta_1 - \omega_2\, d\vartheta_2).$$

Die Integrationen sind hier respective längs r und längs l hinerstreckt zu denken. Ferner sind unter ω_1, ϑ_1 diejenigen Werthe zu verstehen, welche die Functionen ω, ϑ auf der einen Seite von l besitzen, und unter ω_2, ϑ_2 diejenigen, welche dieselben auf der andern Seite von l haben.

Zufolge der 2. Eigenschaft ist ω in der Linie r gleich 0. Demnach ist der Integraltheil (18) ebenfalls gleich 0.

Zufolge der 2. Eigenschaft ist ferner, was den Integraltheil (19) anbelangt:

$$\omega_1 = \omega_2, \qquad \vartheta_1 = \vartheta_2 + \text{Const.},$$

mithin:

$$\omega_1 = \omega_2, \qquad d\vartheta_1 = d\vartheta_2.$$

Demnach ist der Integraltheil (19) ebenfalls gleich 0.

Wir sehen also, dass das Integral (17) aus einzelnen Theilen besteht, die sämmtlich gleich 0 sind; und erhalten daher die Formel:

$$(20) \qquad \int\limits_{\mathfrak{S}'} \omega\, d\vartheta = 0.$$

Beachtet man diese Formel, und beachtet man ferner, dass $\omega + i\vartheta$ innerhalb $\mathfrak{S}'$ überall eindeutig und stetig ist, so ergiebt sich zufolge eines bekannten Satzes (Vorl. S. 278) augenblicklich, dass der Werth von $\omega + i\vartheta$ auf $\mathfrak{S}'$ allenthalben constant ist. Dieser constante Werth kann aber, weil ω in den Linien r gleich 0, und ϑ in einem einzelnen Punct der Fläche gleich 0 ist, kein anderer als der Werth 0 sein.

Somit haben wir nachgewiesen, dass die Differenz $\omega + i\vartheta$ nothwendigerweise $= 0$ ist; mit andern Worten, dass immer nur eine einzige Function $u + iv$ existiren kann, welche die in dem Theorem angegebenen Eigenschaften besitzt.

Vierter Abschnitt. Functionen von $x + iy$, welche auf einer Riemann'schen Kugelfläche mit vorgeschriebenen linearen Unstetigkeiten behaftet sein sollen.

Es sei $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene Riemann'sche Kugelfläche. Wir führen auf derselben irgend einen in sich zurücklaufenden Schnitt λ aus, durch welchen die Fläche nicht in getrennte Stücke zerfällt. Die beiden Ufer des Schnittes λ mögen bezeichnet werden mit λ_1 und λ_2. Alsdann wird sich die Fläche $\mathfrak{R}$ durch Ausführung jenes Schnittes in eine Fläche $\mathfrak{S}$ verwandeln, welche zwei Randcurven besitzt, nämlich die Curven λ_1 und λ_2.

Wir denken uns nun auf der Fläche $\mathfrak{S}$ eine von x, y auf reelle Weise abhängende Function U ausgebreitet, welche am Rande von $\mathfrak{S}$, d. i. in den Curven λ_1 und λ_2 gegebene Werthe besitzt, und welche ferner im Innern von $\mathfrak{S}$ folgende Eigenschaften hat:

I. Die Function U ist sammt ihren natürlichen Ableitungen innerhalb $\mathfrak{S}$ überall stetig.

II. Der Ausdruck $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ ist innerhalb $\mathfrak{S}$ überall $= 0$.

Eine solche Function wird, mögen nun die gegebenen Randwerthe beschaffen sein, wie sie wollen, jederzeit existiren (Satz Seite 33).

Längs der Curve λ denken wir uns eine reelle und stetig zusammenhängende Werthenreihe F aufgepflanzt. Diese Werthenreihe F soll die auf dem einen Ufer von λ gegebenen Randwerthe repräsentiren; und gleichzeitig soll die Werthenreihe $F + C$ diejenigen Randwerthe darstellen, welche für das andere Ufer von λ gegeben; dabei soll unter C eine gegebene reelle Constante verstanden werden.

Wir bezeichnen nämlich die Randwerthe der Function U auf den Curven λ_1 und λ_2 respective mit U_1 und U_2, und setzen fest, dass

$$\begin{aligned} \text{längs } \lambda_1: \quad & U_1 = F, \\ \text{längs } \lambda_2: \quad & U_2 = F + C \end{aligned}$$

sein soll.

Die Constante C mag unveränderlich gegeben sein. Die Werthenreihe F hingegen mag von veränderlicher Gestalt, und

nur der einen Bedingung unterworfen sein, dass ihre Werthe längs λ stetig mit einander zusammenhängen sollen. Die Function U ist gebunden an die durch F dargestellten Randbedingungen; ändert sich also F, so wird sich gleichzeitig auch U ändern.

Es mögen durch $F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}, \ldots$ alle überhaupt denkbaren Gestalten angedeutet sein, deren die Werthenreihe F fähig ist; und gleichzeitig mögen durch $U^{(1)}, U^{(2)}, U^{(3)}, \ldots$ die zugehörigen Gestalten von U repräsentirt sein. Unter all diesen verschiedenen Gestalten der Function U wird dann eine existiren, für welche das Integral

$$(1) \qquad \iint_{\mathfrak{S}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

oder

$$(1\text{ a.}) \qquad \mathit{\Pi}_{\mathfrak{S}}(U)$$

am kleinsten ist. Diese specielle Gestalt von U mag mit u, und gleichzeitig mag die derselben zugehörige specielle Gestalt von F mit f bezeichnet werden.

Unsere Absicht ist, die in solcher Weise bestimmte Function u einer näheren Untersuchung zu unterwerfen.

(2) . . . *Dabei wird festzuhalten sein, dass die Functionen u und U am Rande von $\mathfrak{R}'$ folgende Werthe haben:*

$$\text{längs } \lambda_1: \quad u_1 = f, \qquad U_1 = F,$$
$$\text{längs } \lambda_2: \quad u_2 = f + C, \quad U_2 = F + C;$$

ferner, dass u und U innerhalb $\mathfrak{R}'$ die vorhin genannten Eigenschaften I, II *besitzen.*

Setzen wir für den Augenblick $U = u + \delta$, so verwandelt sich das Integral (1) in

$$\mathit{\Pi}_{\mathfrak{S}}(u+\delta) = \mathit{\Pi}_{\mathfrak{S}}(u) + \mathit{\Pi}_{\mathfrak{S}}(\delta) + \\ + 2\iint_{\mathfrak{S}} \left\{ \frac{\partial \delta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \right\} dx\, dy.$$

Wir erhalten demnach, wenn wir für δ seine eigentliche Bedeutung $U - u$ restituiren, die Formel

$$(3) \qquad \mathit{\Pi}_{\mathfrak{S}}(U) = \mathit{\Pi}_{\mathfrak{S}}(u) + \mathit{\Pi}_{\mathfrak{S}}(U-u) + 2\, T_{\mathfrak{S}},$$

wo das letzte Glied folgenden Werth besitzt:

$$(4) \qquad T_{\mathfrak{S}} = \iint_{\mathfrak{S}} \left\{ \frac{\partial (U-u)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (U-u)}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} dx\,dy.$$

Dieses letztere Integral lässt sich verwandeln in ein **Rand-Integral**; in folgender Weise:

Wir zerlegen die Fläche $\mathfrak{S}$ durch irgend welche Schnitte in einzelne Schnitte $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3, \ldots,$ von welchen jedes durch stetige Umformung in seinen natürlichen Zustand versetzt werden kann. Das Integral (4) verwandelt sich dann zunächst in eine Summe von Integralen, nämlich:

$$(5) \qquad T_{\mathfrak{S}} = T_{\mathfrak{J}_1} + T_{\mathfrak{J}_2} + T_{\mathfrak{J}_3} + \ldots$$

Das über $\mathfrak{J}_\varkappa$ hinerstreckte Integral

$$(6) \qquad T_{\mathfrak{J}_\varkappa} = \iint_{\mathfrak{J}_\varkappa} \left\{ \frac{\partial (U-u)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (U-u)}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} dx\,dy$$

ist eine Invariante, also von gleichem Werth mit folgendem Integral

$$(7) \qquad \iint_{\mathfrak{E}_\varkappa} \left\{ \frac{\partial (U-u)}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial (U-u)}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\} d\xi\,d\eta,$$

wo unter $\mathfrak{E}_\varkappa$ diejenige Elementarfläche zu verstehen ist, durch welche der natürliche Zustand von $\mathfrak{J}_\varkappa$ dargestellt wird. Nun ist identisch:

$$\frac{\partial (U-u)}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(U-u) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] - (U-u) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial (U-u)}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(U-u) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] - (U-u) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Das Integral (7) geht daher über in:

$$(8) \qquad \iint_{\mathfrak{E}_\varkappa} \left\{ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \right) - (U-u) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \right\} d\xi\,d\eta,$$

wo α und β zur Abkürzung gesetzt sind für folgende Ausdrücke:

$$\alpha = (U-u) \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\beta = (U-u) \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

U und u sind Functionen, welche auf der Fläche $\mathfrak{N}'$ die Eigenschaften I, II besitzen. Demnach werden die Functionen U, u und ebenso auch ihre natürlichen Ableitungen

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

auf der Elementarfläche $\mathfrak{E}_\varkappa$ überall stetig sein; gleiches wird mithin auch von den Grössen α, β gelten. Ferner wird $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, und ebenso $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ auf $\mathfrak{E}_\varkappa$ überall $= 0$ sein. Das Integral (8) reducirt sich daher zunächst auf

$$(9) \qquad \iint_{\mathfrak{E}_\varkappa} \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \right\} d\xi\, d\eta,$$

und verwandelt sich sodann nach bekanntem Satz (Vorl. S. 59) in folgendes Rand-Integral:

$$(10) \qquad -\int_{\mathfrak{E}_\varkappa} \left(\alpha \frac{d\xi}{d\nu} + \beta \frac{d\eta}{d\nu} \right) d\sigma.$$

Hier ist $d\sigma$ ein Element der Randlinie von $\mathfrak{E}_\varkappa$, und ν die auf $d\sigma$ errichtete innere Normale. Substituirt man für α, β ihre eigentlichen Bedeutungen, so gewinnt das letztgenannte Integral folgendes Aussehen:

$$(11) \qquad -\int_{\mathfrak{E}_\varkappa} (U - u) \frac{du}{d\nu}\, d\sigma.$$

Dieses Integral ist aber eine Invariante, also von gleichem Werth mit folgendem:

$$(12) \qquad -\int_{\mathfrak{I}_\varkappa} (U - u) \frac{du}{dn}\, ds.$$

Wir erhalten demnach:

$$(13) \qquad T_{\mathfrak{I}_\varkappa} = -\int_{\mathfrak{I}_\varkappa} (U - u) \frac{du}{dn}\, ds.$$

Aehnliche Werthe ergeben sich natürlich für sämmtliche Integrale $T_{\mathfrak{I}_1}$, $T_{\mathfrak{I}_2}$, $T_{\mathfrak{I}_3}$, ... Substituirt man diese Werthe in die Formel (5), so erhält man schliesslich:

$$(14)\qquad \underset{\mathfrak{S}}{T} = -\int_{\mathfrak{S}} (U-u)\frac{du}{dn}\,ds.$$

Die Integration ist hier über alle Linienelemente ds hinerstreckt zu denken, aus welchen der Rand von $\mathfrak{N}'$ besteht. Daneben ist unter n die auf ds errichtete innere Normale zu verstehen.)

Der Rand von $\mathfrak{S}$ besteht aus zwei Curven, die wir mit λ_1 und λ_2 bezeichnet haben. Demgemäss ist das vorstehende Integral genau genommen ein Aggregat von zwei Integralen; also:

$$(15)\qquad \underset{\mathfrak{S}}{T} = -\int_{\lambda}(U_1-u_1)\frac{du_1}{dn_1}\,ds_1 - \int_{\lambda}(U_2-u_2)\frac{du_2}{dn_2}\,ds_2.$$

Da die beiden Curven λ_1 und λ_2 parallel neben einander herlaufen, so können wir für ds_1 und ds_2 immer je zwei einander gegenüberliegende und gleich grosse Elemente nehmen, so dass $ds_1 = ds_2 = ds$ wird. Ausserdem ist zufolge der angenommenen Randbedingungen:

$$U_1 = F, \qquad u_1 = f,$$
$$U_2 = F + C, \quad u_2 = f + C,$$

mithin:

$$(16)\qquad \begin{aligned} U_1 - u_1 &= F - f,\\ U_2 - u_2 &= F - f. \end{aligned}$$

Demnach verwandelt sich die Formel (15) in:

$$(17)\qquad \underset{\mathfrak{S}}{T} = -\int_{\lambda}(F-f)\left(\frac{du_1}{dn_1}+\frac{du_2}{dn_2}\right)ds.$$

Die Integration ist hinerstreckt über alle Elemente ds der in sich zurücklaufenden Linie λ. Gleichzeitig sind n_1 und n_2 die auf ds in entgegengesetzten Richtungen construirten Normalen.

Die Formel (3) nimmt nun, wenn wir den Werth (17) substituiren, und wenn wir gleichzeitig die Abkürzung einführen:

$$(18)\qquad \frac{du_1}{dn_1}+\frac{du_2}{dn_2} = q$$

folgende Gestalt an:

$$(19)\qquad \underset{\mathfrak{S}}{\Pi}(U) = \underset{\mathfrak{S}}{\Pi}(u) + \underset{\mathfrak{S}}{\Pi}(U-u) - 2\int_{\lambda}(F-f)\,q\,ds.$$

Was die Bedeutung der hier auftretenden Functionen anbelangt, so müssen wir uns daran erinnern, dass f, u, q unveränderliche Functionen sind, dass hingegen F, U Functionen

von veränderlicher Gestalt vorstellen. Ferner müssen wir uns daran erinnern, dass unter sämmtlichen Gestalten, deren die Function U überhaupt fähig ist, u diejenige repräsentirt, für welche das Integral $\iint_{\mathfrak{Z}}$ am kleinsten ist.

Aus der vorstehenden Formel folgt daher, dass der Ausdruck

$$(20) \qquad \iint_{\mathfrak{Z}} (U-u) - 2\int_{\lambda} (F-f)\, q\, ds$$

niemals negativ werden kann.

Die Differenz $U-u$ ist eine Function, welche, ebenso wie U und u selber, auf der Fläche $\mathfrak{Z}$ die Eigenschaften I, II besitzt, und zugleich eine Function, welche, wie aus (16) hervorgeht, am Rande von $\mathfrak{Z}$, d. i. zu beiden Ufern von λ, die Werthe $F-f$ besitzt. Diese Werthe $F-f$ sind aber, weil F beliebig verändert werden kann, ebenfalls veränderlich. Setzen wir daher $U-u=\Omega$ und $F-f=\Phi$, so können wir das eben erhaltene Ergebniss auch so aussprechen:

Denkt man sich längs der in sich zurücklaufenden Linie λ eine stetig zusammenhängende Werthenreihe Φ von beliebig veränderlicher Gestalt aufgepflanzt, und versteht man unter Ω eine auf $\mathfrak{Z}$ ausgebreitete Function, welche zu beiden Ufern von λ die Werthe Φ, und im Innern von $\mathfrak{Z}$ die Eigenschaften I, II *besitzt; so wird der Ausdruck*

$$(21) \qquad \iint_{\mathfrak{Z}} (\Omega) - 2\int_{\lambda} \Phi\, q\, ds$$

niemals negativ sein.

Hieraus aber folgt, dass die in diesem Ausdruck enthaltene Grösse q an allen Stellen der Linie λ gleich 0 ist. Um solches darzuthun, wollen wir einstweilen das Gegentheil annehmen, also von der Hypothese ausgehen, dass die Werthe, welche q auf der Linie λ besitzt, sämmtlich oder zum Theil von 0 verschieden sind. Wir setzen das willkührlich zu wählende Φ gleich φ, und verstehen dabei unter φ eine Werthenreihe, welche entweder mit q identisch, oder wenigstens an allen Stellen der Linie λ mit q von gleichem Vorzeichen ist. Gleichzeitig bezeichnen wir diejenige Gestalt, welche Ω in diesem Fall annimmt, mit ω. Wir treffen sodann zweitens in Bezug auf Φ eine etwas andere Wahl, setzen nämlich Φ gleich $\varkappa\varphi$, wo $\varkappa$ eine beliebige Constante sein

soll; gleichzeitig wird dann Ω, wie leicht zu übersehen ist, die Gestalt $\varkappa\,\omega$ annehmen.

Bei dieser letzten Annahme in Betreff von Φ und Ω verwandelt sich der Ausdruck (21) in:

$$\underset{\mathfrak{S}}{\Pi}(\varkappa\,\omega) - 2\int_\lambda \varkappa\,\varphi\,q\,d\,s,$$

d. i. in:

$$\varkappa^2\,.\,\underset{\mathfrak{S}}{\Pi}(\omega) - 2\,\varkappa\,.\int_\lambda \varphi\,q\,d\,s; \tag{22}$$

und diesen wollen wir abkürzend bezeichnen mit

$$\varkappa^2\,.\,\alpha - 2\,\varkappa\,.\,\beta. \tag{22 a.}$$

Zufolge des vorhin erhaltenen Resultates soll nun dieser Ausdruck, in welchem $\varkappa$ eine ganz willkührliche Constante vorstellt, niemals negativ sein dürfen. Das aber ist nicht der Fall. Der Ausdruck hat z. B. für $\varkappa = \frac{\beta}{\alpha}$ den Werth

$$-\frac{\beta^2}{\alpha}. \tag{23}$$

Und dieser Werth ist negativ; denn α ist gleich $\underset{\mathfrak{S}}{\Pi}(\omega)$, also (der Bedeutung dieses Integrales zufolge) jederzeit positiv, und β ist gleich $\int_\lambda \varphi\,q\,d\,s$, mithin (der über φ gemachten Annahme zufolge) jederzeit von 0 verschieden.

Somit folgt, dass die zu Grunde gelegte Hypothese unrichtig ist, dass also der Werth von q auf der Linie λ nirgends von 0 verschieden sein kann. Erinnern wir uns also an die eigentliche Bedeutung von q (18), so sehen wir, dass längs λ überall die Gleichung stattfindet:

$$\frac{d\,u_1}{d\,n_1} + \frac{d\,u_2}{d\,n_2} = 0. \tag{24}$$

Es sei β irgend ein Punct der Linie λ, und $\alpha\beta\gamma$ eine durch β gelegte und gegen λ senkrechte Linie. Die Puncte α und γ liegen dann zu verschiedenen Seiten der Linie; sie mögen ausserdem dem Punct β unendlich nahe sein. Unter diesen Umständen wird:

$$\frac{du_1}{dn_1} = \frac{u_\gamma - u_\beta}{\beta\gamma},$$
$$\frac{du_2}{dn_2} = \frac{u_\alpha - u_\beta}{\alpha\beta},$$

wo die Nenner $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ beide positiv sind, nämlich die Entfernungen der Puncte α, β, γ darstellen. Die Gleichung (24) geht also über in:

$$(25) \qquad \frac{u_\alpha - u_\beta}{\alpha\beta} + \frac{u_\gamma - u_\beta}{\beta\gamma} = 0,$$

d. i. in:

$$(26) \qquad \frac{u_\beta - u_\alpha}{\alpha\beta} = \frac{u_\gamma - u_\beta}{\beta\gamma}.$$

Bezeichnet man die von α über β nach γ fortlaufende Richtung mit N, so ist $\frac{u_\beta - u_\alpha}{\alpha\beta}$ der Differentialquotient von u nach der Richtung N auf der einen Seite von λ, und $\frac{u_\gamma - u_\beta}{\beta\gamma}$ der Differentialquotient nach ebenderselben Richtung auf der andern Seite von λ. Die Gleichung (26) sagt also, dass der Differentialquotient

$$(27) \qquad \frac{du}{dN}$$

zu beiden Seiten der Linie λ gleiche Werthe hat. Zu einem analogen Resultat gelangen wir, wenn wir an Stelle von N eine Richtung nehmen, die senkrecht gegen N steht, also eine Richtung, die zur Curve λ tangential liegt. Die Werthe von u sind nämlich laut (2) auf dem einen Ufer von λ um die gegebene Constante C grösser als auf dem andern. Sind also α, β zwei auf einander folgende Puncte des einen Ufers von λ, und sind a, b die gegenüberliegenden Puncte des andern Ufers, so ist

$$u_\alpha = u_a + C,$$
$$u_\beta = u_b + C,$$

mithin:

$$u_\beta - u_\alpha = u_b - u_a;$$

also, weil die Entfernung $\alpha\beta$ ebenso gross ist wie die Entfernung ab:

$$(28) \qquad \frac{u_\beta - u_\alpha}{\alpha\beta} = \frac{u_b - u_a}{ab}.$$

Bezeichnet man aber die von α nach β, oder, was dasselbe ist, die von a nach b fortlaufende Richtung mit T, so sagt die vor-

stehende Gleichung, dass der Differentialquotient

$$\frac{du}{dT} \tag{29}$$

zu beiden Seiten von λ einerlei Werthe hat.

Es sei p irgend ein Punct der Linie λ. Durch den Punct p denken wir uns drei Richtungen gelegt: erstens die tangentiale Richtung T, zweitens die normale Richtung N, und drittens endlich eine beliebige Richtung R; diese letztere mag mit T den Winkel α, und mit N den Winkel β bilden. Bekanntlich gilt dann (vergl. Vorl. S. 49—53) folgende Formel:

$$\frac{du}{dR} = \frac{du}{dT}\cos\alpha + \frac{du}{dN}\cos\beta. \tag{30}$$

Die Grössen $\frac{du}{dT}$ und $\frac{du}{dN}$ haben, wie sich vorhin zeigte, zu beiden Seiten von λ einerlei Werthe. Gleiches wird demnach, dieser Formel zufolge, auch gelten von der Grösse $\frac{du}{dR}$. Also:

Versteht man unter R irgend welche, die Linie λ unter beliebigem Winkel durchschneidende Richtung, so ist der Differentialquotient

$$\frac{du}{dR}$$

auf der einen Seite von λ jederzeit ebenso gross wie auf der andern.

Nimmt man für R eine Richtung, welche mit der x Achse oder mit der y Achse parallel läuft, so verwandelt sich bekanntlich der Differentialquotient $\frac{du}{dR}$ in den Differentialquotient $\frac{\partial u}{\partial x}$ oder in den Differentialquotient $\frac{\partial u}{\partial y}$. Diese beiden letztern werden demnach ebenfalls auf beiden Seiten von λ einerlei Werthe besitzen.

Die Werthe, welche $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ zu beiden Seiten von λ besitzen, hängen also in der Linie λ stetig mit einander zusammen. Mit andern Worten: In der Linie λ findet eine Unterbrechung statt in der Stetigkeit der Function u selber, nicht aber in der Stetigkeit ihrer Ableitungen.

Fügen wir dies Ergebniss zu Demjenigen hinzu, was uns bereits von früher (2) über die Function u bekannt war, so haben wir folgenden Satz:

Sind x, y die zu irgend einer Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ gehörigen Puncte, ist ferner λ eine auf dieser Fläche gegebene in sich zurücklaufende Linie, und versteht man endlich unter C eine gegebene reelle Constante, so wird sich jederzeit auf der Fläche $\mathfrak{R}$ eine von x, y auf reelle Weise abhängende Function u ausbreiten lassen, deren Werthe auf der einen Seite von λ um C grösser sind als auf der anderen, deren Ableitungen hingegen zu beiden Seiten von λ gleich gross sind, und welche ausserdem folgende Eigenschaften besitzt:

I. *Die Function u ist sammt ihren natürlichen Ableitungen auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall stetig, abgesehen von der schon erwähnten in λ vorhandenen Unstetigkeit.*

II. *Der Ausdruck $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ist auf $\mathfrak{R}$ überall $= 0$.*

Wir haben diesen Satz im Vorhergehenden eigentlich nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass die Fläche $\mathfrak{R}$ durch die Linie λ nicht in getrennte Stücke zerfällt. Es geschah das nur der Einfachheit willen; man übersieht leicht, dass man auch dann zu diesem Satze gelangen wird, wenn eine Zerstückelung stattfindet, und zwar auf ganz ähnlichem Wege, wie in dem hier betrachtetem Fall. Der Satz hat also allgemeine Gültigkeit.

Wir gehen in der begonnenen Untersuchung weiter vorwärts; $\mathfrak{R}$, λ, u sollen dieselben Bedeutungen behalten, wie bisher.

Mit Ausnahme der Linie λ ist die Function u sammt ihren natürlichen Ableitungen auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall stetig. An der Linie λ findet aber nur in den Werthen der Function u selber, nicht in denen ihrer Ableitungen eine Stetigkeitsunterbrechung statt; denn wir wissen, dass die Ableitungen zu beiden Seiten von λ gleiche Werthe besitzen. Die natürlichen Ableitungen von u sind demnach auf der Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben stetig. Ferner ist bekannt, dass der Ausdruck

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

auf der Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben $= 0$ ist.

Es sei $\mathfrak{J}$ irgend ein Stück der Fläche $\mathfrak{R}$, von solcher Beschaffenheit, dass es durch stetige Umformung in seinen natürlichen Zustand versetzt werden kann. Das in positiver Richtung um den Rand von $\mathfrak{J}$ herumerstreckte Integral

(1)
$$\int_{\mathfrak{J}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right)$$

ist eine Invariante, also von gleichem Werth mit folgendem Integral

(2)
$$\int_{\mathfrak{G}} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial u}{\partial \eta} d\xi \right).$$

Hier repräsentirt $\mathfrak{G}$ diejenige Elementarfläche, durch welche der natürliche Zustand von $\mathfrak{J}$ dargestellt wird. Da $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, folglich auch $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ überall $= 0$ sind, so ist der unter dem Integralzeichen befindliche Ausdruck

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial u}{\partial \eta} d\xi$$

ein vollständiges Differential. Beachtet man ausserdem, dass die natürlichen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ überall stetig sind, so ergiebt sich (vergl. Vorl. S. 70) sofort, dass das um die Elementarfläche $\mathfrak{G}$ herumlaufende Integral (2) verschwindet, und dass also das Integral (1) ebenfalls verschwindet. Also:

(3)
$$\int_{\mathfrak{J}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) = 0.$$

Denken wir uns nun ein ganz beliebiges Stück der Fläche $\mathfrak{R}$, so wird dieses jederzeit in kleinere Stücke zerlegt werden können, von denen jedes für sich allein betrachtet durch stetige Umformung in seinen natürlichen Zustand versetzt werden kann. Für jedes dieser kleineren Stücke wird also die Formel (3) Gültigkeit besitzen. Demnach wird sie, wie sich durch Addition der so entstehenden Formeln unmittelbar ergiebt, auch Gültigkeit besitzen für das ganze Flächenstück. Also:

(4) . . . *Betrachtet man irgend welches Stück der Fläche $\mathfrak{R}$, so wird das in positiver Richtung um den Rand dieses Flächenstücks herumlaufende Integral*

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right)$$

jederzeit $= 0$ sein.

Wir verwandeln nun die Fläche $\mathfrak{R}$ durch Ausführung irgend welcher Schnitte L in eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$.

Ob die Schnitte L mit der Linie λ sich durchkreuzen oder nicht, soll ganz gleichgültig sein. Die Linie λ selber soll eben nur als eine auf der Fläche fortlaufende Linie, nicht aber als ein Schnitt angesehen werden. Das von einem festen Punct s auslaufende und in seiner Bewegung auf die einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ beschränkte Integral

$$(5) \qquad v = \int_s^p \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right)$$

wird alsdann, wie sich mit Hülfe von (4) leicht nachweisen lässt (vergl. S. 35 — 37), in jedem gegebenen Punct p immer nur einen Werth besitzen. Es wird also dieses Integral v, wenn man die Coordinaten des Punctes p mit x, y bezeichnet, eine Function von x, y sein, die innerhalb $\mathfrak{R}'$ überall eindeutig ist.

Ferner wird sich (vergl. wiederum S. 35—37) nachweisen lassen, dass diese von x, y abhängende Function v auf der Fläche $\mathfrak{R}'$ überall stetig bleibt, und dass sie in jedem der Schnitte L mit einer constanten Werthdifferenz behaftet ist.

Endlich ergiebt sich aus (5):

$$(6) \qquad dv = \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx,$$

mithin:

$$(7) \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Hieraus folgt, dass $u + iv$ eine Function von $x + iy$ ist. Der zuletzt gefundene Satz (S. 51) führt demnach, wenn wir alles seitdem Bemerkte zusammenfassen, zu folgendem Theorem:

Drittes Theorem.

Sind x, y die Puncte einer beliebig gegebenen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$, ist ferner λ eine auf $\mathfrak{R}$ gegebene in sich zurücklaufende Linie, und ist endlich C eine gegebene reelle Constante, so existirt jederzeit eine die ganze Fläche $\mathfrak{R}$ bedeckende, von $x + iy$ abhängende Function $u + iv$, welche längs der Linie λ die Werthdifferenz C besitzt, welche sonst aber, abgesehen von gewissen rein imaginären Werthdifferenzen, auf $\mathfrak{R}$ allenthalben stetig ist.

Denkt man sich nämlich die Fläche $\mathfrak{R}$ durch irgend welche Schnitte L in eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ verwandelt, so wird eine von $x + iy$ abhängende Function $u + iv$ existiren, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. *Die Function $u + iv$ ist auf der unversehrten Fläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutig, und mit Ausnahme der Linien λ und L daselbst auch überall stetig.*

2. *In der Linie λ besitzt sie die gegebene reelle Werthdifferenz C.*

3. *In den Linien L ist sie mit irgend welchen constanten und zwar rein imaginären Werthdifferenzen behaftet.*

4. *Sie besitzt in irgend einem einzelnen Punct der Fläche $\mathfrak{R}$ einen vorgeschriebenen Werth.*

Zusatz. Es existirt nur eine einzige Function $u + iv$, welche diese Bedingungen erfüllt.

Dass eine den Bedingungen 1, 2, 3 genügende Function existiren muss, folgt unmittelbar aus der vorhergehenden Untersuchung. Ist aber eine solche Function gefunden, und bezeichnet man dieselbe mit $u + iv$, so wird

$$u + iv + \text{Const.}$$

eine Function sein, welche jenen Bedingungen 1, 2, 3 ebenfalls Genüge leistet. Und gleichzeitig wird man die in dieser letztern Function enthaltene additive Constante so bestimmen können, dass auch der Bedingung 4 Genüge geschieht.

Es unterliegt demnach keinem weiteren Zweifel, dass eine die Bedingungen 1, 2, 3, 4 erfüllende Function wirklich existiren muss.

Zu beweisen bleibt hingegen noch, dass immer nur eine einzige Function existirt, welche jenen vier Bedingungen entspricht. Wir nehmen einstweilen an, es existirten zwei solche Functionen $u + iv$ und $u_1 + iv_1$. Die Differenz

$$(u + iv) - (u_1 + iv_1) = \omega + i\vartheta$$

wird dann, wenn wir die einzelnen unverzweigten Schnittstrecken, aus welchen das Schnittsystem L besteht, mit l bezeichnen, folgende Eigenschaften haben:

1. $\omega + i\vartheta$ ist eine von $x + iy$ abhängende Function, welche innerhalb der einfach zusammenhängenden Fläche $\mathfrak{R}'$ überall eindeutig und stetig ist.

2. $\omega + i\vartheta$ besitzt zu beiden Seiten einer jeden Linie l Werthe, deren Differenz der Linie entlang constant und rein imaginär ist.

3. $\omega + i\vartheta$ ist in irgend einem einzelnen Punct der Fläche $\mathfrak{R}'$ gleich 0.

Das in positiver Richtung um $\mathfrak{R}'$ herumlaufende Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{R}'} \omega\, d\vartheta$$

kann, da der Rand von $\mathfrak{R}'$ durch die Ufer der Linien l repräsentirt wird, diesen Linien l entsprechend in einzelne Theile zerlegt werden. Der einer jeden Linie l entsprechende Theil wird, wenn man die Werthe von ω, ϑ auf dem einen Ufer von l mit ω_1, ϑ_1, auf dem andern mit ω_2, ϑ_2 bezeichnet, folgendermassen lauten:

$$\int\limits_{l} (\omega_1\, d\vartheta_1 - \omega_2\, d\vartheta_2).$$

Da nun zufolge der 2. Eigenschaft $\omega_1 = \omega_2$ und $d\vartheta_1 = d\vartheta_2$ ist, so ergiebt sich, dass jeder solcher Theil den Werth 0 hat, dass also das Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{R}'} \omega\, d\vartheta$$

ebenfalls $= 0$ ist. Und hieraus ergiebt sich dann weiter (ähnlich wie früher S. 41), dass $\omega + i\vartheta = 0$ ist, dass also immer nur *eine einzige* Function $u + iv$ existiren kann, welche den im vorstehenden Theorem gestellten Bedingungen Genüge leistet.

Fünfter Abschnitt. Functionen von $x + iy$, welche auf einer Riemann'schen Kugelfläche mit Unstetigkeiten behaftet sein sollen, die durch eine willkührlich gegebene ebenfalls von $x + iy$ abhängende Function vorgeschrieben sind.

Wiederum sei $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene Riemann'sche Kugelfläche; und gleichzeitig seien x, y die Coordinaten der ihr zugehörigen Puncte.

Wir wenden uns zur Betrachtung von Functionen, welche

auf dieser Fläche mit vorgeschriebenen Unstetigkeiten behaftet sind, und unterscheiden demgemäss zwei Theile der Fläche, denjenigen, auf welchem die Function stetig ist, und denjenigen, welcher die vorgeschriebenen Unstetigkeiten enthält; den ersteren nennen wir $\mathfrak{S}$, den letzteren $\mathfrak{T}$.

Um die Vorstellung zu fixiren, denken wir uns auf der Fläche $\mathfrak{R}$ eine in sich zurücklaufende Linie λ, durch welche die Fläche in zwei völlig getrennte Stücke zerfällt; das eine von diesen Stücken soll den Flächentheil $\mathfrak{S}$, das andere den Flächentheil $\mathfrak{T}$ repräsentiren.

Ferner denken wir uns eine von $x + iy$ abhängende Function, welche nur für den Flächentheil $\mathfrak{T}$ gegeben ist, und deren Werthe auf diesem Flächentheil mit irgend welchen Unstetigkeiten behaftet sind. Ob diese Unstetigkeiten punctueller oder linearer Natur sind, ob sie nur die Function selber, oder ob sie gleichzeitig auch die Ableitungen derselben betreffen, ist gleichgültig. Wir bezeichnen jene Function mit $A_{\mathfrak{T}} + iB_{\mathfrak{T}}$, und haben also unter $A_{\mathfrak{T}}$ und $B_{\mathfrak{T}}$ zwei von x, y abhängende reelle Functionen zu verstehen, deren Werthe ebenfalls nur innerhalb $\mathfrak{T}$ gegeben sind.

Die vorgeschriebenen Unstetigkeiten sollen nun, je nachdem von imaginären oder reellen Functionen die Rede sein wird, entweder diejenigen sein, welche die Function $A_{\mathfrak{T}} + iB_{\mathfrak{T}}$ besitzt, oder diejenigen, mit welchen die Functionen $A_{\mathfrak{T}}$ und $B_{\mathfrak{T}}$ behaftet sind. Der Einfachheit willen nehmen wir an, dass keine von diesen Unstetigkeiten hart am Rande von $\mathfrak{T}$ liegt, oder hart an jenen Rand hinanreicht. Ebenso nehmen wir an, dass hart am Rande von $\mathfrak{T}$ auch kein Windungspunct vorhanden ist. Es wird dabei kaum nöthig sein zu bemerken, dass der Rand von $\mathfrak{T}$, ebenso wie der von $\mathfrak{S}$, durch die in sich zurücklaufende Linie λ repräsentirt ist.

Durch Fortsetzung der gegebenen Function $B_{\mathfrak{T}}$ über den Rand von $\mathfrak{T}$ hinaus können wir uns leicht eine Function verschaffen, welche sammt ihren natürlichen Ableitungen auf der ganzen Fläche $\mathfrak{R}$ überall stetig ist, abgesehen von den innerhalb $\mathfrak{T}$ befindlichen Unstetigkeiten. Eine solche Fortsetzung wird offenbar auf unendlich viele Arten bewerkstelligt werden können. Wir

nehmen an, dass eine bestimmte Wahl getroffen sei, und betrachten die durch diese Fortsetzung entstandene Function fortan als unveränderlich. $B_{\mathfrak{T}}$ selber ist dann der ursprünglich gegebene, das Flächenstück $\mathfrak{T}$ bedeckende Theil dieser Function; der neuentstandene, das Flächenstück $\mathfrak{S}$ bedeckende Theil mag mit $B_{\mathfrak{S}}$, und beide Theile zusammengenommen mögen kurzweg mit B bezeichnet werden.

Die Function $A_{\mathfrak{T}}$ ist ausgebreitet auf dem Flächentheil $\mathfrak{T}$, und erstreckt sich bis zum Rande dieses Flächentheiles, d. i. bis zur Linie λ hin. Zufolge des Satzes Seite 33 wird sich auf dem andern Flächentheile, nämlich auf $\mathfrak{S}$ eine von x, y abhängende reelle Function ausbreiten lassen, welche am Rande von $\mathfrak{S}$ gleichwerthig ist mit $A_{\mathfrak{T}}$, und welche im Innern von $\mathfrak{S}$ folgende Eigenschaften besitzt:

I. Die Function ist sammt ihren natürlichen Ableitungen stetig.

II. Sie leistet der Gleichung $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$ Genüge.

Wir denken uns diese Function wirklich gebildet, und bezeichnen sie mit $A_{\mathfrak{S}}$. Die Functionen $A_{\mathfrak{T}}$ und $A_{\mathfrak{S}}$ besitzen auf der Grenze von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}$ gleiche Werthe. Demnach wird es zweckmässig sein, beide Functionen zusammengenommen als eine einzige Function A zu betrachten, von welcher die ganze Fläche $\mathfrak{R}$ bedeckt ist.

Bevor wir weiter gehen, lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf folgende Puncte:

1 . . . . *$A + iB$ ist eine die ganze Fläche $\mathfrak{R}$ bedeckende und unveränderlich festgesetzte Function, deren Werthe innerhalb $\mathfrak{T}$ von $x + iy$, innerhalb $\mathfrak{S}$ hingegen von x, y abhängig sind.*

A ist eine Function, welche sammt ihren natürlichen Ableitungen auf der Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben stetig ist, abgesehen von den vorgeschriebenen Unstetigkeiten, und von einem längs λ hinlaufenden Grat. In der Linie λ hängen nämlich die Werthe der Function A selber stetig zusammen, nicht aber die Werthe ihrer Ableitungen. Ausserdem ist $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}$ auf der Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben gleich Null.

B ist eine Function, welche sammt ihren natürlichen Ablei-

tungen auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall stetig ist, abgesehen von den vorgeschriebenen Unstetigkeiten. Der aus den zweiten Differentialquotienten zusammengesetzte Ausdruck $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}$ ist nicht überall, sondern nur innerhalb $\mathfrak{T}$ gleich Null.

Die vorgeschriebenen Unstetigkeiten befinden sich im Flächentheile $\mathfrak{T}$, reichen aber nirgends bis hart an den Rand dieses Flächentheiles. Dieser Rand wird repräsentirt durch die in sich zurücklaufende Linie λ; denn die Linie λ bildet die Grenze zwischen den beiden Flächentheilen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$.

Längs der Linie λ, welche die Grenze zwischen den beiden Flächentheilen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ bildet, denken wir uns eine reelle und stetig zusammenhängende Werthenreihe F aufgepflanzt. Zufolge des Satzes (Seite 33) wird dann auf dem Flächentheil $\mathfrak{S}$ eine von x, y abhängende reelle Function ausgebreitet werden können, welche am Rande von $\mathfrak{S}$ gleichwerthig mit F ist, und welche im Innern von $\mathfrak{S}$ folgende Eigenschaften besitzt:

I. Die Function ist sammt ihren natürlichen Ableitungen stetig.

II. Sie genügt der Gleichung $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$.

Wir denken uns diese Function wirklich gebildet, und bezeichnen sie mit $U_{\mathfrak{S}}$.

Analoges führen wir auf $\mathfrak{T}$ aus; wir bedecken nämlich den Flächentheil $\mathfrak{T}$ mit einer von x, y abhängenden reellen Function, welche am Rande von $\mathfrak{T}$ ebenfalls gleichwerthig mit F ist, und welche im Innern von $\mathfrak{T}$ wiederum die Eigenschaften I, II besitzt. Diese Function mag $U_{\mathfrak{T}}$ heissen.

Die Functionen $U_{\mathfrak{S}}$ und $U_{\mathfrak{T}}$ besitzen auf der Grenze von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ gleiche Werthe, und können demnach zusammengenommen als eine einzige Function U angesehen werden, von welcher die ganze Fläche $\mathfrak{R}$ bedeckt ist.

(2.) . . . *Die Function U wird alsdann sammt ihren natürlichen Ableitungen auf der Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben stetig sein, abgesehen von einem längs λ hinlaufenden Grat. In der Linie λ sind nämlich die Werthe der Function U selber stetig, nicht aber die Werthe ihrer Ableitungen. Ausserdem wird die Function U auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall der Gleichung $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ Genüge leisten.*

Wir betrachten gegenwärtig die längs λ aufgepflanzte Werthenreihe F als veränderlich. Die Gestalt der Function U ist an jene Werthenreihe gebunden, und wird sich, sobald jene geändert wird, gleichfalls ändern. Es mögen durch $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$, . . . alle möglichen Gestalten dargestellt sein, deren die Werthenreihe F überhaupt fähig ist; und gleichzeitig mögen $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, $U^{(3)}$, . . . die zugehörigen Gestalten von U sein. Unter all diesen verschiedenen Gestalten der Function U wird eine existiren, für welche das über die Fläche $\mathfrak{R}$ ausgedehnte Integral

$$(3)\qquad \iint\limits_{\mathfrak{R}} \left\{ \left(\frac{\partial (U+A)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial (U+A)}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \right)^2 \right\} dx\, dy$$

am kleinsten ist. Diese specielle Gestalt von U mag mit u, und gleichzeitig die zugehörige Gestalt von F mit f bezeichnet werden. Zur Abkürzung werden wir übrigens das eben hingestellte Integral (3) hinfort mit

$$(3\text{a.})\qquad \underset{\mathfrak{R}}{\boldsymbol{P}}(U)$$

bezeichnen. Die Functionen A und B in diese abkürzende Bezeichnung mit aufnehmen zu wollen, würde überflüssig sein; denn A und B sind Functionen von u n v e r ä n d e r l i c h e r Gestalt.

Es handelt sich nun um eine nähere Untersuchung der durch die angegebene Minimumsbedingung bestimmten speciellen Function u.

Setzt man für den Augenblick $U = u + \delta$, so ergiebt sich leicht folgende identische Gleichung:

$$(4)\qquad \underset{\mathfrak{R}}{\boldsymbol{P}}(u+\delta) = \underset{\mathfrak{R}}{\boldsymbol{P}}(u) + \underset{\mathfrak{R}}{\boldsymbol{\Pi}}(\delta) +$$
$$+ 2 \iint\limits_{\mathfrak{R}} \left\{ \frac{\partial \delta}{\partial x} \left(\frac{\partial (U+A)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} \right) + \frac{\partial \delta}{\partial y} \left(\frac{\partial (u+A)}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right\} dx\, dy;$$

folglich, wenn man für δ seine eigentliche Bedeutung $U - u$ restituirt:

$$(5)\qquad \underset{\mathfrak{R}}{\boldsymbol{P}}(U) = \underset{\mathfrak{R}}{\boldsymbol{P}}(u) + \underset{\mathfrak{R}}{\boldsymbol{\Pi}}(U-u) + 2\,\underset{\mathfrak{R}}{\boldsymbol{T}},$$

wo $\underset{\mathfrak{R}}{\boldsymbol{T}}$ folgendes Integral bezeichnet:

$$(6)\qquad T_{\mathfrak{R}} = \iint\limits_{\mathfrak{R}} \left\{ \frac{\partial (U-u)}{\partial x} \left(\frac{\partial (u+A)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} \right) + \frac{\partial (U-u)}{\partial y} \left(\frac{\partial (u+A)}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right\} dx\, dy.$$

Wie sich die in diesem Integrale vorhandenen ursprünglichen Ableitungen von A, B, U, u auf der Fläche $\mathfrak{R}$ verhalten, ist uns unbekannt. Bekannt ist uns nur das Verhalten der natürlichen Ableitungen. Wir müssen daher, wenn wir das Integral in eine einfachere Form versetzen wollen, zurückgehen auf den natürlichen Zustand der Fläche $\mathfrak{R}$, oder vielmehr auf den **natürlichen** Zustand ihrer einzelnen Theile.

Wir führen zu diesem Zweck auf der Fläche $\mathfrak{R}$ zuerst einen längs λ fortlaufenden Schnitt aus, und fügen sodann zu diesem ersten Schnitt noch so viel andere Schnitte hinzu, als nothwendig ist, um die ganze Fläche in einzelne Stücke zu zerfällen, von denen jedes durch stetige Umformung in seinen natürlichen Zustand versetzt werden kann. Irgend eines von diesen Flächenstücken mag $\mathfrak{J}$ heissen, und gleichzeitig mag $\mathfrak{E}$ diejenige Elementarfläche sein, durch welche der natürliche Zustand von $\mathfrak{J}$ dargestellt wird.

Wir betrachten zunächst denjenigen Theil des Integrales $T_{\mathfrak{R}}$, welcher über $\mathfrak{J}$ hinerstreckt ist, also das Integral:

$$(7)\qquad T_{\mathfrak{J}} = \iint\limits_{\mathfrak{J}} \left\{ \frac{\partial (U-u)}{\partial x} \left(\frac{\partial (u+A)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} \right) + \frac{\partial (U-u)}{\partial y} \left(\frac{\partial (u+A)}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right\} dx\, dy;$$

unterscheiden dabei aber zwei Fälle, je nachdem $\mathfrak{J}$ zu $\mathfrak{S}$ oder zu $\mathfrak{T}$ gehört.

Erster Fall. Das Flächenstück $\mathfrak{J}$ gehört zu $\mathfrak{S}$.

Sind

$$(\mathfrak{J},\ x,\ y,\ A,\ B,\ U,\ u)$$

und

$$(\mathfrak{E},\ \xi,\ \eta,\ A,\ B,\ U,\ u)$$

die beiden Bilder, welche das Flächenstück $\mathfrak{J}$ sammt den darauf ausgebreiteten Werthen von A, B, U, u zur Zeit seines ursprünglichen und zur Zeit seines natürlichen Zustandes darbietet, so

wird das vorgelegte Integral (7), als Invariante, von gleichem Werth sein mit dem analogen über $\mathfrak{E}$ hinerstreckten Integral:

$$(8)\qquad \int\!\!\int_{\mathfrak{E}} \left\{ \frac{\partial (U-u)}{\partial \xi}\left(\frac{\partial (u+A)}{\partial \xi} - \frac{\partial B}{\partial \eta}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial (U-u)}{\partial \eta}\left(\frac{\partial (u+A)}{\partial \eta} + \frac{\partial B}{\partial \xi}\right)\right\} d\xi\, d\eta;$$

Nun ist identisch:

$$\frac{\partial (U-u)}{\partial \xi}\left(\frac{\partial (u+A)}{\partial \xi} - \frac{\partial B}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(U-u)\left(\frac{\partial (u+A)}{\partial \xi} - \frac{\partial B}{\partial \eta}\right)\right] -$$
$$- (U-u)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial \xi \partial \eta}\right),$$

$$\frac{\partial (U-u)}{\partial \eta}\left(\frac{\partial (u+A)}{\partial \eta} + \frac{\partial B}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[(U-u)\left(\frac{\partial (u+A)}{\partial \eta} + \frac{\partial B}{\partial \xi}\right)\right] -$$
$$- (U-u)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial \xi \partial \eta}\right).$$

Addirt man diese beiden Formeln, so werden sich die letzten, mit dem Factor $(U-u)$ behafteten Glieder zerstören; denn zufolge (1) und (2) sind $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall $= 0$, und Gleiches gilt daher (vergl. Seite 27) auch von $\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$. Das Integral (8) verwandelt sich demnach in:

$$(9)\qquad \int\!\!\int_{\mathfrak{E}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial \beta}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta,$$

wo α und β folgende Bedeutungen haben:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \alpha &= (U-u)\left(\frac{\partial (u+A)}{\partial \xi} - \frac{\partial B}{\partial \eta}\right), \\ \beta &= (U-u)\left(\frac{\partial (u+A)}{\partial \eta} + \frac{\partial B}{\partial \xi}\right). \end{aligned}$$

Laut (1) und (2) sind die Functionen A, B, U, u sammt ihren natürlichen Ableitungen auf dem Flächentheil $\mathfrak{T}$ überall stetig, also auch auf $\mathfrak{J}$. Demnach werden auf $\mathfrak{J}$ oder auf $\mathfrak{E}$ auch die Ausdrücke α und β überall stetig sein.

Daraus folgt (Vorl. Seite 59), dass das Integral (9) identisch ist mit folgendem Randintegral:

$$(11)\qquad -\int_{\mathfrak{E}} \left(\alpha \frac{d\xi}{dv} + \beta \frac{d\eta}{dv}\right) d\sigma;$$

und dieses verwandelt sich, wenn man für α und β ihre eigentlichen Bedeutungen (10) restituirt, in:

$$(12) \qquad -\int_{\mathfrak{S}} (U-u) \left(\frac{d(u+A)}{d\nu} - \frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{d\xi}{d\nu} + \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{d\eta}{d\nu} \right) d\sigma.$$

Hier stellt $d\sigma$ ein Randelement von $\mathfrak{S}$ vor, und ν die auf $d\sigma$ errichtete innere Normale. Versteht man gleichzeitig unter σ die positive Richtung des Randes, so sind (für jeden Punct des Randes) σ und ν zwei Richtungen, die ebenso zu einander liegen, wie die x Achse und y Achse eines rechtwinklichen Coordinatensystemes. Demnach ist (Vergl. Vorl. S. 79):

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{d\eta}{d\nu}, \quad \frac{d\xi}{d\nu} + \frac{d\eta}{d\sigma} = 0.$$

Hierdurch geht der in (12) unter dem Integralzeichen enthaltene Ausdruck

$$-\frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{d\xi}{d\nu} + \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{d\eta}{d\nu}$$

über in

$$+\frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\sigma} + \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{d\xi}{d\sigma},$$

d. i. in

$$\frac{dB}{d\sigma}.$$

Das Integral (12) selber geht also über in.

$$(13) \qquad -\int_{\mathfrak{S}} (U-u) \left(\frac{d(u+A)}{d\nu} + \frac{dB}{d\sigma} \right) d\sigma.$$

Dieses Integral aber ist wiederum eine Invariante, also von gleichem Werth mit folgendem Integral:

$$(14) \qquad -\int_{\mathfrak{J}} (U-u) \left(\frac{d(u+A)}{dn} + \frac{dB}{ds} \right) ds.$$

Wir haben also schliesslich für das ursprünglich vorgelegte Integral (7) folgenden Werth gefunden:

$$(15) \qquad T_{\mathfrak{J}} = -\int_{\mathfrak{J}} (U-u) \left(\frac{d(u+A)}{dn} + \frac{dB}{ds} \right) ds.$$

Sind $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3, \ldots$ die einzelnen Stücke, in welche der Flächentheil $\mathfrak{S}$ zerlegt wurde, so ist:

$$(16) \qquad T_{\mathfrak{S}} = T_{\mathfrak{J}_1} + T_{\mathfrak{J}_2} + T_{\mathfrak{J}_3} + \cdots$$

Für jedes der Integrale $T_{\mathfrak{J}_1}$, $T_{\mathfrak{J}_2}$, $T_{\mathfrak{J}_3}$, ... ergiebt sich ein mit (15) analoger Werth. Substituirt man all' diese Werthe in (16), so erhält man:

$$(17) \qquad T_{\mathfrak{S}} = -\int_{\mathfrak{S}} (U-u)\left(\frac{d(u+A)}{dn} + \frac{dA}{ds}\right) ds;$$

hier läuft die Integration um den Rand von $\mathfrak{S}$ herum; ds repräsentirt ein Element dieses Randes, s die positive Richtung des Randes, und n die Richtung der inneren Normale.

Zweiter Fall. Das Flächenstück $\mathfrak{J}$ gehört zu $\mathfrak{T}$.

Da $A+iB$ innerhalb $\mathfrak{T}$ von $x+iy$ abhängt, so gelten innerhalb $\mathfrak{T}$ die beiden Relationen:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y}, \quad \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} = 0.$$

In dem hier betrachteten Fall reducirt sich daher das Integral (7) auf:

$$(18) \qquad T_{\mathfrak{J}} = \iint_{\mathfrak{J}} \left\{\frac{\partial(U-u)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(U-u)}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right\} dx\, dy.$$

Dieses ist (als Invariante) von gleichem Werth mit dem analogen über $\mathfrak{E}$ hinerstreckten Integral

$$(19) \qquad \iint_{\mathfrak{E}} \left\{\frac{\partial(U-u)}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial(U-u)}{\partial \eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right\} d\xi\, d\eta.$$

Nun ist identisch:

$$\frac{\partial(U-u)}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(U-u)\frac{\partial u}{\partial \xi}\right] - (U-u)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$
$$\frac{\partial(U-u)}{\partial \eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[(U-u)\frac{\partial u}{\partial \eta}\right] - (U-u)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Substituirt man diese Werthe in (19) und beachtet man, dass $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ (wie bereits vorhin bemerkt wurde) gleich Null ist, so geht das Integral (19) über in:

$$(20) \qquad \iint_{\mathfrak{E}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial \beta}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta,$$

wo α und β folgende Bedeutungen haben:

$$\alpha = (U - u)\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\beta = (U - u)\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

Laut (2) sind die Functionen U, u sammt ihren natürlichen Ableitungen auf $\mathfrak{T}$ überall stetig. Gleiches gilt daher auch von den Grössen α und β. Demnach verwandelt sich das Integral (20) in folgendes Randintegral (Vorl. S. 59):

$$(21) \qquad - \int_{\mathfrak{C}} \left(\alpha \frac{d\xi}{d\nu} + \beta \frac{d\eta}{d\nu}\right) d\sigma.$$

Dieses aber nimmt, wenn man für α und β ihre eigentlichen Bedeutungen restituirt, die Gestalt an:

$$(22) \qquad - \int_{\mathfrak{C}} (U - u) \frac{du}{d\nu} d\sigma;$$

und ist (als Invariante) identisch mit dem analogen über den Rand von $\mathfrak{J}$ hinerstreckten Integral

$$(23) \qquad - \int_{\mathfrak{J}} (U - u) \frac{du}{dn} ds.$$

Wir erhalten also in dem hier betrachteten Fall, wo $\mathfrak{J}$ zu $\mathfrak{T}$ gehört, für das Integral (7) folgenden Werth:

$$(24) \qquad T_{\mathfrak{J}} = - \int_{\mathfrak{J}} (U - u) \frac{du}{dn} ds;$$

hier ist ds ein Element der Randcurve von $\mathfrak{J}$, und n die auf diesem Element errichtete innere Normale.

Sind $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$ ... die einzelnen Stücke, in welche der Flächentheil $\mathfrak{T}$ zerlegt wurde, so ist

$$(25) \qquad T_{\mathfrak{T}} = T_{\mathfrak{J}_1} + T_{\mathfrak{J}_2} + T_{\mathfrak{J}_3} + \ldots$$

Substituirt man hier für die Integrale rechts die mit (24) analogen Werthe, so erhält man:

$$(26) \qquad T_{\mathfrak{T}} = - \int_{\mathfrak{T}} (U - u) \frac{du}{dn} ds,$$

wo ds ein Randelement von $\mathfrak{T}$ ist, und n die auf ds errichtete innere Normale vorstellt.

Die eben gefundene Formel kann noch etwas anders dargestellt werden. Da nämlich $A + iB$ innerhalb $\mathfrak{T}$ von $x + iy$ abhängt, so gelten innerhalb $\mathfrak{T}$ die Relationen:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y}, \qquad \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} = 0.$$

Und ebenso werden innerhalb $\mathfrak{T}$ auch folgende Relationen gelten:

$$\frac{dA}{ds} = \frac{dB}{dn}, \qquad \frac{dA}{dn} + \frac{dB}{ds} = 0,$$

vorausgesetzt, dass man unter s und n zwei auf einander senkrechte Richtungen versteht, die ebenso zu einander liegen, wie die x Achse und y Achse. So z. B. werden die letztgenannten Relationen gültig sein, wenn man unter s die positive Randrichtung von $\mathfrak{T}$, und unter n die auf diesem Rande errichtete innere Normale versteht. Thut man solches, so wird also der in (26) enthaltene Differentialquotient

$$\frac{du}{dn}$$

identisch sein mit

$$\frac{du}{dn} + \frac{dA}{dn} + \frac{dB}{ds}.$$

Demgemäss kann das Integral (26) auch so dargestellt werden:

$$(27) \qquad T_{\mathfrak{T}} = -\int_{\mathfrak{T}} (U - u) \left(\frac{d(u+A)}{dn} + \frac{dB}{ds} \right) ds.$$

Hier ist s die positive Richtung des Randes von $\mathfrak{T}$, und n die auf diesem Rande errichtete innere Normale.

Es handelt sich eigentlich um das in (5) angegebene Integral

$$T_{\mathfrak{R}}.$$

Nun ist offenbar:

$$(28) \qquad T_{\mathfrak{R}} = T_{\mathfrak{S}} + T_{\mathfrak{T}},$$

also, falls man die in (17) und (27) gefundenen Werthe substituirt:

$$(29) \qquad T_{\mathfrak{R}} = -\int_{\mathfrak{S}} (U - u) \left(\frac{d(u+A)}{dn} + \frac{dB}{ds} \right) ds$$

$$- \int_{\mathfrak{T}} (U - u) \left(\frac{d(u+A)}{dn} + \frac{dB}{ds} \right) ds.$$

Von diesen beiden Integralen ist das eine über den Rand von $\mathfrak{S}$, das andere über den von $\mathfrak{T}$ hinerstreckt; beide Integrale sind also hinerstreckt über ein und dieselbe Linie, nämlich über die Linie λ. Verschieden sind aber in beiden Integralen die Bedeutungen von s, und auch die von n. Denn die positive Randrichtung von $\mathfrak{S}$ ist entgegengesetzt mit der von $\mathfrak{T}$; und ebenso sind auch die inneren Normalen von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ einander entgegengesetzt.

Wir bezeichnen in irgend einem Punct der Grenzlinie λ die positiven Randrichtungen von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ mit s_1 und s_2, ferner die daselbst errichteten inneren Normalen mit n_1 und n_2; in analoger Weise bezeichnen wir endlich die Werthe der Functionen A, B, U, u auf der einen Seite der Linie λ mit A_1, B_1, U_1, u_1, auf der andern mit A_2, B_2, U_2, u_2. Alsdann lässt sich die Formel (29) folgendermassen hinstellen:

$$(30)\qquad \underset{\mathfrak{R}}{T} = -\int_\lambda \left\{ (U_1 - u_1)\left(\frac{d(u_1+A_1)}{dn_1} + \frac{dB_1}{ds_1}\right) + \right.$$
$$\left. + (U_2 - u_2)\left(\frac{d(u_2+A_2)}{dn_2} + \frac{dB_2}{ds_2}\right)\right\} ds,$$

wo die Integration längs der Linie λ einmal herumläuft. Zufolge der Art und Weise, wie die Functionen U, u gebildet sind, ist

$$U_1 = U_2 = F,$$
$$u_1 = u_2 = f,$$

mithin $U_1 - u_1 = U_2 - u_2 = F - f$; folglich:

$$(31)\qquad \underset{\mathfrak{R}}{T} = -\int_\lambda (F-f)\left(\frac{d(u_1+A_1)}{dn_1} + \frac{d(u_2+A_2)}{dn_2}\right.$$
$$\left. + \frac{dB_1}{ds_1} + \frac{dB_2}{ds_2}\right) ds.$$

Zufolge (1) ist die Function B in der Linie λ nirgends unstetig, und zu beiden Seiten derselben von gleichem Werth. Sind also α und β irgend zwei längs jener Linie auf einander folgende Puncte, so wird

$$\frac{dB_1}{ds_1} = \frac{B_\beta - B_\alpha}{\alpha\beta}$$

sein, vorausgesetzt, dass die von α nach β laufende Richtung identisch mit derjenigen ist, welche wir durch s_1 bezeichnet haben. Mit dieser Richtung ist die durch s_2 bezeichnete entgegengesetzt. Demnach wird:

$$\frac{dB_2}{ds_2} = \frac{B_\alpha - B_\beta}{\beta\alpha}.$$

Die Nenner $\alpha\beta$ und $\beta\alpha$ bezeichnen in beiden Formeln die Entfernung zwischen den Puncten α, β, und sind also von gleicher Grösse. Somit ergiebt sich:

$$(32) \qquad \frac{dB_1}{ds_1} + \frac{dB_2}{ds_2} = 0.$$

Setzen wir also zur Abkürzung

$$(33) \qquad \frac{d(u_1 + A_1)}{dn_1} + \frac{d(u_2 + A_2)}{dn_2} = q,$$

so erhalten wir aus (31):

$$(34) \qquad T_{\mathfrak{R}} = -\int_\lambda (F - f)\, q\, ds.$$

Hierdurch geht nun die früher gefundene Formel (5) über in

$$(35) \qquad P_{\mathfrak{R}}(U) = P_{\mathfrak{R}}(u) + \Pi_{\mathfrak{R}}(U - u) - 2\int_\lambda (F - f)\, q\, ds.$$

Da u unter allen Functionen U diejenige vorstellt, für welche das Integral $P_{\mathfrak{R}}$ am kleinsten ist, so folgt aus dieser Formel, dass der Ausdruck

$$(36) \qquad \Pi_{\mathfrak{R}}(U - u) - 2\int_\lambda (F - f)\, q\, ds$$

niemals negativ werden kann.

Hieraus aber ergiebt sich in ganz gleicher Weise, wie bei früherer Gelegenheit (Seite 47, 48), dass q auf der Linie λ überall $= 0$ ist, dass also längs jener Linie

$$\frac{d(u_1 + A_1)}{dn_1} + \frac{d(u_2 + A_2)}{dn_2}$$

überall $= 0$ ist. Sodann ergiebt sich weiter (wiederum in gleicher Weise wie damals), dass die Ableitungen der Function $u + A$ zu beiden Seiten der Linie λ gleiche Werthe besitzen. Es wird demnach $u + A$ eine Function sein, welche in der Linie λ keinen Grat hat.

Mit Rücksicht auf (1) und (2) gelangen wir daher zu folgendem Ausspruch:

(37) . . . *$u + A$ ist eine Function, welche sammt ihren natürlichen*

auf der Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben stetig ist, abgesehen von den vorgeschriebenen Unstetigkeiten. Ausserdem ist

$$\frac{\partial^2(u+A)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(u+A)}{\partial y^2}$$

auf der Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben gleich Null.

Sechster Abschnitt. Fortsetzung. Dem schon gebildeten reellen Theil der gesuchten Function wird der noch fehlende imaginäre Theil beigefügt.

Wir gehen in der Untersuchung, die im vorhergehenden Abschnitt begonnen wurde, weiter vorwärts. Es sei $\mathfrak{J}$ irgend ein Stück der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$, von beliebiger Lage, jedoch von solcher Beschaffenheit, dass es durch stetige Umformung in seinen natürlichen Zustand versetzt werden kann. Das über den Rand von $\mathfrak{J}$ hinerstreckte Integral

$$(38)\qquad \int\limits_{\mathfrak{J}}\left\{\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial x}-\frac{\partial B}{\partial y}\right)dy-\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial x}\right)dx\right\}$$

ist eine Invariante, also, wenn man das natürliche Bild des Flächenstückes $(\mathfrak{J}, x, y)$ mit $(\mathfrak{E}, \xi, \eta)$ bezeichnet, von gleichem Werth mit folgendem Integral:

$$(39)\qquad \int\limits_{\mathfrak{E}}\left\{\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial \xi}-\frac{\partial B}{\partial \eta}\right)d\eta-\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial \eta}+\frac{\partial B}{\partial \xi}\right)d\xi\right\}.$$

Wir bezeichnen dieses letztere zur Abkürzung mit

$$(39\text{a.})\qquad \int\limits_{\mathfrak{E}}(\alpha\, d\eta-\beta\, d\xi),$$

wo dann α und β folgende Bedeutungen haben:

$$(40)\qquad \begin{aligned}\alpha&=\frac{\partial(u+A)}{d\xi}-\frac{\partial B}{\partial\eta}\\ \beta&=\frac{\partial(u+A)}{\partial\eta}+\frac{\partial B}{\partial\xi}\end{aligned}$$

Laut (37) ist der Ausdruck $\frac{\partial^2(u+A)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(u+A)}{\partial y^2}$ überall $=0$, also $\frac{\partial^2(u+A)}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2(u+A)}{\partial\eta^2}$ ebenfalls immer $=0$. Demnach ist

$$\alpha\, d\eta-\beta\, d\xi$$

jederzeit ein vollständiges Differential. Was die Stetigkeit der darin enthaltenen Grössen α und β anbelangt, so müssen wir je nach der Lage des gerade betrachteten Flächenstückes $\mathfrak{J}$ drei Fälle unterscheiden.

Erster Fall. $\mathfrak{J}$ liegt vollständig innerhalb des Flächentheiles $\mathfrak{S}$.

Laut (37) sind die natürlichen Ableitungen $\frac{\partial(u+A)}{\partial\xi}$, $\frac{\partial(u+A)}{\partial\eta}$ in diesem Fall innerhalb $\mathfrak{J}$ überall stetig. Gleiches gilt laut (1) auch von den natürlichen Ableitungen $\frac{\partial B}{\partial\xi}, \frac{\partial B}{\partial\eta}$. Gleiches gilt daher innerhalb $\mathfrak{J}$ oder, was dasselbe ist, innerhalb $\mathfrak{E}$ auch von den Grössen α und β.

Zweiter Fall. $\mathfrak{J}$ liegt vollstängig innerhalb des Flächentheiles $\mathfrak{T}$.

Laut (1) sind die Werthe von $A + iB$ alsdann innerhalb $\mathfrak{J}$ abhängig von $x + iy$; die Werthe von $x + iy$ sind aber ihrerseits gebunden an die Werthe von $\xi + i\eta$. Demnach werden die Werthe von $A + iB$ innerhalb $\mathfrak{J}$ von $\xi + i\eta$ abhängen. Es wird mithin innerhalb $\mathfrak{J}$

$$\frac{\partial A}{\partial\xi} - \frac{\partial B}{\partial\eta} = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial\eta} + \frac{\partial B}{\partial\xi} = 0$$

sein. Hierdurch reduciren sich die Werthe der Grössen α und β auf: $\alpha = \frac{\partial u}{\partial\xi}$, $\beta = \frac{\partial u}{\partial\eta}$.

Diese aber sind laut (2) innerhalb des hier betrachteten Flächenstückes $\mathfrak{J}$ überall stetig. Wir sehen also, dass die Grössen α und β auch in diesem zweiten Fall innerhalb $\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{E}$ durchweg stetig sind.

Dritter Fall. $\mathfrak{J}$ liegt zum Theil innerhalb $\mathfrak{S}$, zum andern Theil innerhalb $\mathfrak{T}$.

Die Linie λ wird alsdann durch das Flächenstück $\mathfrak{J}$ hindurchgehen, und dasselbe in zwei Theile zerlegen. Doch ist es zweckmässig, an Stelle der hier von selber dargebotenen Theilung eine gewisse andere Theilung eintreten zu lassen.

Laut (1) befinden sich die vorgeschriebenen Unstetigkeiten innerhalb des Flächentheiles $\mathfrak{T}$, reichen aber nirgends

bis hart an den Rand von $\mathfrak{T}$, also nirgends bis hart an die Linie λ. Wir können demnach innerhalb $\mathfrak{T}$ eine mit λ parallel laufende Linie λ' ziehen von solcher Lage, dass der zwischen λ und λ' befindliche (in sich zurücklaufende) Flächenstreifen von jenen vorgeschriebenen Unstetigkeiten völlig frei ist. Diese letztere Linie λ' ist es, welche wir zur Theilung des Flächenstückes $\mathfrak{J}$ benutzen. Von den so erhaltenen beiden Theilen wird dann der eine vollständig zu $\mathfrak{T}$ gehören; der andere hingegen wird nicht in seiner ganzen Ausdehnung zu $\mathfrak{S}$ gehören, sondern noch einen schmalen zu $\mathfrak{T}$ gehörigen Flächenstreifen mit umfassen. Wir bezeichnen den ersteren Theil mit $\mathfrak{J}_t$, den letztern mit $\mathfrak{J}_s$.

Dass die Grössen α und β innerhalb $\mathfrak{J}_t$ überall stetig sind, unterliegt dann keinem Zweifel, folgt nämlich unmittelbar aus den beim zweiten Fall angestellten Ueberlegungen.

Was andererseits $\mathfrak{J}_s$ anbelangt, so ist zu beachten, dass $\mathfrak{J}_s$ seiner Construction zufolge vollständig frei ist von den vorgeschriebenen Unstetigkeiten. Laut (37) sind daher $\frac{\partial(u+A)}{\partial\xi}$, $\frac{\partial(u+A)}{\partial\eta}$, und laut (1) auch $\frac{\partial B}{\partial\xi}$, $\frac{\partial B}{\partial\eta}$ innerhalb $\mathfrak{J}_s$ überall stetig. Gleiches muss daher auch von den Grössen α und β gelten.

Die Grössen α und β sind also nicht nur auf $\mathfrak{J}_t$, sondern auch auf $\mathfrak{J}_s$ überall stetig. Es fragt sich jetzt nur noch, ob diese Stetigkeit auch stattfindet an der Grenze von $\mathfrak{J}_t$ und $\mathfrak{J}_s$. Dass solches der Fall ist, erhellt augenblicklich, wenn man beachtet, dass diese Grenze keine vollständig bestimmte ist, dass nämlich die Grenzlinie λ' (ohne irgend welchen Nachtheil für die Gültigkeit der vorhergehenden Betrachtungen) näher herangeschoben werden kann an die gegebene Linie λ*).

*) Wollte nämlich Jemand behaupten, die Linie λ' repräsentire während ihrer anfänglichen Lage eine Unstetigkeitslinie der Grössen α, β, so würde es, um die Unrichtigkeit dieser Behauptung darzuthun, nur einer Verschiebung bedürfen, durch welche die Linie λ' in eine neue Lage gelangt, die näher an λ liegt, als die erste. Das Flächenstück $\mathfrak{J}_t$ wird dann bis an die neue Lage von λ' reichen, die anfängliche Lage von λ' also in sich enthalten. Innerhalb dieses Flächenstückes $\mathfrak{J}_t$ sind aber die Grössen α, β nun wiederum überall stetig. Sie sind also auch stetig in derjenigen Linie, durch welche die anfängliche Lage von λ' dargestellt wird; denn diese Linie liegt ja jetzt innerhalb $\mathfrak{J}_t$.

Wir sehen demnach, dass die Grössen α und β auch in dem hier betrachteten dritten Fall innerhalb des Flächenstücks $\mathfrak{J}$, mithin auch innerhalb $\mathfrak{E}$ überall stetig sind.

Somit ist bewiesen, dass der Ausdruck

$$\alpha d\eta - \beta d\xi,$$

mag nun die Lage des Flächenstücks $\mathfrak{J}$ auf der gegebenen Riemann'schen Fläche sein, wie sie wolle, ein Differential vorstellt, welches auf diesem Flächenstück, also auch auf der Elementarfläche $\mathfrak{E}$ allenthalben vollständig und stetig ist. Daraus aber folgt unmittelbar (Vorl. S. 70), dass das über den Rand dieser Elementarfläche hinerstreckte Integral

$$\int_{\mathfrak{E}} (\alpha d\eta - \beta d\xi)$$

gleich Null ist, dass mithin Gleiches auch gilt von dem um $\mathfrak{J}$ herumlaufenden Integral (38). Das so erhaltene Resultat:

$$(41) \qquad \int_{\mathfrak{J}} \left\{ \left(\frac{\partial (u + A)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} \right) dy - \left(\frac{\partial (u + A)}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \right) dx \right\} = 0$$

lässt sich nun unmittelbar erweitern.

Denken wir uns nämlich aus der gegebenen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{K}$ ein ganz beliebig gestaltetes Stück herausgeschnitten, so wird sich dieses jederzeit durch geeignete Schnitte in ein System kleinerer Stücke zerlegen lassen, welche die an $\mathfrak{J}$ gestellte Anforderung erfüllen, von welchen nämlich jedes durch stetige Umformung in seinen natürlichen Zustand versetzt werden kann. Für jedes dieser kleineren Stücke wird also die Formel (41) Gültigkeit besitzen. Stellt man alle diese Formeln auf, und summirt dieselben, so ergiebt sich, dass die Formel (41) auch für das ursprüngliche beliebig gestaltete Flächenstück Gültigkeit hat. Also:

(42) . . . *Betrachtet man ein ganz beliebiges Stück der gegebenen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{K}$, so wird das in positiver Richtung über den Rand dieses Flächenstückes hinerstreckte Integral*

$$\int \left\{ \left(\frac{\partial (u+A)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} \right) dy - \left(\frac{\partial (u+A)}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \right) dx \right\}$$

jederzeit gleich Null sein.

Wir verwandeln gegenwärtig die Fläche $\mathfrak{R}$ durch irgend welche Schnitte L in eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ ganz gleichgültig, ob diese Schnitte L die gegebene Linie λ durchkreuzen, oder nicht durchkreuzen), und bilden sodann das von einem festen Punct s auslaufende, und in seiner Bewegung auf die Fläche $\mathfrak{R}'$ eingeschränkte Integral:

$$(43) \qquad v = \int_s^p \left\{ \left(\frac{\partial (u+A)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} \right) dy - \left(\frac{\partial (u+A)}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \right) dx \right\}.$$

Aehnlich wie bei früherer Gelegenheit (Seite 35, 36) ergiebt sich auf Grund des eben gefundenen Satzes (42) mit Leichtigkeit, dass dieses Integral v in einem gegebenen Punct p immer mit ein und demselben Werth anlangen wird, welches auch die Bahn sein mag, auf welcher es nach p hinläuft. Bezeichnen wir also die Coordinaten des Punctes p mit x, y, so ist v eine von x, y abhängende Function, die innerhalb $\mathfrak{R}'$ überall eindeutig ist.

Sind p_0 und p_1 zwei auf einander folgende Lagen des Punctes p, so ist

$$(44) \qquad \int_{p_0}^{p_1} \left\{ \left(\frac{\partial (u+A)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} \right) dy - \left(\frac{\partial (u+A)}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \right) dx \right\}$$

derjenige Zuwachs, welchen die eben genannte Function v beim Fortschreiten des Punctes p von p_0 nach p_1 erhält. Das Integral, durch welches dieser Zuwachs repräsentirt wird, ist eine Invariante. Denkt man sich also um p_0 und p_1 herum ein kleines Flächenstück $\mathfrak{J}$ abgegrenzt, und bezeichnet man das mit ($\mathfrak{J}$, x, y, p_0, p_1) correspondirende natürliche Bild durch ($\mathfrak{E}$, ξ, η, π_0, π_1), so wird jener Zuwachs von v auch so dargestellt werden können:

$$(45) \qquad \int_{\pi_0}^{\pi_1} \left\{ \left(\frac{\partial (u+A)}{\partial \xi} - \frac{\partial B}{\partial \eta} \right) d\eta - \left(\frac{\partial (u+A)}{\partial \eta} + \frac{\partial B}{\partial \xi} \right) d\xi \right\};$$

also, wenn man eben dieselben Abkürzungen wie zuvor (S. 68) einführt, dargestellt werden können durch:

(46) $$\int_{\pi_0}^{\pi_1}(\alpha\, d\eta - \beta\, d\xi).$$

Die Grössen α und β sind, wie wir vorhin gesehen haben, auf $\mathfrak{J}$ oder auf $\mathfrak{E}$ überall stetig. Demnach ist das Integral (46) unendlich klein, sobald π_0 unendlich nahe an π_1 liegt, das Integral (44) also unendlich klein, falls p_0 und p_1 einander unendlich nahe sind.

Wir sehen hieraus, dass die Function v jederzeit einen unendlich kleinen Zuwachs erhält, sobald der Punct p oder x, y um eine unendlich kleine Strecke fortschreitet. Mit andern Worten: wir sehen, dass die Function v innerhalb $\mathfrak{N}'$ überall stetig ist.

Bisher haben wir über die Schnitte L, durch welche die Fläche $\mathfrak{N}$ in eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{N}'$ verwandelt wurde, keinerlei Voraussetzung gemacht. Fortan wollen wir, allerdings nur der Bequemlichkeit willen, annehmen, dass diese Schnitte sammt und sonders im Flächentheil $\mathfrak{S}$ liegen, dass also der Flächentheil $\mathfrak{T}$ von ihnen unversehrt bleibt. Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{\partial (u + A)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} = a,$$
$$\frac{\partial (u + A)}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} = b,$$

so wird:

$$v = \int_{s}^{p}(a\, dy - b\, dx).$$

Ist l irgend eine unverzweigte Schnittstrecke des mit L bezeichneten Schnittsystemes, so werden die Grössen a und b zu beiden Ufern von l einerlei Werthe besitzen. Solches ergiebt sich unmittelbar aus den Sätzen (1) und (37), falls man nur darauf achtet, dass die Schnitte L, mithin auch l vollständig innerhalb $\mathfrak{S}$ liegen.

Sind α_1, α_2 zwei zu beiden Ufern von l einander gegenüberliegende Puncte, ferner β_1, β_2 zwei andere solche Puncte, und gehören α_1, β_1 zu dem einen, α_2, β_2 zu dem andern Ufer, so wird die Differenz der beiden Werthe $v(\alpha_1)$ und $v(\beta_1)$, d. i. die Differenz der beiden Werthe, welche die eindeutige

Function v in den Puncten α_1 und β_1 besitzt, dargestellt sein durch folgendes Integral:

$$(47)\qquad v(\beta_1) - v(\alpha_1) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} (a\,dy - b\,dx).$$

Desgleichen wird:

$$(48)\qquad v(\beta_2) - v(\alpha_2) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} (a\,dy - b\,dx).$$

In beiden Fällen kann die Integration auf beliebiger Bahn fortlaufen, nur muss sie durchweg innerhalb $\mathfrak{R}'$ bleiben; sie darf also den durch die Ufer der Schnitte L dargestellten Rand nirgends überschreiten. Wir können, da l eine unverzweigte Schnittstrecke repräsentirt, die eine Integration längs des einen, die andere längs des anderen Ufers von l fortlaufen lassen. Thun wir dies, so ergiebt sich unmittelbar, dass beide Integrale von gleichem Werth sind; denn wir wissen ja, dass die Grössen a, b zu beiden Ufern einerlei Werthe besitzen. Die Formeln (47) und (48) führen also zu folgender Gleichung:

$$v(\beta_1) - v(\alpha_1) = v(\beta_2) - v(\alpha_2),$$

oder, was dasselbe ist, zu folgender:

$$v(\beta_1) - v(\beta_2) = v(\alpha_1) - v(\alpha_2).$$

Die Differenz der Werthe, welche v in zwei zu beiden Ufern von l einander gegenüberliegenden Puncten besitzt, ist demnach längs l hin überall ein und dieselbe.

Wir gelangen somit in Betreff der Function v, wenn wir Alles zusammenfassen, zu folgendem Ergebniss:

(49) . . . *Die von x, y abhängende Function v ist auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{R}$, mit Ausnahme der Linien L, allenthalben eindeutig und stetig: in den Linien L ist sie mit constanten Werthdifferenzen behaftet. Die Linien L liegen sämmtlich innerhalb $\mathfrak{S}$; der Flächentheil $\mathfrak{T}$ ist also frei von diesen Linien.*

Uebertragen wir dieses Resultat auf das Aggregat $v + B$, und beachten wir dabei die in (1) angegebenen Eigenschaften von B, so lautet dasselbe folgendermassen:

(50) . . . *Die von x, y abhängende Function $v + B$ ist auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{R}$, abgesehen von den vorgeschriebenen*

Unstetigkeiten und abgesehen von den Linien L, allenthalben eindeutig und stetig. In den Linien L ist sie mit constanten Werthdifferenzen behaftet.

Aus der für v gegebenen Definition (43) folgt unmittelbar:

$$dv = \left(\frac{\partial(u+A)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y}\right) dy - \left(\frac{\partial(u+A)}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x}\right) dx,$$

mithin:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(u+A)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(u+A)}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x},$$

oder, was dasselbe ist:

$$(51)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial(u+A)}{\partial x} - \frac{\partial(v+B)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(u+A)}{\partial y} + \frac{\partial(v+B)}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Daraus aber ergiebt sich, dass der Ausdruck

$$(u + A) + i(v + B)$$

eine Function repräsentirt, welche nicht von x, y, sondern nur von dem einen Argument $x + iy$ abhängig ist. Diese Function wird nun laut (37) und (50) auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben eindeutig und stetig sein, abgesehen von den vorgeschriebenen Unstetigkeiten, und abgesehen von gewissen in den Linien L vorhandenen constanten und rein imaginären Werthdifferenzen. Die vorgeschriebenen Unstetigkeiten befinden sich sämmtlich im Flächentheil $\mathfrak{T}$, die Linien L sämmtlich im Flächentheil $\mathfrak{S}$.

Ferner mag noch daran erinnert werden, dass die von x, y abhängende Function

$$u + iv$$

laut (2) und (49) auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutig und stetig ist, abgesehen von einem in der Linie λ vorhandenen Grat, und abgesehen wiederum von gewissen in den Linien L vorhandenen Werthdifferenzen.

Setzen wir nun schliesslich:

$$(u + A) + i(v + B) = U + iV,$$

mithin $u + iv = (U + iV) - (A + iB)$, so führen die eben ausgesprochenen Ergebnisse, falls wir an Stelle von $u + iv$ die

neu eingeführte Function $U + iV$ in den Vordergrund treten lassen, zu folgendem Theorem:

Viertes Theorem.

Sind x, y die Puncte einer Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$, und ist $A + iB$ eine von $x + iy$ abhängende Function, welche für ein beliebiges Gebiet $\mathfrak{T}$ jener Fläche gegeben, und daselbst mit beliebigen Unstetigkeiten behaftet ist: so existirt jederzeit eine die ganze Fläche $\mathfrak{R}$ bedeckende und ebenfalls von $x + iy$ abhängende Function $U + iV$, welche dieselben Unstetigkeiten wie $A + iB$ besitzt, welche aber, abgesehen von diesen und abgesehen von gewissen rein imaginären Werthdifferenzen, auf der Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben stetig ist.

Denkt man sich nämlich die Fläche $\mathfrak{R}$ durch irgend welche Schnitte L in eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ verwandelt, und nimmt man der Kürze willen an, dass diese Schnitte L das Unstetigkeitsgebiet $\mathfrak{T}$ unversehrt lassen, so existirt eine von $x + iy$ abhängende und auf der Fläche $\mathfrak{R}'$ überall eindeutige Function $U + iV$, welche folgende Bedingungen erfüllt:

1. $U + iV$ besitzt im Gebiete $\mathfrak{T}$ dieselben Unstetigkeiten, wie die gegebene Function $A + iB$, ist aber, abgesehen von diesen Unstetigkeiten und abgesehen von den Linien L, auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben stetig.

2. Innerhalb des Gebietes $\mathfrak{T}$ ist die Differenz $(U + iV) - (A + iB)$ überall stetig.

3. In den Linien L ist die Function $U + iV$ mit constanten, und zwar rein imaginären Werthdifferenzen behaftet.

4. Die Function $U + iV$ besitzt in irgend einem einzelnen Punct der Fläche $\mathfrak{R}$ einen vorgeschriebenen Werth.

Zusatz. Es existirt immer nur eine einzige Function $U + iV$, welche diese Bedingungen erfüllt.

Dass eine den Bedingungen 1, 2, 3 genügende Function existiren muss, folgt unmittelbar aus der vorhergehenden Untersuchung. Ist aber eine solche Function gefunden, und bezeichnet man dieselbe mit $U + iV$, so wird

$$U + iV + \text{Const.}$$

eine Function sein, welche jenen Bedingungen 1, 2, 3 ebenfalls Genüge leistet. Und gleichzeitig wird man die in dieser enthal-

tene additive Constante so bestimmen können, dass auch der Bedingung 4 Genüge geschieht.

Es unterliegt demnach keinem weiteren Zweifel, dass eine die Bedingungen 1, 2, 3, 4 erfüllende Function wirklich existiren muss.

Zu beweisen bleibt hingegen noch, dass immer nur eine einzige Function vorhanden ist, welche jenen Bedingungen genügt. Wir nehmen einstweilen an, es existirten zwei solche Functionen $U + iV$ und $U_1 + iV_1$. Die Differenz

$$(U + iV) - (U_1 + iV_1) = \omega + i\vartheta$$

wird dann folgende Eigenschaften besitzen:

1. $\omega + i\vartheta$ ist eine von $x + iy$ abhängende Function, welche innerhalb der einfach zusammenhängenden Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig ist.

2. Ist l irgend eine zum Schnittsystem L gehörige unverzweigte Schnittstrecke, so besitzt $\omega + i\vartheta$ zu beiden Seiten von l Werthe, deren Differenz der Linie l entlang constant und rein imaginär ist.

3. $\omega + i\vartheta$ ist in irgend einem einzelnen Punct der Fläche $\mathfrak{R}'$ gleich 0.

Hieraus aber folgt, wie wir bei früherer Gelegenheit nachgewiesen haben (S. 55), dass die Differenz $\omega + i\vartheta$ allenthalben $= 0$ ist; dass also nur eine Function $U + iV$ existiren kann, welche die angegebenen Bedingungen erfüllt.

Aus den Functionen, deren Existenz durch das dritte und vierte Theorem erwiesen ist, lassen sich leicht diejenigen Functionen ableiten, deren sich Riemann in seiner Untersuchung über die Abel'schen Integrale bedient. Diese entstehen nämlich aus jenen durch Superposition. Um solches darzulegen, werden wenige Worte genügen.

Es sei $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene Riemann'sche Kugelfläche; auf derselben mögen einzelne Gebiete $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots \mathfrak{T}_s$ abgegrenzt gedacht werden, die zerstreut daliegen wie einzelne Inseln. Innerhalb eines jeden solchen Gebietes sei eine von $x + iy$ abhängende Function gegeben, welche daselbst mit irgend welchen (punctuellen oder linearen) Unstetigkeiten behaftet ist; diese Func-

tionen mögen der Reihe nach bezeichnet werden mit $\varphi_1(x+iy)$, $\varphi_2(x+iy)$, ... $\varphi_s(x+iy)$, oder kürzer φ_1, φ_2, ... φ_s.

Die Fläche $\mathfrak{N}$ ist eine geschlossene Fläche, und besitzt also einen Zusammenhang ungeraden Grades (Vorl. Seite 309); sie sei $(2p+1)$ fach zusammenhängend. Um die Fläche in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln, werden alsdann $2p$ Querschnitte erforderlich sein (Vorl. Seite 309).

Der **erste** von diesen Querschnitten wird seinen Anfang und auch sein Ende in der unendlich kleinen Oeffnung haben, die auf der Fläche $\mathfrak{N}$, weil sie geschlossen ist, supponirt werden muss (Vorl. Seite 309). Was die **übrigen** Querschnitte anbelangt, so wollen wir uns dieselben einen nach dem andern und in solcher Weise ausgeführt denken, dass jeder spätere Querschnitt in einem Uferpunct irgend eines früheren Querschnitts seinen Anfang nimmt, und in dem gegenüberliegenden Uferpunct jenes Querschnittes sein Ende erreicht. Von sämmtlichen $2p$ Querschnitten wird alsdann jeder, für sich allein betrachtet, eine in sich zurücklaufende Linie darstellen. Wir bezeichnen diese $2p$ Linien mit L_1, L_2, ... L_{2p}, und denken uns dieselben, der grösseren Bequemlichkeit willen, in solcher Weise gezogen, dass die gegebenen Flächengebiete $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, ... $\mathfrak{T}_s$ von ihnen weder durchschnitten noch berührt werden.

Gleichzeitig wollen wir uns, den Linien L_1, L_2, ... L_{2p} entsprechend, irgend welche reelle Constanten C_1, C_2, ... C_{2p} gegeben denken.

Zufolge des dritten Theoremes (Seite 53) wird eine von $x+iy$ abhängende Function existiren, welche in der Linie L_π mit einer constanten Werthdifferenz behaftet ist, deren reeller Theil gleich der gegebenen Constanten C_π ist, welche ferner in den übrigen Linien L irgend welche constante und rein imaginäre Werthdifferenzen besitzt, und welche endlich, abgesehen von diesen linearen Unstetigkeiten, auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{N}$ allenthalben stetig ist.*) Wir bezeichnen diese Function, entsprechend der Linie $\mathfrak{L}_\pi$, welche bei ihrer Bildung eine bevorzugte Rolle spielte, mit $\Psi_\pi(x+iy)$ oder Ψ_π. Nehmen wir an Stelle von

*) Dass eine solche Function existirt, folgt nämlich aus dem dritten Theorem unmittelbar, falls man nur die in jenem Theorem auftretende Linie λ zusammenfallen lässt mit der Linie L_π.

L_π der Reihe nach sämmtliche Linien $L_1, L_2, \ldots L_{2p}$, so erhalten wir im Ganzen $2p$ Functionen, die mit $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_{2p}$ zu bezeichnen sind. Setzen wir nun die Summe

$$\Psi_1 + \Psi_2 + \ldots + \Psi_{2p} = \Psi,$$

so wird Ψ eine Function sein, welche in den Linien $L_1, L_2, \ldots L_{2p}$ mit constanten Werthdifferenzen behaftet ist, deren reelle Theile gleich $C_1, C_2, \ldots C_{2p}$ sind, und welche abgesehen von diesen Linien auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall stetig ist.

Wir gehen weiter. Zufolge des vierten Theoremes (Seite 76) muss eine Function $\Phi_\sigma(x + iy)$ oder Φ_σ existiren, welche im Gebiete $\mathfrak{T}_\sigma$ dieselben Unstetigkeiten besitzt, wie die daselbst gegebene Function φ_σ, welche aber, abgesehen von diesen Unstetigkeiten, ferner abgesehen von irgend welchen constanten und rein imaginären Werthdifferenzen, mit denen sie in den Linien $L_1, L_2, \ldots L_{2p}$ behaftet sein wird, auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall stetig ist. Den Gebieten $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots \mathfrak{T}_s$ entsprechend erhalten wir s solche Functionen, die mit $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_s$ zu bezeichnen sind; wir setzen:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_s = \Phi.$$

Addiren wir nun schliesslich die vorhin gebildete Function Ψ und die gegenwärtig erhaltene Φ, so ergiebt sich eine Function

$$\Psi + \Phi = F,$$

welche folgende Eigenschaften besitzt:

1. *F ist eine von $x + iy$ abhängende Function, welche in den Gebieten $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots \mathfrak{T}_s$ die durch die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_s$ vorgeschriebenen Unstetigkeiten besitzt, welche aber, abgesehen von diesen Unstetigkeiten und abgesehen von den Linien $L_1, L_2, \ldots L_{2p}$, auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall stetig ist.*

2. *In den Linien $L_1, L_2, \ldots L_{2p}$ ist die Function F mit constanten Werthdifferenzen behaftet, deren reelle Theile gleich gross sind mit den gegebenen Constanten $C_1, C_2, \ldots C_{2p}$.*

Zufolge der angewendeten Theoreme sind die Functionen $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_{2p}$ und $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_s$ durch die ihnen auferlegten Bedingungen vollständig bestimmt, bis auf additive Constanten. Gleiches gilt demnach auch von ihrer Summe, d. i. von der Function F.

Hiermit sind wir zu dem Satz gelangt, welcher das Fundament von Riemanns glänzenden Untersuchungen bildet, der wahrscheinlich aber auch in anderen Richtungen für die weitere Entwickelung der mathematischen Wissenschaft von grosser Bedeutung sein wird.

Tübingen, den 11. September 1865.

865





PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

P&A Sci.

